

ON R-MATRICES CONSTRUCTED FROM CERTAIN FINITE-DIMENSIONAL YETTER-DRINFELD MODULES

RYOTA WAKAO

ABSTRACT. In 2024, Garoufalidis and Kashaev showed that knot invariants can be constructed via R-matrices arising from braided Hopf algebras equipped with additional data [8]. In particular, they construct explicit examples of such invariants using certain Nichols algebras, including the ADO polynomials and the colored Jones polynomials.

In this talk, we will describe how to recover the knot invariants in their construction by specializing the braided Hopf algebra to a Hopf superalgebra. The reason for focusing on Hopf superalgebras is that, according to [9], low-dimensional Hopf superalgebras have been classified and provide a rich source of concrete examples.

1. はじめに

組みひも圏 (braided monoidal category) \mathcal{C} におけるホップ代数の公理を満たす対象は **組みひもホップ代数 (braided hopf algebra)** と呼ばれ、その研究の重要性は、量子群の研究や位相的場の理論における 3 次元トポロジーの不変量構成を始めとした応用例が裏付けている。特に \mathcal{C} として、いくつかの公理を満たす対称性を備えたベクトル空間の圏を選ぶとき、組みひもホップ代数として実現できる **ニコルス代数**は、量子化された普遍包絡代数を含む pointed ホップ代数の主だった分類手法 (Lifting method) において重要な役割を果たしている ([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7])。

近年、Garoufalidis-Kashaev [8] は、与えられた組みひもホップ代数とホップ代数自己同型に対して R 行列 (ヤン・バクスター方程式をみたく) を構成した。この R 行列の構成には、ホップ代数の理論で用いられる Yetter-Drinfeld 加群が本質的である。さらにその応用として R 行列をもとに状態和を定めることによって、結び目不変量が得られることを示している。特に、この上記の構成をニコルス代数に適用することで、ADO 多項式や色付きジョーンズ多項式、ゴールド多項式やハーバー多項式等を始めとする、様々な結び目不変量が得られることが示された。

本研究では、位数 2 の群で次数付けられたベクトル空間からなる圏の対象であって、理論物理にその由来を持つスーパー対称性を考慮した組みひもホップ代数 (**スーパー・ホップ代数**と呼ぶ) に着目する。この枠組みにおいては、ニコルス代数として外積代数が実現されるが、我々の低次元における分類結果 [9] によって、ニコルス代数とは異なるスーパー・ホップ代数が数多く構成されることが分かっている。特に有限次元スーパー・ホップ代数の系列として、有限アーベル群 Γ とそれに付随するデータ \mathcal{D} からスーパー・ホップ代数 $\mathcal{A}(\Gamma, \mathcal{D})$ を考えることができ (後述の Theorem 9)、さらに“非半単純”な 10 次元以下のスーパー・ホップ代数の多くが $\mathcal{A}(\Gamma, \mathcal{D})$ と同型であることが示された。そこで、著者は Garoufalidis-Kashaev の手法をスーパー・ホップ代数 $\mathcal{A}(\Gamma, \mathcal{D})$ に適用することで、 R 行列を構成した。また、 N 次元スーパー・ホップ代数に対して、対応する R 行列は N^2 次の表現行列を与える。従ってその計算量が急激に増大することとなり、それぞれ

The detailed version of this paper will be submitted for publication elsewhere.

の状態和 ([8, subsection 2.1] を参照) を具体的に決定することは容易ではない. そのため本稿では, 結び目不変量を明示的に計算し結び目の区別にまで踏み込むことは行わず, Garoufalidis-Kashaev による不変量構成のうち, ホップ代数的手法から得られる R 行列の導出とその構造に焦点を当ててを主眼とする.

