# CLASSIFYING KE-CLOSED SUBCATEGORIES OVER A COMMUTATIVE NOETHERIAN RING

SHUNYA SAITO AND TOSHINORI KOBAYASHI

Abstract. In this summary, we introduce the classification of KE-closed subcategories over a commutative noetherian ring. We will introduce a class of functions on the prime spectrum which are called *n-Bass functions* and establish the bijection between the KE-closed subcategories and 2-Bass functions under a mild condition.

## 1. 導入

環の表現論において、特定の操作で閉じる部分圏は古くから重要な役割を果たしている。典型的な例として、Serre 部分圏を用いたアーベル圏の商や、トーション類による圏の分解が挙げられる。こうした部分圏は、もとの圏の中で「よく振る舞う」対象のクラスを切り出しており、どのような部分圏が存在し、それらがどのようなパラメータによって記述されるかを明らかにすることは、環およびその表現の構造を理解するための重要な手がかりを与える。実際、可換ネーター環上の加群圏においては、Serre 部分圏やトーション類をはじめとするさまざまな種類の部分圏が素スペクトルによって記述できることが知られており、抽象的な部分圏のデータを幾何学的対象と対応づける理論が発展してきた。本稿では [5, 6] に基づき、可換ネーター環上の加群圏における KE 閉部分圏の分類について述べる。

第 2 節では，アーベル圏における様々な種類の部分圏を定義し、可換ネーター環上の加群圏におけるそれらの分類を紹介する。第 3 節では、本稿の主結果である KE 閉部分圏の分類について述べる。

本稿において，任意の部分圏は充満部分圏であり同型で閉じているとする．また本稿を通して $R$ を可換ネーター環とする。有限生成 (右) $R$ 加群の圏を $\mathsf{mod}\,R$ で表す。可換環 $R$ の素イデアルの集合を $\operatorname{Spec} R$ で表す。Krull 次元を $\dim R$ で表す。また $R$ 上の加群 $M$ に対して $\operatorname{Supp} M$ で $M$ の台 (support) を表し、$\operatorname{Ass} M$ で $M$ の素因子 (associated prime) の集合を表す。

## 2. 様々な種類の部分圏とその分類

この節ではアーベル圏における様々な種類の部分圏の定義を与え、可換ネーター環上の加群圏 $\mathsf{mod}\,R$ におけるそれらの分類に関するこれまでの研究を述べる。

アーベル圏においては、短完全列による拡大や、射の核、余核、像を取るなど様々な操作がある。まずはこれらの操作で閉じるような部分圏を導入する。

**Definition 1.** アーベル圏 $\mathcal{A}$ の加法部分圏 $\mathcal{X}$ を考える。

(1) $\mathcal{X}$ が**拡大で閉じる**とは、任意の $\mathcal{A}$ の短完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ に対して $A, C \in \mathcal{X}$ ならば $B \in \mathcal{X}$ となるときに言う。

The detailed version of this paper will be submitted for publication elsewhere.

(2) $\mathcal{X}$ が**部分対象で閉じる**とは、任意の $\mathcal{A}$ の短完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ に対して $B \in \mathcal{X}$ ならば $A \in \mathcal{X}$ となるときに言う。
(3) $\mathcal{X}$ が**商で閉じる**とは、任意の $\mathcal{A}$ の短完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ に対して $B \in \mathcal{X}$ ならば $C \in \mathcal{X}$ となるときに言う。
(4) $\mathcal{X}$ が**核で閉じる**とは、任意の $\mathcal{A}$ の射 $f\colon X \to Y$ に対して $X, Y \in \mathcal{X}$ ならば $\operatorname{Ker} f \in \mathcal{X}$ となるときに言う。
(5) $\mathcal{X}$ が**余核で閉じる**とは、任意の $\mathcal{A}$ の射 $f\colon X \to Y$ に対して $X, Y \in \mathcal{X}$ ならば $\operatorname{Cok} f \in \mathcal{X}$ となるときに言う。
(6) $\mathcal{X}$ が**像で閉じる**とは、任意の $\mathcal{A}$ の射 $f\colon X \to Y$ に対して $X, Y \in \mathcal{X}$ ならば $\operatorname{Im} f \in \mathcal{X}$ となるときに言う。

