THE FOURTH SEMINAR ON RINGS

Date: September, 4 - 5, 1971

Place: Zaōsō, Kaminoyama-shi

P R O G R A M

SATURDAY, 9:00 A.M.

9:00-10:00
(1) On the double centralizer property
Mr. Y. Suzuki, Tōhoku University

10:10-11:10
(2) Torsionless modules and flat epimorphisms
4
Mr. K. Masaike, Tōkyō Gakugei University

11:20-11:50
(3) On quasi-Frobenius extensions
Mr. Y. Kitamura, Hokkaidō University

1:30-2:30 P.M.
(4) QF-rings and balanced rings
2
Mr. Y. Iwanaga, Tōkyō University of Education

2:40-3:40
(5) On the annihilator ideal of the radical of a group algebra
Mr. Y. Tsushima, Ōsaka City University

3:50-4:20
(6) On the radical of group rings
Mr. K. Motose, Shinshū University

6:00-8:00
A gathering for social and buisiness purposes

SUNDAY, 9:00 A.M.

9:00-10:00
(7) Modules over bounded Dedekind prime rings
Mr. H. Marubayashi, Ōsaka University

10:10-11:10
(8) On bilinear modules and Witt rings over a commutative ring
Mr. T. Kanzaki, Ōsaka City University

1:00-2:00 P.M.
(9) On centralizers in separable extensions
Mr. K. Sugano, Hokkaidō University

2:10-3:10
(10) On Galois theory of pre-schemes
Mr. Y. Takeuchi, Kōbe University

E N T R Y

K. Aoyama
S. Asano
S. Endō
S. Gotō
M. Harada
H. Harui
Y. Hayakawa
M. Hikari
S. Hirano
K. Hirata
M. Hongan
A. Inatomi
N. Ishi-i
W. Ishi-i
T. Ishikawa
T. Iwagami
Y. Iwanaga
H. Kanbara
T. Kanzaki
H. Katayama
T. Katō
Y. Kawada
K. Kishimoto
K. Kitamura
Y. Kitamura
H. Marubayashi
K. Masaike
Y. Miyashita
M. Miyauchi
I. Mogami
K. Motose
T. Nagahara
A. Nakajima
T. Nakamoto
K. Nakane
Y. Ninomiya
M. Ōhori
T. Onodera
K. Ōshiro
S. Samukawa
K. Sugano
T. Sumioka
Y. Suzuki
H. Tachikawa
Y. Takeuchi
H. Tominaga
Y. Tsushima
T. Tsuzuku
T. Ukegawa
Y. Watanabe
M. Yamada
K. Yamagata

On the double centralizer property

鈴木 保高 (東北大)

$R\,(\ni 1)$ を環, M を右 R-加群とし, $D = \mathrm{End}(M_R)$, $Q = \mathrm{End}({}_DM)$ とおく。R から Q への自然な写像が onto のとき, M_R は D.C.P. (double centralizer property) を持つと云う。

定理 (Lambek)　R_R の injective hull を $E(R_R)$ であらわすとき,

$$E(R_R) \text{ が D.C.P. を持つ} \iff E(R_R)/R_R \hookrightarrow \prod E(R_R).$$

いま, ${}_DM$ は f.g., すなわち D-exact sequence $\overset{n}{\oplus}\,{}_DD \xrightarrow{g} {}_DM \to 0$ が存在するとすれば, $0 \to Q_Q \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(\overset{n}{\oplus}\,{}_DD, {}_DM) \approx \overset{n}{\oplus} M_Q$ [redacted] は exact である。このとき, 上の定理の拡張として, 次の定理を得る。

定理　${}_DM$ は f.g. とする。

$$M_R \text{ が D.C.P. を持つ} \iff \overset{n}{\oplus} M_R/g^*(R) \hookrightarrow \prod M_R.$$

K_R, U_R が与えられたとき, U_R-dom. dim. $K_R \geq n$ とは,

$$0 \to K \to V_1 \to V_2 \to \cdots \to V_n, \qquad V_i \approx \prod U_R$$

なる R-exact sequence が存在することであると定義すれば, 次の定理が成り立つ。

定理　M_Q-dom. dim. $Q_Q \geqq 2$.