2. YETTER-DRINFELD 加群と R 行列

2.1. **ホップ代数.** 本稿を通して, 標数ゼロの代数閉体 \mathbb{k} を基礎体とし, テンソルは全て \mathbb{k} 上で考える. まず通常のホップ代数の定義を述べるところから始める. ベクトル空間 H について, 5つの線型写像たち $m : H \otimes H \rightarrow \mathbb{k}, u : \mathbb{k} \rightarrow H, \Delta : H \rightarrow H \otimes H, \varepsilon : H \rightarrow \mathbb{k}, S : H \rightarrow H$ が与えられているとする.

Definition 1. H は次の条件をみたしているとき, **ホップ代数**と呼ぶ.

- (1) $m \circ (\text{id} \otimes m) = m \circ (m \otimes \text{id})$ [結合律]
- (2) $m \circ (\text{id} \otimes u) = m \circ (u \otimes \text{id})$ [単位律]
- (3) $(\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta$ [余結合律]
- (4) $(\text{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta = (\varepsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta$ [余単位律]
- (5) $m \circ (S \otimes \text{id}) \circ \Delta = u \circ \varepsilon = m \circ (\text{id} \otimes S) \circ \Delta$
- (6) Δ と ε はそれぞれが環準同型写像である.

定義の (1) と (2) は H が代数であることを要請している. また (3),(4) の条件は, H が代数の双対概念である“余代数”であることを意味している. 実際に余結合律は, 結合律を可換図式で表したときにその図式をひっくり返したものである. このときの Δ は余積, ε は余単位, S はアンチポードと呼ばれる.

Example 2. 例えば以下で挙げる例はホップ代数をなすものとしてよく知られている:

- (1) 任意の群 G に対して群環 $\mathbb{k}G$ は次でホップ代数をなす.

$$\forall g \in G, \quad \Delta(g) = g \otimes g, \quad \varepsilon(g) = 1, \quad S(g) = g^{-1}.$$

- (2) 不定元として T をもつ一変数多項式環 $\mathbb{k}[T]$ は次でホップ代数をなす.

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \Delta(T^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T^{n-k} \otimes T^k, \quad \varepsilon(T^n) = \delta_{n,0}, \quad S(X^n) = (-X)^n.$$

ここで $\binom{n}{k}$ は二項係数で $\delta_{n,0}$ はクロネッカー・デルタを表している.

- (3) リー代数 \mathfrak{g} に対して, 普遍包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ は次でホップ代数をなす.

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \quad \Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X, \quad \varepsilon(X) = 0, \quad S(X) = -X.$$

- (4) ホップ代数たち H, H' に対して, H' の余積, 余単位, アンチポードをそれぞれ $\Delta', \varepsilon', S'$ とかく. テンソル積 $H \otimes H'$ について, まず代数構造は $(a \otimes b)(c \otimes d) := ac \otimes bd$ ($a, c \in H, b, d \in H'$) によって与えられる. さらに余単位として $\varepsilon \otimes \varepsilon'$ を, アンチポードとして $S \otimes S'$ を, 余積として次をもつホップ代数をなす.

$$H \otimes H' \xrightarrow{\Delta \otimes \Delta'} H \otimes H \otimes H' \otimes H' \xrightarrow{\text{id} \otimes \text{flip} \otimes \text{id}} H \otimes H' \otimes H \otimes H'.$$

ここで flip は $\text{flip} : H \otimes H' \rightarrow H' \otimes H; a \otimes b \mapsto b \otimes a$ と成分をスイッチさせる自然な写像である.

