

HIGHER REPRESENTATION INFINITE ALGEBRAS ARISING FROM GEOMETRY

RYU TOMONAGA

ABSTRACT. For $d \geq 1$, the class of d -representation infinite algebras, introduced by [3], is a natural generalization of non-Dynkin path algebras to the case where global dimension is d . They not only behave beautifully but also arise in many areas of mathematics including geometry. For example, if a d -dimensional smooth proper (stacky) variety has a d -tilting sheaf (that is, a tilting sheaf whose endomorphism algebra has global dimension d or less), then this endomorphism algebra automatically becomes d -representation infinite. In this report, we introduce two results on the connection between d -representation infinite algebras and geometry.

First, we classify all tilting bundles consisting of line bundles on smooth toric Fano stacks of Picard number one. Moreover, we show that they are all d -tilting and their endomorphism algebras become d -representation infinite algebras of type \tilde{A} , which is a generalization of path algebras of type \tilde{A} introduced by [3]. Conversely, we show that all d -representation infinite algebras of type \tilde{A} can be obtained in this way. Thus such toric stacks can be viewed as geometric models of d -representation infinite algebras of type \tilde{A} . This geometric model gives a new combinatorial description to the d -preprojective/preinjective components and d -APR tilting mutations of these algebras even when $d = 1$.

Second, we show that over algebraically closed fields, a smooth projective surface has a 2-tilting bundle if and only if it is a weak del Pezzo surface. This gives many new examples of 2-representation infinite algebras and a partial answer to the conjecture: a smooth projective surface has a tilting bundle if and only if it is rational. As an application, we see that singular del Pezzo cones have non-commutative crepant resolutions, which is a generalization of [7].

以下、 k を体とする。代数、圏及びスキームは、すべて k 上定義されているものとする。大域次元有限の有限次元代数 A に対し、 $\nu := - \otimes_A^{\mathbb{L}} DA \curvearrowright \text{per } A$ を Serre 関手とする。整数 d に対し、 $\nu_d := \nu \circ [-d] \curvearrowright \text{per } A$ とする。

1. HIGHER REPRESENTATION INFINITE ALGEBRAS

高次無限表現型代数は、non-Dynkin な道代数の一般化として、[3] により導入された。

Definition 1. $d \geq 1$ を整数とする。有限次元代数 A が d -無限表現型代数であるとは、次の 2 条件を満たすことをいう。

- (1) $\text{gl.dim } A = d$
- (2) 任意の整数 $n \geq 0$ に対し、 $\nu_d^{-n} A \in \text{mod } A \subseteq \text{per } A$.

Example 2. 連結な有限次元代数 A が 1-無限表現型であることは、 A が遺伝的かつ直既約 A 加群の同型類が無限個あることと同値である。

The detailed version of this paper will be submitted for publication elsewhere.

d -無限表現型代数は、non-Dynkin な道代数の性質の様々な類似が成り立つ。詳しくは [3] を参照。

$d \geq 2$ のとき、一般に、 d -無限表現型の代数を構成するのは難しい。[3] では、射影空間上の層コホモロジーの性質を利用して、 d -無限表現型の代数の具体例を与えている。

Example 3. [3] $X = \mathbb{P}^d$ とし、 $\mathcal{E} := \bigoplus_{i=0}^d \mathcal{O}_X(i)$ とおく。Beilinson により、 \mathcal{E} は $\mathcal{D}^b(\text{Coh } X)$ の傾対象であることが示されている。このとき、その自己準同型環 $\text{End}_X(\mathcal{E})$ は d -無限表現型である。

この例を一般化する形で、[1] では、 d -無限表現型代数が d 次元の射影多様体から自然に得られることが示された。その主張を述べるために、 d -傾対象の概念を導入する。

Definition 4. \mathcal{T} を三角圏とし、 $d \geq 1$ を整数とする。傾対象 $T \in \mathcal{T}$ が d -傾対象であるとは、 $\text{gl.dim End}_{\mathcal{T}}(T) \leq d$ であることをいう。

Theorem 5. [1] \mathcal{A} を Hom-有限なアーベル圏とし、 $T \in \mathcal{A}$ が $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ の d -傾対象を与えるとする。ここで、自己同値関手 $F \curvearrowright \mathcal{A}$ であって、 $F \circ [d] \curvearrowright \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ が Serre 関手を与えるものが存在したと仮定する。このとき、 $\text{End}_{\mathcal{A}}(T)$ は d -無限表現型代数である。