定理　M_R が忠実ならば, つぎの条件は同値である:

(1)　M_R は D.C.P. を持つ。

(2)　M_R-dom. dim. $R_R \geqq 2$,　${}_DM_Q \approx {}_D\mathrm{Hom}(Q_R, M_R)_Q$.

すべての忠実な右 R-加群が D.C.P. を持つとき, R を右 QF-1 環と呼ぶ。QF-1 環についてよく知られた結果としては,

定理 (Dickson–Fuller)　可換な Artinian QF-1 環は QF 環である。

Torsionless modules and flat epimorphisms

政池 寛三 (東京学芸大)

Rを環とする。 right R-module M が dense-torsion free であるとは、M の 0 でない任意の元の annihilator が R の dense right ideal でないことと定義する。

ここでの目的は、R の maximal right quotient ring Q の性質を dense-torsion free module を使って調べることである。

<u>定理</u>　次の条件は同値である：

(1) 任意の f.g. dense-torsion free right R-module は torsionless.

(2) Q は R の left quotient ring で、injective hull $E(Q_Q)$ の任意の f.g. submodule が (Q-)torsionless.

この結果は、特に Q が classical quotient ring の場合、任意の f.g. torsion free module を free module に embed する問題に apply することが出来る。

また、canonical map $R \to Q$ が flat epimorphism になる場合の特徴づけも dense-torsion free module を用いて与えられる。

R が classical quotient ring Q_{cl} を持つ場合、dense-torsion free module と torsion free module の間には密接な関係があるが、これら二つの定義が同値であるために Q_{cl} が満たすべき条件を求めることが出来る。

QF-rings and balanced rings

岩永 恭雄 (東京教育大)

QF-1 ring に関する Thrall の問題, および balanced ring について最近得られた結果を紹介し, 今後の問題点を取り上げる.

1. QF-1 rings

定義 A が left QF-1 ring とは, すべての忠実な A-加群が balanced であることと定義する.

Thrall の問題とは, "QF-1 algebra をその ideal structure で特徴づけよ" ということであるが, 現在迄未解決である. 次の結果は, この問題に対する最初の前進であり, 非常に重要である.

定理 1 (Morita [8]). $\{U_\alpha\}$ を非同型な minimal faithful left A-modules の全体とするとき, Artin 環 A が left QF-1 であるための必十条件は次の通り:

(1) 各 U_α は balanced

(2) 各 U_α は任意の直既約な A-加群を generate または cogenerate する.

この結果を用いることにより, 次の特殊な場合について Thrall の問題は解決された:

(I) generalized uniserial ring (Fuller [5])

(II) 代数的閉体上の多元環で, 根基の平方が 0 の場合 (Tachikawa [9])

また, 次の場合には, 着眼点の良さが問題を解決に導いた:

(III) 可換 Artin 環 (Floyd [4], Dickson-Fuller [2], Tachikawa [9])

(IV) semi-primitive ring (Camillo [1])

2. Balanced ring

定義 A が left balanced ring とは, すべての左 A-加群が balanced であることと定義する.

環の balanced 性は極小条件を導き, 問題は local な場合に帰着する:

定理 2 left balanced ring は left Artinian.

定理 3 (Fuller [6]) indecomposable balanced ring は local ring に Morita 同値.

balanced ring の構造は, 次によって決定される:

定理 4 (Dlab-Ringel [3]) A は local ring とする.

$$A \text{ は balanced ring} \iff \begin{cases} (1) & A \text{ は uniserial ring} \\ (2) & A \text{ は exceptional ring} \end{cases}$$

定理 5 (Camillo [1], Dickson-Fuller [2]) A は可換環とする.

$\boxed{A \text{ は balanced ring} \iff A \text{ は uniserial}}$.

