AFFINE YANGIANS AND W-ALGEBRAS OF TYPE A

MAMORU UEDA (上田 衛)

Abstract. Brundan and Kleshchev wrote down a finite W-algebra of type A as a quotient algebra of the shifted Yangian. The shifted Yangian contains a finite Yangian of type A as a subalgebra. De Sole, Kac, and Valeri constructed a homomorphism from this subalgebra to the finite W-algebra of type A by using the Lax operator. In this talk, I explained how to construct a homomorphism from the affine Yangian of type A to a non-rectangular W-algebra of type A, which can be regarded as an affine version of the result of De Sole-Kac-Valeri. This homomorphism is expected to lead to a generalization of the AGT conjecture.

1. イントロダクション

W 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)$ は有限次元簡約リー代数 $\mathfrak{g}$、その冪零元 $f\in\mathfrak{g}$、レベルと呼ばれる複素数 k に付随して定まる頂点代数である。W 代数はアファインリー代数と Virasoro 代数の一般化とみなせる。実際に、$f=0$ の時、W 代数は $\mathfrak{g}$ に付随する普遍アファイン頂点代数と呼ばれる頂点代数と一致する。この頂点代数は定義関係式がアファインリー代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の定義関係式と一致するため、アファインリー代数と同一視することが出来る。また、$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2), f\neq 0, k\neq -2$ の場合、W 代数は Virasoro 代数と一致する。これらの具体例を見れば、一般の $\mathfrak{g}$ や f に対して、W 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)$ の定義関係式を書き下すことが出来るのでは無いかと期待されるが、残念ながら一般の W 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)$ は非常に複雑であり、定義関係式を直接書き下すことは難しい。

この問題は W 代数の有限次元版にあたる有限 W 代数では部分的に解決されている。有限 W 代数 $\mathcal{W}^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g},f)$ は W 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)$ の Zhu 代数と呼ばれる物になっており、$f=0$ とすると有限 W 代数 $\mathcal{W}^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g},0)$ は $\mathfrak{g}$ の普遍包絡代数と一致する。$f=0$ の場合、W 代数はアファインリー代数と一致するので、W 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)$ の有限版が有限 W 代数 $\mathcal{W}^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g},f)$ になっていると、この例を見ても言うことが可能である。

A 型有限 W 代数の生成元と定義関係式は、A 型有限型ヤンギアンを用いて与えられる。有限型ヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{g})$ は有限次元単純リー代数に付随して定まる量子群の一種であり、カレント代数 $\mathfrak{g}[u]=\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[u]$ の変形である。Brundan-Kleshechev [1] は A 型有限 W 代数を A 型シフト型ヤンギアンと呼ばれる結合代数の商代数として書き下した。A 型シフト型ヤンギアンは A 型有限型ヤンギアンの部分代数である。有限 W 代数の場合を参考にすると、W 代数の定義関係式を、A 型有限型ヤンギアンのアファイン版にあたる A 型アファインヤンギアンを用いて書き下すことが出来ることが期待される。最も簡単な関係性は Guay [2] により与えられた。Guay は $\widehat{\mathfrak{sl}}(n)$ に付随するアファインヤンギアンから $\widehat{\mathfrak{gl}}(n)$ の普遍包絡代数の standard degreewise completion への全射写像を構成した。冪零元 $f=0$ に付随する W 代数はアファインリー代数に一致するので、evaluation map はアファインヤンギアンと W 代数の最も簡単な関係性を与えていると言える。

The detailed version of this paper will be submitted for publication elsewhere.

もう一つの画期的な例はSchiffmann-VasserotMamoru-Ueda:No.3によりもたらされた。Schiffmann-VasserotMamoru-Ueda:No.3は$\widehat{\mathfrak{gl}}(1)$に付随するヤンギアンから$A$型主$W$代数の普遍包絡代数への全射写像を構成した。$\widehat{\mathfrak{gl}}(1)$に付随するヤンギアンは幾何学的に定義される物であり、A型主W代数は$\mathfrak{gl}(n)$とその主冪零元に付随するW代数である。さらに、Schiffmann-VasserotMamoru-Ueda:No.3は主W代数の幾何学的表現を、$\widehat{\mathfrak{gl}}(1)$に付随するヤンギアンの幾何学的表現を通じて入れることに成功した。これは物理学的にはAGT予想を解決したことにあたる。