これらの性質を組み合わせることで様々なアーベル圏の部分圏を定義される。

**Definition 2.** アーベル圏 $\mathcal{A}$ の加法部分圏 $\mathcal{X}$ を考える。

(1) $\mathcal{X}$ が **Serre 部分圏**であるとは、拡大と部分対象、商で閉じるときに言う。
(2) $\mathcal{X}$ が**トーション・フリー類**であるとは、拡大と部分対象で閉じるときに言う。
(3) $\mathcal{X}$ が**トーション類**であるとは、拡大と商で閉じるときに言う。
(4) $\mathcal{X}$ が**ワイド部分圏**（あるいは **CKE 閉部分圏**）であるとは、余核と核，拡大で閉じるときに言う。
(5) $\mathcal{X}$ が **IKE 閉部分圏**であるとは、像と核，拡大で閉じるときに言う。
(6) $\mathcal{X}$ が **ICE 閉部分圏**であるとは、像と余核，拡大で閉じるときに言う。
(7) $\mathcal{X}$ が **IE 閉部分圏**であるとは、像と拡大で閉じるときに言う。
(8) $\mathcal{X}$ が **KE 閉部分圏**であるとは、核と拡大で閉じるときに言う。
(9) $\mathcal{X}$ が **CE 閉部分圏**であるとは、余核と拡大で閉じるときに言う。

これらの部分圏の関係は次のように図示できる：

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Serre} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{トーション・フリー類} \arrow[d, Rightarrow] & \text{ワイド} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \text{トーション類} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{IKE 閉} \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{ICE 閉} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{KE 閉} \arrow[dr, Rightarrow] & \text{IE 閉} \arrow[d, Rightarrow] & \text{CE 閉} \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & \text{拡大閉} & .
\end{tikzcd}
$$

可換ネーター環 $R$ 上の有限生成加群の圏 $\operatorname{mod} R$ に関しては、これらの部分圏の多くが分類されてきた。

**Theorem 3** ([3])**.** 以下の対応の間には全単射が存在する：

- $\operatorname{mod} R$ の *Serre* 部分圏の集合。

- $\operatorname{Spec} R$ の特殊化閉部分集合の集合。ここで部分集合 $Z \subseteq \operatorname{Spec} R$ が**特殊化閉**であるとは、任意の $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$ に対して $\mathfrak{p} \in Z$ かつ $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ ならば $\mathfrak{q} \in Z$ となるときに言う。

対応は次で与えられる：

$$\mathcal{X} \mapsto \operatorname{Supp} \mathcal{X} := \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \operatorname{Supp} X, \quad Z \mapsto \mathsf{mod}_Z R := \{M \in \mathsf{mod} R \mid \operatorname{Supp} M \subseteq Z\}.$$

つまり $\mathsf{mod}\, R$ の *Serre* 部分圏は $\operatorname{Spec} R$ の特殊化閉部分集合で分類される。

**Theorem 4** ([9])**.** 以下の集合の間には全単射が存在する：

- アーベル圏 $\mathsf{mod}\, R$ のトーション・フリー類の集合。
- $\operatorname{Spec} R$ のべき集合。

対応は次で与えられる：

$$\mathcal{X} \mapsto \operatorname{Ass} \mathcal{X} := \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \operatorname{Ass} X, \quad \Phi \mapsto \mathsf{mod}_\Phi^{\mathsf{ass}} R := \{M \in \mathsf{mod} R \mid \operatorname{Ass} M \subseteq \Phi\}.$$