[1] V. P. Camillo: Trans. Amer. Math. Soc. 149(1970). [2] S. E. Dickson - K. R. Fuller: Proc. Amer. Math. Soc. 24(1970). [3] M. V. Dlab - C. M. Ringel: Carleton Math. Series 39, 45(1971). [4] D. R. Floyd: Pacific J. Math. 27(1968). [5] K. R. Fuller: Math. Z. 106 (1968). [6] K. R. Fuller: Pacific J. Math. 34(1970). [7] J. P. Jans: Math. Ann. 188(1970). [8] K. Morita: Math. Z. 69(1958). [9]. H. Tachikawa: To appear. [10] R. M. Thrall: Trans. Amer. Math. Soc. 64(1948).

On quasi-Frobenius extensions

北村　好　（北大）

F. Kasch によって得られた Frobenius 拡大に関する諸結果は，B. Müller と A. Rosenberg により（独立的に）quasi-Frobenius 拡大（QF 拡大）に迄拡張された。ここでは，QF 拡大についてのいくつかの結果をのべる。

まず，QF 拡大の自己準同型環について，

定理　A/B は左 QF (resp. QF) 拡大，$M \in \mathcal{M}_A$ とする。

$$M\otimes_B A_A < \oplus M_A^{(n)} \Rightarrow \mathrm{End}(M_B)/\mathrm{End}(M_A) : \text{左 QF (resp. QF) 拡大}.$$

系　A/B は左QF (resp. QF) 拡大，$M \in \mathcal{M}_A$ とする。

M_A: 完全忠実，M_B: f.g. projective $\Rightarrow$ $\mathrm{End}(M_B)/\mathrm{End}(M_A)$: 左 QF (resp. QF) 拡大.

この事実を用いて，次のことが示される。

定理　B: 準素環，A/B : QF 拡大，$e^2=e\in A$，$f^2=f\in B$ とする。

eA_A: 忠実入射的，fB_B: 忠実入射的 $\Rightarrow$ $\mathrm{End}({}_{eAe}eA)/\mathrm{End}({}_{fBf}fB)$: QF 拡大

つぎに，QF 拡大 A/B において，A（またはB）のどんな性質が B（またはA）に遺伝するかを調べてみる。例えば，Frobenius 拡大における如く，

定理　A/B は QF 拡大とする。

(1)　$\mathrm{Pd}_A(M)<\infty \Rightarrow \mathrm{Pd}_A(M)=\mathrm{Pd}_B(M)$　($M\in\mathcal{M}_A$).

(2)　A_B（または ${}_BA$）: 完全忠実

$$\Rightarrow \mathrm{Pd}_B(M)=\mathrm{Pd}_A(M\otimes_B A)=\mathrm{Pd}_A(\mathrm{Hom}_B(A,M))\ (M\in\mathcal{M}_B),\quad \mathrm{rGD}(B)=\mathrm{rGD}(A).$$

系　A/B は QF 拡大とする。　B が左 (resp. 右) perfect ならば，A もそうである。特に，${}_BA$（または A_B）が完全忠実ならば，逆も成立する。

有限生成射影的かつ忠実入射的な右 A-加群が存在するとき，A は QF-3 であるというが，これについては，

定理　A/B は左（または右）QF 拡大とする。

$$A : \text{右 QF-3} \Leftrightarrow B : \text{右 QF-3}.$$

On the annihilator ideals of the radical of a group algebra

津島 行男 (大阪市大)

同題の論文 (Osaka J. Math. 8 (1971), 91-97) の前半を解説する，すなわち，Gを有限群，Kを標数 p の体とするとき，Gのある正規列から群環 KG の(部分的に既約な)組成列を構成するのが目標である．

<u>記号</u>　群Hに対し，KHの Jacobson 根基を $\mathfrak{n}_H$ であらわす．KGの(両側)イデアル $\mathfrak{J}, \mathfrak{J}'$ に対し，$(\mathfrak{J}':\mathfrak{J}) = \{x \in KG \mid \mathfrak{J}x \subset \mathfrak{J}'\}$ とおく．特に，$(0:\mathfrak{J})$ を $r(\mathfrak{J})$ であらわす．