二つのホップ代数 H, K が与えられたときのホップ代数としての同一視は次で与えられる：写像 $f: H \rightarrow K$ がホップ代数射であるとは、 f は代数射であり、かつ余代数射 (i.e. 余積と余単位を保つ) であるものをいう。さらに H, K が同型であるとは、 H と K 間に全単射なホップ代数射が存在するときをいう。

次節では、このホップ代数を“スーパー化”して、その定義と具体例を見る。

2.2. スーパー・ホップ代数. スーパーとは、位数 2 の群 $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ で次数付けられた対象の理論を指す。これまでのベクトル空間の代わりに \mathbb{Z}_2 -graded ベクトル空間 $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ を考え、この V をスーパー・ベクトル空間と呼ぶ。各部分空間には名前がついていて、 $V_{\bar{0}}$ を even part といい、 $V_{\bar{1}}$ を odd part という。

また斉次元 $0 \neq v \in V_{\bar{0}} \cup V_{\bar{1}}$ に対して、 v のパリティ $|v|$ を $v \in V_{\bar{0}}$ のときは $|v| = 0$ とし $v \in V_{\bar{1}}$ のときは $|v| = 1$ と定める。スーパー・ベクトル空間全体 sVec は、射を \mathbb{Z}_2 次数付けを保つ線型写像とすることで圏をなすが、 $V, W \in \text{sVec}$ に対してベクトル空間としてのテンソル積 $V \otimes W$ には、 V, W を次数付けに即して直和分解したとき、それぞれの part の次数を足したものを次数とすることで $V \otimes W \in \text{sVec}$ とできる。 \mathbb{k} は $\mathbb{k} = \mathbb{k}_{\bar{0}} \oplus 0$ とみて $\mathbb{k} \in \text{sVec}$ である。このことから、 sVec はテンソル圏の構造を持つことが分かる。

ここで、通常のホップ代数たちのテンソル積の代数構造には対称性 flip が用いられていたことを思い出すと、ホップ代数の定義における Δ が環準同型写像であることには flip が本質的な情報として現れる。そこで、 sVec ではスーパー対称性と呼ばれる同型写像 sflip を各 $V, W \in \text{sVec}$ に対して、

$$\text{sflip}: V \otimes W \rightarrow W \otimes V; v \otimes w \mapsto (-1)^{|v||w|} w \otimes v$$

と定め、これを sVec での対称性として採用するのである。長くなったが上述の話の下で、我々はスーパー・ホップ代数の定義に到達する。

Definition 3. \mathbb{Z}_2 -次数付き代数 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{H}_{\bar{1}}$ がスーパー・ホップ代数であるとは、 sVec での射 $\Delta: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, $\varepsilon: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{k}$ 及び $S: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ が存在して Definition 1 の (3) から (6) の条件全てをみたすときをいう。

Example 4. 次はスーパー・ホップ代数の具体例である：

- (1) 通常のホップ代数 H は $H = H_{\bar{0}} \oplus 0$ とみてスーパー・ホップ代数をなす。
- (2) N を自然数とする。元 z_1, \dots, z_N with $|z_i| = 1$ を基底にもつベクトル空間の外積代数 $\wedge(z_1, \dots, z_N)$ は次で N^2 次元のスーパー・ホップ代数をなす。

$$1 \leq \forall i \leq N, \quad \Delta(z_i) = 1 \otimes z_i + z_i \otimes 1, \quad \varepsilon(z_i) = 0, \quad S(z_i) = -z_i.$$

Remark 5. 外積代数は $z_i^2 = 0$ をみたしている。この両辺に Δ を施せば、

$$0 = \Delta(z_i)^2 = (1 \otimes z_i + z_i \otimes 1)(1 \otimes z_i + z_i \otimes 1) = 1 \otimes z_i^2 + z_i^2 \otimes 1 + (1 - 1)z_i \otimes z_i$$

である。最後の等号で $(1 \otimes z_i)(z_i \otimes 1) = -z_i \otimes z_i$ であることを用いた。このことから、基礎体の標数が 2 でない限り、 $\wedge(z_1, \dots, z_N)$ は上記の構造でホップ代数とはならない。

以下で、有限次元スーパー・ホップ代数 \mathcal{H} とスーパー・ホップ代数同型射 (定義はホップ代数射と同様である) $\phi: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ を固定する。

Definition 6. スーパー・ベクトル空間 V がひねられた Yetter-Drinfeld スーパー群であるとは、それぞれが次数付けられた左 \mathcal{H} -作用 $\triangleleft: \mathcal{H} \otimes V \rightarrow V$ 及び、左 \mathcal{H} -余作用