例えば、 X を d 次元で滑らかな射影多様体としたとき、 $\mathcal{A} = \text{Coh } X$ に対しこの定理を適用できる。この報告集では、 d -傾束 (= 導来圏における d -傾対象であるようなベクトル束) を持つような d 次元で滑らかな (stacky な) 射影多様体に関する結果を 2 つ紹介する。

2. RESULT 1: WEAK DEL PEZZO SURFACES AND 2-TILTING BUNDLES

この節では、 k は代数閉体とする。 d 次元で滑らかな射影多様体 X がいつ d -傾対象を持つのかについて、小さい d に対して考察する。

まず $d = 1$ のとき、 X が 1-傾対象を持つことは $X \cong \mathbb{P}^1$ と同値である。 \mathbb{P}^1 が 1-傾対象を持つことは先ほど見た。逆に滑らかな射影曲線 X が準傾対象を持つとすると、 X の K 群は有限生成 abel 群となる。よって X の genus は 0 でなければならない。

次に $d = 2$ のときを考える。まず、傾束について考える。[4] により、 X が滑らかな有理射影曲面ならば、 X は傾束を持つことが示されている。逆に、傾束を持つような滑らかな射影曲面は、有理的なものに限られると予想されている。次に、2-傾束について考える。[7] により、 X が del Pezzo 曲面ならば 2-傾束を持つことが示されている。また、弱 del Pezzo 曲面であって 2-傾束を持つ例もいくつか知られていた。[2] では、滑らかな射影曲面が 2-傾束を持つことと、 X が弱 del Pezzo 曲面であることが同値だと予想されていた。本研究では、この予想が正しいことを証明した。

Theorem 6. [5] 滑らかな射影曲面 X に対し、次は同値である。

- (1) X は 2-傾束を持つ。
- (2) X は弱 del Pezzo 曲面である。

この定理は、次の 2 つの意味を持つ。まず、弱 del Pezzo 曲面から 2-無限表現型の代数の具体例が得られる。次に、上で述べた予想 (傾束を持つような滑らかな射影曲面は、有理的なものに限られる) に対し部分的な解決を与えている。

最後に、この定理の応用を述べる。 X を del Pezzo 曲面としたとき、その斉次座標環 (= del Pezzo cone) $\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \omega_X^{-n})$ の非可換クレパント特異点解消 (NCCR) が、 X 上の 2-傾束を用いて構成できる ([7])。本研究では、その一般化として、Du Val del Pezzo cone に対し NCCR を構成した。

Theorem 7. [5] X を Du Val del Pezzo 曲面, すなわち高々 Du Val 特異点しか持たない射影曲面であって ω_X^{-1} が豊富であるものとする. このとき, その斉次座標環 (=Du Val del Pezzo cone) $\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \omega_X^{-n})$ は NCCR を持つ.

この NCCR の構成法を紹介する. $\tilde{X} \rightarrow X$ を最小特異点解消とすると, \tilde{X} は弱 del Pezzo 曲面である. その 2-傾束の自己準同型環として得られる 2-無限表現型代数の 3-Calabi-Yau 完備化が, X の斉次座標環の NCCR となる.

3. RESULT 2: SMOOTH TORIC FANO STACKS OF PICARD NUMBER ONE

G を, 階数が 1 の有限生成 abel 群とする. $d \geq 1$ とし, $d+1$ 個の元 $\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_d \in G$ が次の条件 (G1),(G2),(G3) を満たすとする.

(G1) 任意の $0 \leq i \leq d$ に対し, $\vec{x}_i \neq 0$.

(G2) $G = \sum_{i=0}^d \mathbb{Z}\vec{x}_i$

(G3) $G_{\geq 0} := \sum_{i=0}^d \mathbb{Z}_{\geq 0}\vec{x}_i \subseteq G$ としたとき, $G_{\geq 0} \cap (-G_{\geq 0}) = 0$ が成り立つ.

このとき, G には次の自然な前順序が入る.

$$\vec{g} \geq \vec{h} : \Leftrightarrow \vec{g} - \vec{h} \in G_{\geq 0}$$

この前順序を用いて, 上に閉じた集合を定義する.

Definition 8. $I \subseteq G$ を部分集合とする.

(1) $I \subseteq G$ が上に閉じているとは, $I + G_{\geq 0} \subseteq I$ が成り立つことをいう.

(2) $I \subseteq G$ が非自明であるとは, $I \neq, G$ であることをいう.

また, $\vec{p} := \sum_{i=0}^d \vec{x}_i \in G$ とおく.