つぎの定理は基本的である：

<u>定理(中山)</u>　AをK上の Frobenius algebra，$\mathfrak{J}$ をAのイデアルとする．$A/\mathfrak{J}$ がK上 Frobenius であるための必十条件は $r(\mathfrak{J}) = cA$ なるAの元cが存在することである．そのとき，A，$A/\mathfrak{J}$ 上の正則1次写像をそれぞれ λ, μ とし，λ_c を $\lambda_c(x) = \lambda(xc)$ で定義されるA上の1次写像とすれば，$\mu\psi = \lambda_c$ (ψ は自然写像 $A \to A/\mathfrak{J}$) である．さらに，Aが symmetric algebra であるとき，$A/\mathfrak{J}$ がまた symmetric であるための必十条件は，上のcが中心に属することである．

$A = KG$ に対しては，正則1次写像(の一つ) λ は次の如く具体的に与えられている：$\lambda(\sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma) = a_1$．これより，

<u>定理</u>　$r(\mathfrak{n}_G)$ はGの任意の自己同型で不変な KG の一元で生成される．

つぎに，$H \triangleleft G$ とし，$\hat{\mathfrak{n}}_H = KG \cdot \mathfrak{n}_H = \mathfrak{n}_H \cdot KG$ とおく．以下，$\mathfrak{n}_G$ を $\mathfrak{n}$ であらわす．

<u>系</u>　(1) $KG/\hat{\mathfrak{n}}_H$ はK上の symmetric algebra．

(2) eをKGの原始巾等元とすれば，$KGe/\mathfrak{n}e \cong (\hat{\mathfrak{n}}_H:\mathfrak{n})e/\hat{\mathfrak{n}}_H e$．

さらに，

<u>定理</u>　$P_2 \supset H_2 \supset P_1 \supset H_1$ はGの正規部分群列とし，P_i/H_i は自明でない p-群とする．$\mathfrak{g}_i = \mathrm{Ker}(KG \to K(G/H_i))$ とおけば，

(1) $(\hat{\mathfrak{n}}_{P_2}+\mathfrak{g}_2:\mathfrak{n}) \supset \hat{\mathfrak{n}}_{P_2}+\mathfrak{g}_2 \supset (\hat{\mathfrak{n}}_{P_1}+\mathfrak{g}_1:\mathfrak{n}) \supset \hat{\mathfrak{n}}_{P_1}+\mathfrak{g}_1$．

(2) 原始巾等元eが $\mathfrak{g}_2$ に含まれないならば，$(\hat{\mathfrak{n}}_{P_i}+\mathfrak{g}_i:\mathfrak{n})e/(\hat{\mathfrak{n}}_{P_i}+\mathfrak{g}_i)e \cong KGe/\mathfrak{n}e$，$(\hat{\mathfrak{n}}_{P_i}+\mathfrak{g}_i)e \neq 0$．

<u>系</u>　G の chief composition factors で自明でない p-群となるものの個数を m とすれば，KG の 1st Cartan invariant c_{11} は $m+1$ 以上である．

On the radicals of group rings

本瀬 香 (信州大)

以下, R は 1 を持つ半準素環とし, その根基 $J(R)$ に関する剰余環 $\bar{R}$ の中心は標数 p の素体を含むものとする。また, G は有限群で, P をその p-Sylow 部分群とする。H は G の正規部分群を意味するものとし, G の H に関する剰余群を G^* であらわす ($\sigma \in G$ の H に関する剰余類を σ^* であらわす).

k を標数 p の代数的閉体とするとき,

(1) $(G:P)\cdot(|P|-1) \geqq \dim_k J(kG) \geqq |P|-1$

(2) $(G:P)\cdot(|P|-1) = \dim_k J(kG) \iff P \triangleleft G$

(3) $|P|-1 = \dim_k J(kG) \iff P$: G の Frobenius 部分群

が成り立つ [2], [3]. ここでは, G が (2) または (3) の構造を持つときに, 群環 RG の根基を求めるのが主な目的である。

一般に $J(RH)G \subset J(RG)$ で, RG が半準素であることはよく知られているが, 特に $(G:H)$ が R の単元であれば $J(RG) = J(RH)\cdot G$ が成り立つ [1]. $J(RP)$ については,

<u>定理 1</u> $\quad J(RP)=\{\sum_{\sigma\in P} a_\sigma\sigma \mid \sum a_\sigma \in J(R)\}$.