つまり $\mathsf{mod}\, R$ のトーション・フリー類は $\operatorname{Spec} R$ の部分集合で分類される。

**Theorem 5** ([1, 7, 9])**.**

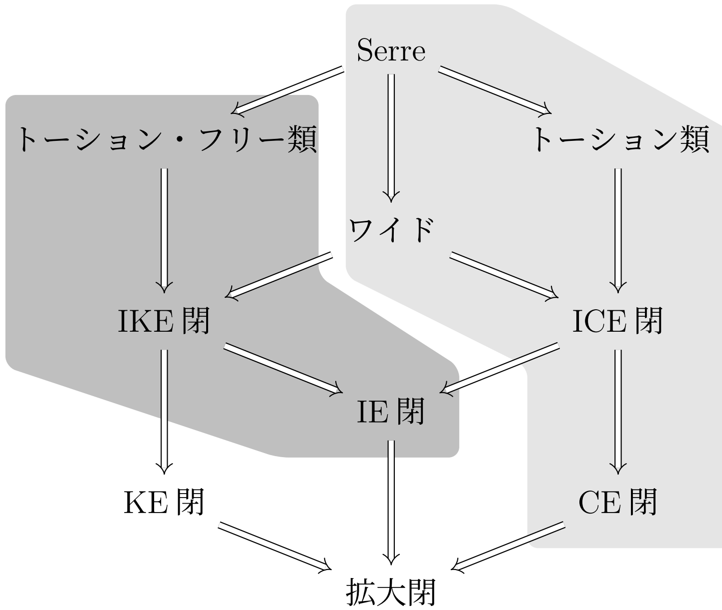
(1) $\mathsf{mod}\, R$ の加法部分圏 $\mathcal{X}$ に対して次は同値である：
- $\mathcal{X}$ は *Serre* 部分圏である。
- $\mathcal{X}$ はトーション類である。
- $\mathcal{X}$ はワイド部分圏である。
- $\mathcal{X}$ は *ICE* 閉部分圏である。
- $\mathcal{X}$ は *CE* 閉部分圏である。

つまり上記の部分圏は $\operatorname{Spec} R$ の特殊化閉部分集合で分類される。

(2) $\mathsf{mod}\, R$ の加法部分圏 $\mathcal{X}$ に対して次は同値である：
- $\mathcal{X}$ はトーション・フリー類である。
- $\mathcal{X}$ は *IKE* 閉部分圏である。
- $\mathcal{X}$ は *IE* 閉部分圏である。

つまり上記の部分圏は $\operatorname{Spec} R$ の部分集合で分類される。

つまり mod $R$ の部分圏のクラスは次のように分けられる：




上記の分類から自然に浮かび上がる問として「KE 閉部分圏もトーション・フリー類と一致するのか？」がある。次の節で見るようにこれには簡単な反例がある。次に自然な問として「いつ KE 閉部分圏とトーション・フリー類は一致するのか？」がある。これに答えるのが次の定理である。

**Theorem 6** ([5])**.** 次の条件を考える：

(1) *Krull* 次元が 1 以下である*:* $\dim R \leq 1$.

(2) 加群圏 mod $R$ においてトーション・フリー類と *KE* 閉部分圏は一致する。

このとき *(1)* ならば *(2)* がつねに成立する。さらに $R$ が *Cohen-Macaulay* 環の準同型像であれば *(2)* ならば *(1)* が成立する。

この定理における「Cohen-Macaulay 環の準同型像である」という条件は非常にゆるい仮定であり、体上の有限生成代数や完備局所環、双対複体を持つネーター環といったクラスの環はこの条件を満たす。この意味で、トーション・フリー類と KE 閉部分圏が一致することと $\dim R \leq 1$ はほとんど同値であり、上で述べた疑問のほぼ完全な答えを与えている。

以上が可換ネーター環上の加群圏 mod $R$ の部分圏の分類に関するこれまでの研究結果である。これらの部分圏の分類のネーター代数やスキームへの拡張に関しては、それぞれ [4] と [8] を見よ。次節では、一般の Krull 次元における KE 閉部分圏の完全な分類を紹介する。