Example 9. $G = \mathbb{Z}, \vec{x}_0 = \dots = \vec{x}_d = 1$ とする. これは (G1),(G2),(G3) を全て満たし, $G = \mathbb{Z}$ の前順序は通常的大小関係による順序と一致する. このとき, $I \subseteq G$ が非自明な上に閉じた部分集合であることは, $I = \mathbb{Z}_{\geq n}$ なる $n \in \mathbb{Z}$ の存在と同値である. また, $\vec{p} = d+1$ である.

$S := k[x_0, \dots, x_d]$ を多項式環とすると, $\deg x_i := \vec{x}_i \in G$ と定義することにより, S は自然に G 次数付き k 代数と思える. 商 stack $\mathcal{X} := [(\mathbb{A}^n \setminus \{0\}) / \text{Spec } kG]$ として得られるような stack のことを, Picard 数 1 の smooth toric Fano stack という. このとき, 次の自然な圏同値がある.

$$\text{Coh } \mathcal{X} \simeq \text{mod}^G S / \text{fl}^G S$$

$\vec{g} \in G$ に対し, $S(\vec{g}) \in \text{mod}^G S$ の $\text{Coh } \mathcal{X}$ での像を $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\vec{g})$ と書く. これは \mathcal{X} 上の直線束を与えるが, 逆に任意の直線束はこの形の直線束に同型である. より強く, 次の群同型がある.

$$G \xrightarrow{\cong} \text{Pic } \mathcal{X}; \vec{g} \mapsto [\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\vec{g})]$$

これが Picard 数 1 の意味である. 本研究では, \mathcal{X} 上の直線束からなるような傾束の分類を与えた.

Theorem 10. [6] 次の 2 つの集合の間には全単射が存在する.

(1) $\{T \in \text{add}\{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\vec{g}) \mid \vec{g} \in G\} : \text{傾束}\} / \sim_{\text{add}}$

(2) $\{I \subseteq G : \text{非自明な上に閉じた部分集合}\}$

対応 (2) \rightarrow (1) は, $I \mapsto T(I) := \bigoplus_{\vec{g} \in I \cap (I + \vec{p})} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\vec{g})$ により与えられる.

次に、その自己準同型環 $\text{End}_X(T(I))$ について考察する。実は $T(I)$ は d -傾束になり、この自己準同型環は \tilde{A} 型の d -無限表現型代数となる。ここで \tilde{A} 型の d -無限表現型代数とは、[3] で与えられた d -無限表現型代数であり、 \tilde{A} 型の道代数の高次元への一般化である。更に、その逆も成り立つ。

Theorem 11. [6] 非自明な上に閉じた部分集合 $I \subseteq G$ に対し、 $\text{End}_X(T(I))$ は \tilde{A} 型の d -無限表現型代数となる。逆に、任意の \tilde{A} 型の d -無限表現型代数は、このようにして得られる。

この定理より、Picard 数 1 の smooth toric Fano stack を、 \tilde{A} 型の d -無限表現型代数の geometric model とみなせる。この geometric model は、 \tilde{A} 型の d -無限表現型代数の表現論に新たな視点を与える。例えば、一般には難しい d -APR tilt の計算が、geometric model を用いることで簡単に行える。

また、(講演では触れられなかったが、)[6] では、 $\tilde{A}\tilde{A}$ 型の d -無限表現型代数を導入し、Picard 数 2 の smooth toric Fano stack がその geometric model を与えることを示した。

REFERENCES

- [1] R. O. Buchweitz, L. Hille, *Endomorphism rings of geometric tilting objects*, in preparation.
- [2] D. Chan, *2-hereditary algebras and almost Fano weighted surfaces*, Journal of Algebra, 478, 92-132.
- [3] M. Herschend, O. Iyama, S. Oppermann, *n-Representation infinite algebras*, Advances in mathematics **252** (2014), 292–342.
- [4] L. Hille, M. Perling, *Tilting bundles on rational surfaces and quasi-hereditary algebras*, Annales de l’Institut Fourier. Vol. 64. No. 2. 2014.
- [5] R. Tomonaga, *Weak del Pezzo surfaces yield 2-hereditary algebras and 3-Calabi-Yau algebras*, arXiv:2510.26199.
- [6] R. Tomonaga, *Higher hereditary algebras and toric Fano stacks of Picard number one or two*, arXiv:2511.02641.
- [7] M. Van den Bergh, *Non-commutative crepant resolutions*, The Legacy of Niels Henrik Abel: The Abel Bicentennial, Oslo, 2002. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg (2004), 749–770.

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
 THE UNIVERSITY OF TOKYO
 3-8-1 KOMABA, MEGURO-KU, TOKYO, 153-8914 JAPAN
 Email address: ryu-tomonaga@g.ecc.u-tokyo.ac.jp