より一般の場合は、Creutzig-Diaconescu-Maはシフト型アファインヤンギアンの幾何学的表現を通じて、A型iterated W代数の幾何学的表現を入れられる、と予想している。この写像が構成できるならばシフト型アファインヤンギアンからA型iterated W代数の全射写像が構成されるはずである。有限型の場合に、De Sole-Kac-ValeriはLax作用素を用いて、A型有限型ヤンギアンからA型有限W代数への写像を構成した。シフト型ヤンギアンはA型有限型ヤンギアンを部分代数として含み、 De Sole-Kac-Valeriの写像はBrundan-Kleshechevの写像のA型有限型ヤンギアンへの制限となっている。このためDe Sole-Kac-Valeriの写像のアファイン版を構成すれば、その写像をシフト型アファインヤンギアンに延長することでCreutzig-Diaconescu-Maの予想の写像が構成できるはずである。本講演ではこの写像の構成方法について解説を行う。

今、正の整数Nとその分割$N=q_1+q_2+\cdots+q_v, q_1\geq q_2\geq q_3\geq\cdots\geq q_v>0=q_{v+1}$を固定し、$f\in\mathfrak{gl}(N)$を$(1^{q_1-q_2},2^{q_2-q_3},\cdots,v^{q_v-q_{v+1}})$型の冪零元とする。このとき、下記の定理が示される。

Theorem 1. 今、$q_u-q_{u+1}\geq 3$とする。このとき、$\widehat{\mathfrak{sl}}(q_u-q_{u+1})$に付随するアファインヤンギアンのパラメータを適当に選ぶと、写像

$$\Phi\colon Y_{\varepsilon_1(k),\varepsilon_2(k)}(\widehat{\mathfrak{sl}}(q_u-q_{u+1}))\to\mathcal{U}(\mathcal{W}^k(\mathfrak{gl}(N),f)).$$

が構成される。特に、$q_1=q_2=\cdots=q_l$の場合 *(*この場合を長方形型と呼ぶ*)*、Φは全射写像となる。

2. ヤンギアン

この章ではヤンギアンについての性質の復習を行う。有限次元単純リー代数$\mathfrak{g}$に付随するヤンギアン$Y_\hbar(\mathfrak{g})$は量子可積分系の量子散乱系の問題に登場する量子ヤンバクスター方程式の解を与える道具として、Drinfeldにより導入された。ヤンギアン$Y_\hbar(\mathfrak{g})$はカレント代数の変形となる量子群である。カレントリー代数はベクトル空間としては$\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[u]$で、交換子は$[x\otimes u^t,y\otimes u^s]=[x,y]\otimes u^{t+s}$で定義されるリー代数である。

ヤンギアンの定義を与えるには、カレント代数$\mathfrak{g}[u]$の普遍包絡代数の表示を与える必要がある。今、$\{H_i,X_i^{\pm}\}_{i\in I}$を$\mathfrak{g}$のChevalley生成元、$(\ ,\ )$を$\mathfrak{g}$の標準形式とする。このとき、$\mathfrak{g}$の新しい生成元を

$$h_i=\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{2}H_i, x_i^+=\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{2}X_i^+, x_i^-=X_i^-$$

と定める。このとき、$\{h_i\otimes u^r,x_i^{\pm}\otimes u^r\}$はカレント代数$\mathfrak{g}[u]$の生成元となり、これを生成元とする$\mathfrak{g}[u]$の表示方法が以下のように与えられる。

Proposition 2. カレント代数$\mathfrak{g}[u]$の普遍包絡代数は$\{x_{i,s}^{\pm},h_{i,s}\mid i\in I,s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$を生成元とし、以下の定義関係式を持つ$\mathbb{C}$上の結合代数と同型となる*:*

$$[h_{i,s}, h_{j,r}] = 0, \tag{2.1}$$

$$[h_{i,0}, x^{\pm}_{j,s}] = \pm(\alpha_i, \alpha_j) x^{\pm}_{j,s}, \tag{2.2}$$

$$[x^{+}_{i,r}, x^{-}_{j,s}] = \delta_{ij} h_{i,r+s}, \tag{2.3}$$

$$\sum_{\sigma \in S_{1-a_{i,j}}} [x^{\pm}_{i,r_{\sigma(1)}}, \cdots, [x^{\pm}_{i,r_{\sigma(1-a_{ij})}}, x^{\pm}_{j,s}]] = 0 \ \textit{if } i \neq j, \tag{2.4}$$