したがって, $P \triangleleft G$ の場合は, $J(RG)=J(RP)\cdot G$ によって $J(RG)$ が与えられる。つぎに, P が G の Frobenius 部分群の時は, G の Frobenius 核を N とすれば, $e=|N|^{-1}\sum_{\eta\in N}\eta$ は RG の中心巾等元で, $J(RG)$ はつぎの定理で与えられる。

<u>定理 2</u> $\quad J(RG)=J(R)G+J(RP)e$.

定理 1 に関連して, 次の定理が示されるが, これは正規底に関するある種の結果を導くために用いられる。

<u>定理 3</u> S を準素環, $|H|>1$ とするとき, つぎは同値である:

(1) $\bar{S}=S/J(S)$ は標数 p で, H は p 群.

(2) SH は準素環

(3) $\sum_{\sigma\in G}\bar{a}_\sigma\sigma^*$: $\bar{S}G^*$ の単元 $\Rightarrow$ $\sum_{\sigma\in G}a_\sigma\sigma$: SG の単元

(4) $\sum_{\sigma\in G}a_\sigma\sigma^*$: SG^* の単元 $\Rightarrow$ $\sum_{\sigma\in G}a_\sigma\sigma$: SG の単元

[1] Y. Tsushima: Radicals of group algebras, Osaka J. Math. 4(1967).

[2] D. A. R. Wallace: Note on the radical of a group algebra, Proc. Cambl. Phil. Soc. 54(1958).

[3] D. A. R. Wallace: On the radical of a group algebra, Proc. Amer. Math. Soc. 12(1961).

Modules over bounded Dedekind prime rings

丸林 英俊 (阪大)

Abel群の理論の一般化は，今迄も色々な立場から試みられて来た。可換環上の加群の方向へは，I. Kaplansky, E. Matlis 等によってなされ，非可換環上の加群の方向でも，torsion theory, rank, divisibility 等について，多くの人達によって研究されて来た。しかしながら，非可換環上の加群についてはその作用環が一般的すぎるため，Abel群固有の理論と同様な理論を展開することは(ごく一部を除き)うまくいっていない様に思われる。ここでは，作用環を bounded Dedekind prime ring に限定すると，Abel群の理論はほぼ完全にそのまま成立することを示す。

$R(\ni 1)$ を prime Goldie 環，Q をその全商環とする。R が maximal order で，そのすべての essential one-sided ideal が projective のとき，R は Dedekind であると云う。また，R の essential one-sided ideal がつねに non-zero ideal を含むとき，R は bounded であると云う。以下，R は bounded Dedekind prime ring とし，M は R-(右)加群とする。

定義 1　(i) M の各元の annihilator が R の regular element を含むとき，M は torsion module であると云う。

(ii) P を R の prime ideal とする。M の各元の annihilator が P の巾を含むとき，M は P-primary であると云う。

次の定理により，torsion module の理論は primary module のそれに帰着される。

定理 1　torsion module は primary modules の直和である。

有限生成加群については，

定理 2　M は f.g. とし，その torsion part を T とすれば，

(1)　$M \cong T \oplus M/T$

(2)　M/T は R の uniform right ideals 有限個の直和に同型

(3)　T は eR/eP^n なる形の uniform cyclic modules 有限個の直和に同型，ここに P は R の prime ideal で，e は R_P (Goldie の意味における P に関する local ring) の uniform idempotent である。

M が f.g. の場合には，その任意の submodule も同様な分解を持つが，そのとき次の定理が成立する。

定理 3　M は f.g. とし，N をその submodule とする。M, N を定理2における如く分解したとき，それぞれの uniform right ideal direct summands の個数を r, s とし，与えられた prime ideal P に対して，M, N の P-primary uniform cyclic direct summands の個数をそれぞれ k_p, l_p とし，それらの direct summands の位数をそれぞれ $P^{\alpha_{p1}}, P^{\alpha_{p2}}, \cdots, P^{\alpha_{pk_p}}$ $(\alpha_{p1} \geq \alpha_{p2} \geq \cdots \geq \alpha_{pk_p})$, $P^{\beta_{p1}}, P^{\beta_{p2}}, \cdots,$

$P^{\beta_{pl_p}}$ $(\beta_{p1} \geqq \beta_{p2} \geqq \cdots \geqq \beta_{pl_p})$ とすれば，つぎのことが成り立つ.