$\delta : V \rightarrow \mathcal{H} \otimes V$ をもち、写像の等号

$$\begin{aligned} & (m \otimes \text{id}) \circ (\text{id} \otimes \text{sflip}) \circ ((\delta \circ \triangleleft) \otimes \phi) \circ (\text{id} \otimes \text{sflip}) \circ (\Delta \otimes \text{id}) \\ & = (m \otimes \triangleleft) \circ (\text{id} \circ \text{sflip} \circ \text{id}) \circ (\Delta \circ \delta) \end{aligned}$$

が成り立つときをいう。ここで、以下の二条件をみたす \mathbb{Z}_2 -線型写像 $\delta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \otimes V$ を \mathcal{H} -余作用と呼んでいる：

- (1) $(\Delta \otimes \text{id}) \circ \delta = (\text{id} \otimes \delta) \circ \delta$
- (2) $(\varepsilon \otimes \text{id}) \circ \delta = \text{id}$.

余作用という名の通り、これは作用の定義の双対である。(1) は作用が積と両立していること、(2) は単位元を作用させても変わらないことに対応する条件である。

次に \mathcal{H} 自身がひねられた Yetter-Drinfeld スーパー加群であることをみて、そこから R 行列が構成できることを見る。

Lemma 7 ([8]). スーパー・ホップ代数 \mathcal{H} は作用を積 m で、余作用 δ が次で定まる：

$$\delta = (m \otimes \text{id}) \circ (\text{id} \otimes \text{sflip}) \circ (\text{id} \otimes (S \circ \phi)) \circ (\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta.$$

この余作用により、 \mathcal{H} はひねられた Yetter-Drinfeld スーパー加群となる。

Theorem 8 ([8]). Lemma 7 の設定で、

$$\rho = (m \otimes \text{id}) \circ (\text{id} \otimes \text{sflip}) \circ (\delta \otimes \phi)$$

とおけば ρ は R 行列である。すなわち次の等号が成り立つ：

$$(\rho \otimes \text{id}) \circ (\text{id} \otimes \rho) \circ (\rho \otimes \text{id}) = (\text{id} \otimes \rho) \circ (\rho \otimes \text{id}) \circ (\text{id} \otimes \rho).$$

3. 主結果

Garoufalidis-Kashaev の不変量構成はスーパー・ホップ代数に限らない一般の“組みひもホップ代数”に対して与えられており、組みひもホップ代数の中でも代表的なクラスである“ニコルス代数”にその範囲を絞り、具体的な計算と考察を行っている。一方で、近年に我々はスーパー・ホップ代数の分類を進め、その結果ニコルス代数でないようなスーパー・ホップ代数が多く得られることが分かっている。そこで、我々は分類によって得られたスーパー・ホップ代数に対して R 行列を決定した。特に本稿では [9] で導入された、有限アーベル群ごとに定めることができるスーパー・ホップ代数 $\mathcal{A}(\Gamma, \mathcal{D})$ に着目する。

自然数 θ と任意に有限アーベル群 Γ をとり固定し、 Γ の指標群は $\hat{\Gamma}$ で表すこととする。四つ組からなる θ 個のデータ

$$\mathcal{D} := (g_i, \chi_i, \mu_i; \varepsilon_i)_{i=1}^{\theta} \in (\Gamma \times \hat{\Gamma} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\})^{\theta}$$

であって、次の条件を満たすものを考える：各 $i, j \in \{1, \dots, \theta\}$ with $i \neq j$ に対して

- (1) $\varepsilon_i = 1$ ならば $N_i := \text{ord}((-1)^{\varepsilon_i} \chi_i(g_i))$ は偶数、
- (2) $g_i = 1$ または $\chi_i^{N_i} \neq 1$ ならば $\mu_i = 0$ 、
- (3) $\chi_i(g_j) \chi_j(g_i) = 1$.