$$[h_{i,r+1}, x^{\pm}_{j,s}] - [h_{i,r}, x^{\pm}_{j,s+1}] = \pm\frac{h(\alpha_i, \alpha_j)}{2}(h_{i,r} x^{\pm}_{j,s} + x^{\pm}_{j,s} h_{i,r}), \tag{2.5}$$

$$[x^{\pm}_{i,r+1}, x^{\pm}_{j,s}] - [x^{\pm}_{i,r}, x^{\pm}_{j,s+1}] = \pm\frac{h(\alpha_i, \alpha_j)}{2}(x^{\pm}_{i,r} x^{\pm}_{j,s} + x^{\pm}_{j,s} x^{\pm}_{i,r}). \tag{2.6}$$

なお、S_l は l 次対称群であり、$h_{i,r}, x^{\pm}_{i,r}$ はそれぞれ $h_i \otimes u^r, x^{\pm}_i \otimes u^r$ に対応する。

最初の四つの関係式は $\mathfrak{g}$ から自然に導き出される定義関係式、後の二つは $\mathbb{C}[u]$ から自然に導き出される定義関係式である。

ヤンギアンを定義するには、Proposition 2 の定義関係式を変形させれば良く、以下のように定義を与えることが出来る。

Definition 3. ヤンギアン $Y_h(\mathfrak{g})$ は $\{x^{\pm}_{i,s}, h_{i,s} \mid i \in I, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ を生成元とし、以下の定義関係式を持つ $\mathbb{C}$ 上の結合代数である:

$$[h_{i,s}, h_{j,r}] = 0, \tag{2.7}$$

$$[h_{i,0}, x^{\pm}_{j,s}] = \pm(\alpha_i, \alpha_j) x^{\pm}_{j,s}, \tag{2.8}$$

$$[x^{+}_{i,r}, x^{-}_{j,s}] = \delta_{ij} h_{i,r+s}, \tag{2.9}$$

$$\sum_{\sigma \in S_{1-a_{i,j}}} [x^{\pm}_{i,r_{\sigma(1)}}, \cdots, [x^{\pm}_{i,r_{\sigma(1-a_{ij})}}, x^{\pm}_{j,s}]] = 0 \text{ if } i \neq j, \tag{2.10}$$

$$[h_{i,r+1}, x^{\pm}_{j,s}] - [h_{i,r}, x^{\pm}_{j,s+1}] = \pm\frac{h(\alpha_i, \alpha_j)}{2}(h_{i,r} x^{\pm}_{j,s} + x^{\pm}_{j,s} h_{i,r}), \tag{2.11}$$

$$[x^{\pm}_{i,r+1}, x^{\pm}_{j,s}] - [x^{\pm}_{i,r}, x^{\pm}_{j,s+1}] = \pm\frac{h(\alpha_i, \alpha_j)}{2}(x^{\pm}_{i,r} x^{\pm}_{j,s} + x^{\pm}_{j,s} x^{\pm}_{i,r}). \tag{2.12}$$

有限型ヤンギアン $Y_h(\mathfrak{g})$ に対して、次の性質が知られている。

(1) $\hbar = 0$ とすると、明らかに $Y_h(\mathfrak{g})$ の定義関係式は $U(\mathfrak{g}[u])$ の定義関係式に一致する。このため、$Y_0(\mathfrak{g})$ と $U(\mathfrak{g}[u])$ は一致する。
(2) 有限型ヤンギアン $Y_h(\mathfrak{g})$ はホップ代数の構造を持つ。
(3) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ の時、$Y_h(\mathfrak{sl}(n))$ には evaluation map と呼ばれる写像が構成されている:

$$\mathrm{ev}^a_{\hbar,\varepsilon} \colon Y_h(\mathfrak{sl}(n)) \to U(\mathfrak{sl}(n)) \text{ for } a \in \mathbb{C}.$$

$h = 0$ の時、$Y_h(\mathfrak{sl}(n))$ はカレント代数の普遍包絡代数と一致するが、evaluation map は $U(\mathfrak{sl}(n)[u]) \to U(\mathfrak{sl}(n)), xu^r \mapsto xa^r$ という写像になっている。
(4) 有限型ヤンギアン $Y_h(\mathfrak{sl}(n))$ は DAHA との間に Schur-Weyl 双対性が存在する。