(1) $s \leqq r$

(2) $l_p \leqq k_p$, $\beta_{pi} \leqq \alpha_{pi}$ $(i=1, 2, \cdots, l_p)$

(3) $s + \sum l_p = \dim N$

(この定理の証明には，多くの準備が必要である.) 定理2に注目して次の定義をする.

<u>定義 2</u>　M が R の uniform right ideals と cyclic modules との直和として表わされるとき，M は decomposable であると云う。

<u>定理 4</u>　decomposable module の submodule は decomposable である.

特に primary module に関しては，

<u>定理 5</u>　M は P-primary とし，$A = \{x \in M \mid xP = 0\}$ とおく。そのとき，M が decomposable であるための必十条件は，次の条件をみたす submodules の chain $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$ が存在することである:

(a) $\bigcup A_n = A$

(b) 各 A_n は bounded height (i.e. $\exists k \mid A_n \cap MP^k = 0$).

<u>定義 3</u>　R の任意の regular element c に対して $Mc = M$ がなり立つとき，M は divisible であると云う.

<u>定理 6</u>　divisible module は Q の minimal right ideals と $E(eR/eP)$ なる形の modules との直和である，こゝに P は R の prime ideal, e は R_P の uniform idempotent, $E(eR/eP)$ は eR/eP の injective hull を意味するものとする.

さらに，$E(eR/eP)$ については，次の定理が成り立つ.

<u>定理 7</u>　$E(eR/eP) \cong \varprojlim eR/eP^n$.

<u>定理 8</u>　$E(eR/eP)$ の自己準同型環は $e\hat{R}_P e$ に同型である，こゝに $\hat{R}_P$ は R_P の PR_P に関する completion を意味する.

On centralizers in separable extensions

菅野 孝三 (北大)

以下において，Λ/Γ は環拡大とし，$C = V_\Lambda(\Lambda)$, $Z = V_\Gamma(\Gamma)$, $\Delta = V_\Lambda(\Gamma)$, $C' = V_\Delta(\Delta)$, $\Lambda' = V_\Delta(C')$ とおく．

<u>定理</u>　Λ/Γ は H-分離的（すなわち，${}_\Lambda\Lambda\otimes_\Gamma\Lambda_\Lambda <\oplus {}_\Lambda(\Lambda\oplus\cdots\oplus\Lambda)_\Lambda$）で，$\Lambda$ は Γ 上右（または左）f.g. projective とする．このとき，Λ の部分環の族 $\mathcal{B} = \{B \mid {}_BB_B <\oplus {}_B\Lambda_B,\ B/\Gamma : \text{分離的}\}$ と Δ の部分環の族 $\mathcal{D} = \{D \mid D/C : \text{分離的}\}$ との間には，互いに可換子環をとることにより 1-1 対応がつけられる．

この定理を証明するために，次の諸命題が準備される．

<u>命題 1</u>　$\Gamma \subset B \subset \Lambda$, ${}_BB\otimes_\Gamma\Lambda_\Lambda <\oplus {}_B(\Lambda\oplus\cdots\oplus\Lambda)_\Lambda$, $V_\Lambda^2(B) = B$ とする．（たとえば，Λ/Γ が H-分離的で ${}_BB_\Gamma <\oplus {}_B\Lambda_\Gamma$ ならばよい．）$D = V_\Lambda(B)$, $\Gamma' = V_\Lambda^2(\Gamma)$ とおけば，つぎのことが成り立つ．

(1)　Δ/D : 分離的 $\iff {}_{\Gamma'}\Gamma'_{\Gamma'} <\oplus {}_{\Gamma'}B_{\Gamma'}$

　　Δ/D : H-分離的 $\iff {}_{\Gamma'}B_{\Gamma'} <\oplus {}_{\Gamma'}(\Gamma'\oplus\cdots\oplus\Gamma')_{\Gamma'}$

(2)　さらに，B が Γ 上右 f.g. projective ならば，

　　B/Γ : 分離的 $\iff {}_DD_D <\oplus {}_D\Delta_D$

　　B/Γ : H-分離的 $\iff {}_D\Delta_D <\oplus {}_D(D\oplus\cdots\oplus D)_D$.