Theorem 9 ([9]). 上記の条件を満たす \mathcal{D} について。 $\mathcal{A}(\Gamma, \mathcal{D})$ を $g \in \Gamma$ with $|g| = 0$ と z_1, \dots, z_{θ} with $|z_i| = \varepsilon_i$ で生成される sVec での代数で、以下の関係式が成り立つものとして定義する。

$$gz_i = \chi_i(g)z_i g, \quad z_i z_j = (-1)^{\varepsilon_i \varepsilon_j} \chi_j(g_i) z_j z_i, \quad z_i^{N_i} = \mu_i (1 - g_i^{N_i}).$$

この $\mathcal{A}(\Gamma, \mathcal{D})$ に Δ, ε, S を

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \varepsilon(g) = 1, \quad S(g) = g^{-1},$$

$$\Delta(z_i) = g_i \otimes z_i + z_i \otimes 1, \quad \varepsilon(z_i) = 0, \quad S(z_i) = -g_i^{-1} z_i$$

と定め、 Δ, ε を環準同型であるように拡張する。また S は斉次元 $a, b \in \mathcal{A}(\Gamma, \mathcal{D})$ に対して、 $S(ab) = (-1)^{|a||b|} S(b)S(a)$ をみたすように拡張する。すると $\mathcal{A}(\Gamma, \mathcal{D})$ はスーパー・ホップ代数で、 Δ, ε, S はそれぞれ余積、余単位、アンチポードである。

例えば $\Gamma := \{1\}$ として、 $\theta := N$ とおき、各 $1 \leq i \leq N$ に対して $g_i := 1, \chi_i := 1, \varepsilon_i := 1$ と定めて得られるデータ \mathcal{D} は、上の条件 (1), (2), (3) をみたすことが直ちに分かる。ここで $\chi_i = 1 \in \hat{\Gamma}$ は自明な指標を意味する。このとき、 $\mathcal{A}(\Gamma, \mathcal{D})$ は自然に外積代数 $\wedge(z_1, \dots, z_N)$ とスーパー・ホップ代数として同型である。

Remark 10. 分類結果から、この $\mathcal{A}(\Gamma, \mathcal{D})$ は次元 10 以下であって、非半単純なスーパー・ホップ代数の大部分を尽くす。ここで半単純性は、非スーパーのと同様に定めている。

さて、 R 行列とそれに伴う余作用はスーパー・ホップ代数 $\mathcal{A}(\Gamma, \mathcal{D})$ とスーパー・ホップ代数自己同型射 ϕ を与えることによって決まるのだった。また、 $\mathcal{A}(\Gamma, \mathcal{D})$ は次の元たち

$$gz_1^{i_1} z_2^{i_2} \cdots z_N^{i_N} \quad (g \in \Gamma, \quad 0 \leq i_j \leq N_j - 1)$$

を基底に持つことが分かる。与えられた一般のデータ \mathcal{D} で、 ϕ が自己同型であるための必要十分条件を決定するのは難しいが、初等的な考察によって次の必要条件が得られる。

Lemma 11. スーパー・ホップ代数自己同型射 ϕ について、次が成立する。

- (1) 任意の $g \in \Gamma$ に対して、唯一つの $h \in \Gamma$ が存在して $\phi(g) = h$ が成立する。
- (2) 任意の $1 \leq j \leq \theta$ と $g \in \Gamma$ に対して、 $\chi_i(g) = \chi_i(\phi(g))$ が成立する。
- (3) ある \mathbb{k} 成分の θ 次正則行列 $(a_{ij})_{ij}$ が唯一つ存在して、任意の $1 \leq j \leq \theta$ に対して $\phi(z_j) = \sum_{i=1}^{\theta} a_{ij} z_i$ が成立する。