Definition 4. パラメータ $\kappa \in \mathbb{C}$ に対して、DAHA$H_\kappa^{\deg}(S_l)$ は l 次対称群 S_l と $\{\mathsf{y}_k | 1 \leq k \leq l\}$ を生成元として、以下の定義関係式を持つ:

$$\sigma \mathsf{y}_i = \mathsf{y}_{\sigma(i)}\sigma,\ [\mathsf{y}_i, \mathsf{y}_j] = -\kappa(\mathsf{y}_i - \mathsf{y}_j)\sigma_{i,j} \text{ for } \sigma \in S_l.$$

なお、$\sigma_{i,j}$ は i と j の置換である。

Remark 5. Definition 3で定義されたヤンギアンよりよく見るヤンギアンとして、$\mathfrak{gl}(n)$ に付随するヤンギアンがある。$\mathfrak{gl}(n)$ に付随するヤンギアン $Y(\mathfrak{gl}(n))$ は、$\mathfrak{gl}(n)$ が単純では無いので、定義3で定義することは出来ないが、以下のように定義され、カレントリー代数 $\mathfrak{gl}(n)[u]$ の変形となっている。

Definition 6. ヤンギアン $Y(\mathfrak{gl}(n))$ は $\{T_{i,j}^{(r)} \mid r \geq 0, 1 \leq i,j \leq n\}$ の生成元と以下の定義関係式を持つ $\mathbb{C}$ 上の結合代数である:

$$T_{i,j}^{(0)} = \delta_{i,j},\ (u-v)[T_{i,j}(u), T_{p,q}(v)] = T_{p,j}(u)T_{i,q}(v) - T_{p,j}(v)T_{i,q}(u).$$

なお、$T_{i,j}(u) = \sum_{r\geq 0} T_{i,j}^{(r)}u^{-r}$ である。

$\mathfrak{gl}(n)$ は $\mathfrak{sl}(n)$ と $\mathfrak{gl}(n)$ の中心に分解されるが、ヤンギアン $Y(\mathfrak{gl}(n))$ も同様に

$$Y(\mathfrak{gl}(n)) \simeq Y_\hbar(\mathfrak{sl}(n)) \otimes Y(\mathfrak{gl}(n)) \text{ の中心 for } \hbar \neq 0.$$

と分解されることが知られている。

DAHA を拡大した物で、DDAHA と呼ばれる物がある。DDAHA $\mathbb{H}_{t,c}(S_\ell)$ はパラメータ $t, c \in \mathbb{C}$ に付随する結合代数で、l 次対称群 S_ℓ と元 $x_1^\pm, \dots, x_\ell^\pm, y_1, \dots, y_\ell$ で生成され、以下の定義関係式を持つ:

$$[x_i^\pm, x_j^{[\pm]}] = 0,\ [y_i, y_j] = 0,\ \sigma x_i \sigma^{-1} = x_{\sigma(i)},\ \sigma y_j \sigma^{-1} = y_{\sigma(j)},$$
$$[y_j, x_i] = -c\sigma_{i,j} \text{ if } i \neq j,$$
$$[y_i, x_i] = t + c\sum_{k\neq i}\sigma_{ki}.$$

DDAHA は DAHA とアファインワイル群を部分代数として、それら二つの部分代数により生成される。DAHA は有限型ヤンギアン $Y_h(\mathfrak{sl}(n))$ と、アファインワイル群は $\widehat{\mathfrak{sl}}(n)$ とそれぞれSchur-Weyl双対性を持つ。従って、DDAHA とSchur-Weyl双対性を持つ代数はこれら二つの代数により生成されなければならない。この代数こそが Guay [2] で定義された2パラメータのアファインヤンギアンである。

Definition 7. 二つのパラメータ $\hbar, \varepsilon \in \mathbb{C}$ に付随するアファインヤンギアン $Y_{\hbar,\varepsilon}(\widehat{\mathfrak{sl}}(n))$ は $\{X_{i,s}^\pm, H_{i,s} \mid 0 \leq i \leq n-1, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ の生成元を持ち、定義関係式として (2.7)-(2.10) for $1 \leq i,j \leq n-1$ と (2.11), (2.12) for $(i,j) \neq (0,n-1),(n-1,0)$、さらに