<u>命題 2</u>　Λ/Γ は H-分離的とする．$B \in \mathcal{B}$ に対し，つぎのことが成り立つ．

(1)　Δ は $D = V_\Lambda(B)$ 上右（かつ左）f.g. projective

(2)　D/C は分離的で，$V_\Lambda(D) = B$.

<u>命題 3</u>　Λ/Γ は H-分離的とし，$D \in \mathcal{D}$（または，Δ/C が分離的で，$\Delta \supset D \supset C$ は C 上半単純）とする．$B = V_\Lambda(D)$ とおけば，つぎのことが成り立つ．

(1)　$V_\Lambda(B) = D$

(2)　${}_BB_\Gamma <\oplus {}_B\Lambda_\Gamma$ で，$B\otimes_\Gamma\Lambda \to \Lambda$ ($b\otimes\lambda \mapsto b\lambda$) は B-Λ-分解する．

(3)　Λ/B は H-分離的．

<u>補題</u>　Λ は可換環 R 上の多元環とし，Γ をその部分多元環とする．Λ が R 上 f.g. projective で，Γ が R-分離的ならば，${}_\Gamma\Gamma_\Gamma <\oplus {}_\Gamma\Lambda_\Gamma$ である．

さて，Λ/Γ が H-分離的で ${}_\Gamma\Gamma_\Gamma <\oplus {}_\Gamma\Lambda_\Gamma$ であるとき，Λ が Γ 上右または左 f.g. projective ならば，Λ/Γ は Frobenius 拡大となり，したがって右かつ左 f.g. projective である．

<u>系</u>　Λ/Γ は H-分離的，${}_\Gamma\Gamma_\Gamma <\oplus {}_\Gamma\Lambda_\Gamma$，かつ Λ は Γ 上（右または左）f.g. projective とする．$\Delta = Z$ ならば，Λ の部分環の族 $\{B \mid B/\Gamma : \text{H-分離的}\}$ と Z の部分環の族 $\{R \mid R/C : \text{分離的}\}$ との間には，互いに可換子環をとることにより 1-1 対応がつけられる．

以上により，Λ/Γ が H-分離的，${}_\Gamma\Gamma_\Gamma <\oplus {}_\Gamma\Lambda_\Gamma$，かつ Λ が Γ 上 f.g. projective である場合には，$\Omega' = \mathrm{End}({}_{\Lambda'}\Lambda)$ の部分環の族 $\mathfrak{A}' = \{A' \mid {}_{\Lambda'}A'_{\Lambda'} <\oplus {}_{\Lambda'}\Omega'_{\Lambda'},\ A'/\Lambda : \text{分離的}\}$,

Λの部分環の族 $\mathfrak{B}' = \{B' \mid B'/\Lambda' : H\text{-}分離的\}$, C'の部分環の族 $\mathfrak{R} = \{R \mid R/C : 分離的\}$ の間に，次のような1-1対応の存在が示される：

$A' \cap C' = R$, $R \otimes_C \Lambda = A'$; $V_\Lambda(B')\,(= V_{B'}(B')) = R$, $V_\Lambda(R) = B'$.

On bilinear modules and Witt rings over a commutative ring

神崎　熙夫　(大阪市大)

1.　以下，Rは可換環とする。$\mathfrak{U}$をR-module，$(M, B, \mathfrak{U})$を bilinear form $B: M\times M \to \mathfrak{U}$ をもつ bilinear R-module とする。Mの non-singular element x を，$B(x, M) = R\cdot B(x, x)$ をみたすことで定義し，symmetric non-degenerated bilinear R-module $(M, B, \mathfrak{U})$ において，symmetry を M の non-singular element x に対して $\rho_x : M \to M$; $y \mapsto y - 2r_y x$ ただし $r_y \in R$; $B(x, y) = r_y \cdot B(x, x)$ により定義する。そのとき，標数が2でない体上の直交群が symmetry で generate されるというよく知られた古典的な定理が可換正則環の上にまで拡張される。