従って自己同型射 ϕ は、群同型 $\Gamma \rightarrow \Gamma$ と \mathbb{Z}_2 -次数付き線型同型 $\bigoplus \mathbb{k}z_i \rightarrow \bigoplus \mathbb{k}z_i$ の組であって、適切な条件をみたす写像たちと一対一対応する。この結果を踏まえ、我々は次元 10 以下の全て（次元が 2, 4, 8）の $\mathcal{A}(\Gamma, \mathcal{D})$ について、その自己同型と余作用、 R 行列を決定することができた。

Example 12. 次元が 4 以上のスーパー・ホップ代数 $\mathcal{A}(\Gamma, \mathcal{D})$ から得られる R 行列は、その表現行列のサイズが 16 次以上であるから、ここでは 2 次元の外積代数から得られる自己同型と余作用及び、 R 行列について見る。分類結果から 2 次元のスーパー・ホップ代数であって、odd part がゼロでないものは次に限られる：

$$\mathcal{H} = \mathbb{k}[z]/(z^2 = 0), \quad \Delta(z) = 1 \otimes z + z \otimes 1, \quad S(z) = -z.$$

このとき Lemma 11 を用いれば、非ゼロなスカラー t を用いて $\phi_t(1) = 1$ & $\phi_t(z) = tz$ で表せることが分かるが、これは十分条件でもあることが従う。よって、固定されたスカラー $0 \neq t \in \mathbb{k}$ に対して自己同型を $\phi := \phi_t$ とするとき、余作用 δ は次で与えられる。

$$\delta(1) = 1 \otimes 1, \quad \delta(z) = 1 \otimes z + (1 - t)z \otimes 1.$$

このことから、外積代数に対応する R 行列は全て書き下すことができる。いま $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ の基底として $(1 \otimes 1, 1 \otimes z, z \otimes 1, z \otimes z)$ を選ぶとき、 R 行列 ρ の表現行列は

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t \end{pmatrix}$$

で与えられる。

REFERENCES

- [1] N. Andruskiewitsch, P. Etingof and S. Gelaki, *Triangular Hopf algebras with the Chevalley property*, Michigan Math. J. **49** (2001), no. 2, 277–298.
- [2] N. Andruskiewitsch and S. Natale, *Counting arguments for Hopf algebras of low dimension*, Tsukuba J. Math. **25** (2001), no. 1, 187–201.
- [3] N. Andruskiewitsch and H.-J. Schneider, *Hopf algebras of order p^2 and braided Hopf algebras of order p* , J. Algebra **199** (1998), no. 2, 430–454.
- [4] I. Angiono and A. García Iglesias, *Liftings of Nichols algebras of diagonal type II: all liftings are cocycle deformations*, Selecta Math. (N.S.) **25** (2019), no. 1, Paper No. 5, 95.
- [5] I. Angiono and A. García Iglesias, *Pointed Hopf algebras: a guided tour to the liftings*, Rev. Colombiana Mat. **53** (2019), no. suppl., 1–44.
- [6] S. Caenepeel, S. Dăscălescu and Ş. Raianu, *Classifying pointed Hopf algebras of dimension 16*, Comm. Algebra **28** (2000), no. 2, 541–568.
- [7] G. A. García and C. Vay, *Hopf algebras of dimension 16*, Algebr. Represent. Theory **13** (2010), no. 4, 383–405.
- [8] S. Garoufalidis and R. Kashaev, *Multivariable Knot Polynomials from Braided Hopf Algebras with Automorphisms*, arXiv:2311.12528 (2024).
- [9] T. Shibata, K. Shimizu and R. Wakao, *Pointed Hopf superalgebras of dimension up to 10*, Revue Roumaine de Math. Pures Appl. **69** (2024), no. 3–4, 539–573.

DIVISION OF MATHEMATICAL SCIENCES
 GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING
 OKAYAMA UNIVERSITY OF SCIENCE
 OKAYAMA 700-0005 JAPAN
 Email address: r23nda8mr@ous.jp