$$[H_{0,r+1}, X_{n-1,s}^\pm] - [H_{0,r}, X_{n-1,s+1}^\pm] = \mp\frac{\hbar}{2}\{H_{0,r}^\pm, X_{n-1,s}^\pm\} + (\varepsilon + \frac{n}{2}\hbar)[H_{0,r}^\pm, X_{n-1,s}^\pm],$$
$$[H_{n-1,r+1}, X_{0,s}^\pm] - [H_{n-1,r}, X_{0,s+1}^\pm] = \mp\frac{\hbar}{2}\{H_{n-1,r}^\pm, X_{0,s}^\pm\} - (\varepsilon + \frac{n}{2}\hbar)[H_{n-1,r}^\pm, X_{0,s}^\pm],$$
$$[X_{0,r+1}^\pm, X_{n-1,s}^\pm] - [X_{0,r}^\pm, X_{n-1,s+1}^\pm] = \mp\frac{\hbar}{2}\{X_{0,r}^\pm, X_{n-1,s}^\pm\} + (\varepsilon + \frac{n}{2}\hbar)[X_{0,r}^\pm, X_{n-1,s}^\pm].$$

を持つ結合代数である。

この定義は$\varepsilon + \dfrac{n}{2}\hbar = 0$の場合に、1パラメータのヤンギアンの定義と一致するため、1パラメータの場合の自然な拡張であると考えることが出来る。

アファインヤンギアン$Y_{\hbar,\varepsilon}(\widehat{\mathfrak{sl}}(n))$はそれ以外にも以下の特徴を持つ。

(1) $Y_{\hbar,\varepsilon}(\widehat{\mathfrak{sl}}(n))$は部分代数として$\mathfrak{sl}(n)$に付随するヤンギアンと$\widehat{\mathfrak{sl}}(n)$を部分代数として持っていることがある。Guay [2] はこの性質を利用して、アファインヤンギアンと DDAHA の表現の間の Schur-Weyl 双対性を示した。

(2) パラメータ$\hbar = \varepsilon = 0$とすると、$Y_{\hbar,\varepsilon}(\widehat{\mathfrak{sl}}(n))$は$\mathfrak{sl}(n)[u^{pm1}, v]$の普遍中心拡大の普遍包絡代数と一致する。

(3) Guay-Nakajima-Wendlandt [4] により、アファインヤンギアン$Y_{\hbar,\varepsilon}(\widehat{\mathfrak{sl}}(n))$は余積と呼ばれる写像が構成されている:

$$\Delta\colon Y_{\hbar,\varepsilon}(\widehat{\mathfrak{sl}}(n)) \to Y_{\hbar,\varepsilon}(\widehat{\mathfrak{sl}}(n))\widehat{\otimes} Y_{\hbar,\varepsilon}(\widehat{\mathfrak{sl}}(n)),$$

なお、$Y_{\hbar,\varepsilon}(\widehat{\mathfrak{sl}}(n))\widehat{\otimes} Y_{\hbar,\varepsilon}(\widehat{\mathfrak{sl}}(n))$は$\bigotimes^2 Y_{\hbar,\varepsilon}(\widehat{\mathfrak{sl}}(n))$の完備化である。

(4) Guay[2] によりアファインヤンギアン$Y_{\hbar,\varepsilon}(\widehat{\mathfrak{sl}}(n))$には evaluation map と呼ばれる写像が構成された:

$$\mathrm{ev}^a_{\hbar,\varepsilon}\colon Y_{\hbar,\varepsilon}(\hat{\mathfrak{sl}}(n)) \to \text{the completion of } \mathcal{U}(\hat{\mathfrak{gl}}(n)) \text{ for } a \in \mathbb{C}.$$

なお、$\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{gl}}(n))$は$U(\hat{\mathfrak{gl}}(n))$の完備化である。この evaluation map は$\mathfrak{sl}(n)[u^{pm1}, v]$の普遍包絡代数としての写像としては、$v$に$a$を代入した写像とみることが出来る。

(5) 私は [5] と [6] において、アファインヤンギアンに edge contraction と呼ばれる以下の二つの種類の写像を構成した:

$$\Psi_1^{m,m+n}\colon Y_{\hbar,\varepsilon}(\widehat{\mathfrak{sl}}(m)) \to \widetilde{Y}_{\hbar,\varepsilon}(\widehat{\mathfrak{sl}}(m+n)),$$
$$\Psi_2^{n,m+n}\colon Y_{\hbar,\varepsilon+m\hbar}(\widehat{\mathfrak{sl}}(n)) \to \widetilde{Y}_{\hbar,\varepsilon}(\widehat{\mathfrak{sl}}(m+n)).$$