__定理__　$(M, B, \mathfrak{U})$ を symmetric non-degenerated quadratic R-module とし，条件 "$\forall u \neq 0 \in \mathfrak{U}$, $\exists$単元 $c \in R \mid Ru = c\mathfrak{U}$" をみたすとする。$M$が互いに直交する有限個の元で生成され，2が$R$の単元であれば，$(M, B, \mathfrak{U})$の automorphism group (orthogonal group) は symmetry で生成される。とくに，Rが正則環ならば，$\mathfrak{U} = R$ にとって，(M, B, R)についても同様に言える。

2.　Pic(R) を invertible R-modules のなす category とする。Pic(R)の中の一つの$\mathfrak{U}$に対して，quadratic form $q : P \to \mathfrak{U}$ をもつ f.g. projective R-module $P = (P, q, \mathfrak{U})$ について，$\mathfrak{U}$を固定して，同型類の全体を考える。とくに $\mathfrak{U} = R$ のとき，Witt環を構成するのと同様にして，$\mathfrak{U}$上の Witt 加群 $W(\mathfrak{U})$ が構成され，それは $W(R)$-module をなしている。$W(R)$-module $W(\mathfrak{U})$ の構造については，次の場合だけが知られている：$\mathfrak{U}$ が R上の Picard 群の中で平方元ならば，即ち，Pic(R)の中に $\mathfrak{V} \otimes_R \mathfrak{V} \approx \mathfrak{U}$ をみたす$\mathfrak{V}$が存在するならば，$W(\mathfrak{U})$ は階数1の $W(R)$-free module である。

3.　$W(R)$の構造については，Rが体の場合に限り，A. Pfister，W. Scharlau，F. Lorenz 等によって知られているが，Rが環の場合にはまだ知られていない様である。Rが complete Noetherian local ring で residue field が有限体である場合には，次の様になる：1) Rの residue field で -1 が平方元ならば，$W(R)$は2位の群の $\mathbb{Z}/(2)$ 上の group ring に同型で，2) その他の場合には，$W(R) \approx \mathbb{Z}/(n)$，$n$は4の倍数，となる。

On Galois theory of pre-schemes

竹内　康滋（神戸大）

Grothendieck は S.G.A. 1961 において "revêtement principal" なる概念を導入した。アフィンの場合，これは C.H.R.-Galois 拡大を意味する。C.H.R.-Galois 理論を用いて，revêtement principal のガロア対応の理論を展開したが，Villamayor と Zelinsky が指摘したように，C.H.R.-ガロア理論は，ガロア群の部分群に対応する中間環を特徴づける研究であった。revêtement principal のガロア理論も，このC.H.R.流のものである。従って，revêtement non ramifié の任意の中間 revêtement non ramifié に自己同型群の部分群を対応させるガロア理論を展開することに興味がある。これは，ある種の条件の下で可能である。それは，weakly Galois algebra と C.H.R.-Galois 拡大の構造を精密に調べることと，revêtement principal のガロア理論とによって得られる。また，quasi-Galois extension の概念も重要である。

R は可換環，S は可換 R-多元環で R 上 integral とする。S の R-自己同型の全体を G とする。このとき，R の任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して，

1) $\mathfrak{P}$ が $\mathfrak{p}$ 上の S の素イデアルなら，$S/\mathfrak{P}$ の商体は $R/\mathfrak{p}$ の商体の正規拡大体である，

2) G は $\mathfrak{p}$ 上の S の素イデアルの族に可移的に作用する，

3) $S/\mathfrak{P}$ の $R/\mathfrak{p}$-自己同型は，すべて G の元によって惹き起される，

という3条件がみたされるとき，S を quasi-Galois R-algebra という。この概念は自然に prescheme の場合に迄拡張出来て，quasi-Galois covering の概念を得る。quasi-Galois, étale covering (revêtement étale) を weakly Galois covering という。（アフィンの場合，これは Villamayor-Zelinsky の weakly Galois algebra の概念に一致する。）ここでは，weakly Galois covering のガロア理論を与えることを目的とする。