なお、$\widetilde{Y}_{\hbar,\varepsilon}(\widehat{\mathfrak{sl}}(n))$は$Y_{\hbar,\varepsilon}(\widehat{\mathfrak{sl}}(n))$の完備化である。

edge contraction $\Psi_1^{m,m+n}$は埋め込み写像$U(\mathfrak{gl}(m)) \to U(\mathfrak{gl}(m+n)),\ E_{i.j} \mapsto E_{i,j}$に対応し、$\Psi_2^{n,m+n}$は埋め込み写像$U(\mathfrak{gl}(n)) \to U(\mathfrak{gl}(m+n)),\ E_{i.j} \mapsto E_{i+m,j+m}$に対応している。

リー代数の場合と同様に、edge contraction $\Psi_1^{m,m+n}$と$\Psi_2^{m,m+n}$の像はお互いに可換になる。

この三種類の写像が De Sole-Kac-Valeri の写像のアファイン版を構成するには必要である。

3. A型W代数

この章ではW代数についての復習を行う。W代数は頂点代数の一種である。頂点代数は、状態空間と呼ばれるベクトル空間V、真空ベクトルと呼ばれる$|0\rangle \in V$、遷移写像と呼ばれる$\partial \in \mathrm{End}(V)$、場と呼ばれる$V$の各点$v$に対して定まる$Y(u,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_{(n)} z^{-n-1} \in \mathrm{End}(V)[[z^{\pm 1}]]$のデータの組で、結合公式や commutator formula などのいくつかの条件を満たすものである。頂点代数はベクトル空間であり、結合代数では無いので、頂点代数Vの定義関係式の情報を持つ結合代数を導入する必要がある。これが頂点代数の普遍包絡代数である。

Definition 8. 頂点代数Vに対して、以下のリー代数を定義する。ベクトル空間としては、$L(V) = V \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}]/\mathrm{Im}(\partial \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \frac{d}{dt})$を取ってくる。これは$v \otimes t^n$は頂点代数

において、$v_{(n)}$ に対応する。また、$\partial \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \frac{d}{dt}$ の関係式は、頂点代数の定義の関係式 $[\partial, Y(u,z)]v = -\dfrac{d}{dz}Y(u,z)v$ から出て来る物である。このヘクトル空間に交換関係式として、

$$\forall u, v \in V, \forall a, b \in \mathbb{Z}, [ut^a, vt^b] = \sum_{r \geq 0} \binom{a}{r} (u_{(r)}v)t^{a+b-r}$$

を入れる。交換関係式は頂点代数の commutator formula と呼ばれるものから出てくる。

$\mathcal{U}(V)$ を、$L(V)$ の普遍包絡代数 $U(L(V))$ の完備化を以下の二つの関係式で生成されるイデアルの完備化で割ったもの、と定義する:

$$(u_{(a)}v)t^b - \sum_{i \geq 0} \binom{a}{i} (-1)^i (ut^{a-i}vt^{b+i} - (-1)^{p(u)p(v)}(-1)^a vt^{a+b-i}ut^i),$$
$$|0\rangle t^{-1} - 1.$$

前者は頂点代数の結合公式から出てくる関係式であり、後者は頂点代数の定義 $Y(|0\rangle, z) = \mathrm{id}$) から現れる関係式である。

このように定義された $\mathcal{U}(V)$ を V の普遍包絡代数と呼び、確かに頂点代数の定義関係式の情報を含む結合代数となっていることが分かる。

Example 9. 有限次元簡約リー代数 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}$ の上の内積 κ に対して、普遍アファイン頂点代数 $V^\kappa(\mathfrak{g})$ を以下のように定義する。

$$V^\kappa(\mathfrak{g}) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}c)} \mathbb{C} \cong U(\mathfrak{g}[t^{-1}]t^{-1}),$$
$$0\rangle = 1, [\partial, at^n] = -nat^{n-1},$$
$$Y(at^{-1}, z) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} (at^{-s})z^s.$$

このとき、$V^\kappa(\mathfrak{g})$ の普遍包絡代数は $\widehat{\mathfrak{g}}$ の普遍包絡代数の完備化と一致する。

W 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は複素数 k、有限次元簡約リー代数 $\mathfrak{g}$、その冪零元 f のデータから、量子 Drinfeld-Sokolov reduction を用いて定義される頂点代数である。これ以後、$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(N)$ の場合に限定して、話を進める。今、N の分割を

$$N = q_1 + q_2 + \cdots + q_v,\ q_1 \geq q_2 \geq q_3 \geq \cdots \geq q_v > 0 = q_{v+1}$$

と固定し、f を $(1^{q_1-q_2}, 2^{q_2-q_3}, \cdots, v^{q_v-q_{v+1}})$ 型のジョルダン標準形を持つ $\mathfrak{gl}(N)$ の冪零元とする。例えば、$v = 1$ の場合、冪零元 f は 0 となり、普遍アファイン頂点代数 $V^\kappa(\mathfrak{g})$ と一致する。

一般の場合に対しても、W 代数との普遍アファイン頂点代数との関連付けをすることが Miura 写像でされる。Miura 写像は

$$\mu \colon \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) \to \otimes_{i=1}^l V^{\kappa_i}(\mathfrak{gl}(q_i)),$$

と言う単射写像である。(なお、κ_i は $\mathfrak{gl}(q_i)$ 上の適当な内積である。) この両辺の普遍包絡代数を取ると、単射写像

$$\widetilde{\mu} \colon \mathcal{U}(\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)) \to U(\widehat{\mathfrak{gl}}(q_1)) \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} U(\widehat{\mathfrak{gl}}(q_l)),$$

が構成される。なお、$U(\widehat{\mathfrak{gl}}(q_1)) \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} U(\widehat{\mathfrak{gl}}(q_l))$ は $\otimes_{i=1}^l U(\widehat{\mathfrak{gl}}(q_i))$ の完備化である。

ここまで、本講演の主結果を証明する用意が出来た。

Theorem 10 (U. [7])**.** $q_u - q_{u+1} \geq 3$ と $\varepsilon = \hbar(k+N-q_u)$ を仮定する。すると、写像

$$\Phi_u\colon Y_{\hbar,\varepsilon}(\widehat{\mathfrak{sl}}(q_u - q_{u+1})) \to \mathcal{U}(W^k(\mathfrak{gl}(N), f)).$$

が構成される。さらに、$u \neq z$ とすると、 Φ_u の像と Φ_v の像は可換になる。

証明の概略. 写像 Δ^u は以下のように構成される。

$$\Delta^u = (\prod_{i=1}^{u-1}((\Psi_2^{q_{i+1},q_i} \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta) \otimes \mathrm{id}^{\otimes u-i-1}) \circ \Psi_1^{q_u - q_{u+1},q_u}.$$

また、edge contraction $\Psi_1^{m,m+n}$ と $\Psi_2^{m,m+n}$ の可換性から、Φ_u の像と Φ_v の像が可換であることも証明される。 □

この写像は De Sole-Kac-Valeri の写像との可換性も示されており、AGT 予想の一般化に繋がると期待されている。

References

[1] J. Brundan and A. Kleshchev. Shifted Yangians and finite W-algebras. *Adv. Math.*, 200(1):136–195, 2006.

[2] N. Guay. Affine Yangians and deformed double current algebras in type A. *Adv. Math.*, 211(2):436–484, 2007.

[3] O. Schiffmann and E. Vasserot. Cherednik algebras, W-algebras and the equivariant cohomology of the moduli space of instantons on $\mathbf{A}^2$. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 118:213–342, 2013.

[4] N. Guay, H. Nakajima, and C. Wendlandt. Coproduct for Yangians of affine Kac-Moody algebras. *Adv. Math.*, 338:865–911, 2018.

[5] M. Ueda. A homomorphism from the affine Yangian $Y_{\hbar,\varepsilon}(\widehat{\mathfrak{sl}}(n))$ to the affine Yangian associated with $Y_{\hbar,\varepsilon}(\widehat{\mathfrak{sl}}(n+1))$. *Lett. Math. Phys.,* 114, 133(2024).

[6] M. Ueda. Two homomorphisms from the affine Yangian associated with $\widehat{\mathfrak{sl}}(n)$ to the affine Yangian associated with $\widehat{\mathfrak{sl}}(n)$. to appear in *J. Math. Phys.* (arXiv:2312.09933)

[7] M. Ueda. Affine Yangians and some cosets of non-rectangular W-algebras. arXiv:2404.18064.

Graduate School of Mathematical Sciences
The University of Tokyo
3-8-1 Komaba Meguro-ku Tokyo 153-8914, Japan
Email address: `mueda@ms.u-tokyo.ac.jp`