## 3. KE 閉部分圏の分類

この節では KE 閉部分圏の分類について述べる。Serre 部分圏やトーションフリー類は $\operatorname{Spec} R$ の部分集合を用いて記述することができたが、KE 閉部分圏はより高次の情報を用いなければ記述することができない。そのためまず mod $R$ の部分圏と $\operatorname{Spec} R$ 上の関数の間にある対応を構成する。その後、Bass 関数と呼ばれる関数のクラスを導入し、この対応が KE 閉部分圏と 2-Bass 関数の間の一対一対応を導くことを紹介する。

KE 閉部分圏とは、核と拡大で閉じる加法部分圏のことであった。加群圏 $\mathsf{mod}\,R$ においては次のような自然な例がある。

**Example 7.** 体 $K$ 上の二変数形式的べき級数環 $R = K[[x,y]]$ を考える。このとき有限生成射影加群の圏 $\mathsf{proj}\,R$ は $\mathsf{mod}\,R$ の KE 閉部分圏である。実際、拡大で閉じることは射影性からすぐに分かる。有限生成射影加群の間の射 $f\colon P \to Q$ を考えるこのとき、次の完全列がある:

$$0 \to \mathrm{Ker}(f) \to P \xrightarrow{f} Q \to \mathrm{Cok}(f) \to 0$$

いま $R$ の大域次元は 2 なので、$\mathrm{Cok}(f)$ の射影次元は 2 以下である。これは $\mathrm{Ker}(f)$ が射影加群であることを意味する。よって $\mathsf{proj}\,R$ は KE 閉部分圏である。

一方で $\mathsf{proj}\,R$ は部分対象で閉じず、トーション・フリー類とはならない。実際、$R$ のイデアル $(x,y)$ を考えると $x \cdot y - y \cdot x = 0$ という非自明な関係が生成元にあるため、これは自由加群ではない。よって $R$ が局所環なことから、これは射影加群ではないことが分かる。

より一般に $\dim R = 2$ のとき、極大 Cohen-Macaulay 加群の圏 $\mathsf{CM}(R)$ は $\mathsf{mod}\,R$ の KE 閉部分圏である。

KE 閉部分圏を分類するために $\mathsf{mod}\,R$ の部分圏と $\mathrm{Spec}\,R$ 上の関数の間の次の対応を考える。

- 部分圏 $\mathcal{X} \subseteq \mathsf{mod}\,R$ に対して、関数 $\mathrm{Spec}\,R \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を次で定める：
$$f_{\mathcal{X}}(\mathfrak{p}) := \inf_{X \in \mathcal{X}} \{\mathrm{depth}_{R_\mathfrak{p}} X_\mathfrak{p}\}, \quad \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,R.$$
- 関数 $\mathrm{Spec}\,R \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ に対して、$\mathsf{mod}\,R$ の部分圏を次で定める：
$$\mathcal{X}_f := \{M \mid \mathrm{depth}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \geq f(\mathfrak{p}) \text{ for all } \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,R\}.$$

この対応に関する最初の主結果を述べる。

**Theorem 8** ([6])**.** *KE* 閉部分圏 $\mathcal{X} \subseteq \mathsf{mod}\,R$ に対して $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{f_\mathcal{X}}$ が成立する。つまり、次の等式が成立する：

$$\mathcal{X} = \left\{M \in \mathsf{mod}\,R \mid \mathrm{depth}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \geq f_\mathcal{X}(\mathfrak{p}) \textit{ for all } \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,R\right\}.$$

この定理からとくに KE 閉部分圏から関数を作る操作は単射である。よってその像を決定することによって KE 閉部分圏を分類できる。部分圏から作られる関数の性質を抽象化したのが次に定義する Bass 関数である。

**Definition 9.** 関数 $f\colon \mathrm{Spec}\,R \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ が次の三つの条件を満たすとき **Bass 関数**であるという：

**(B1):** 関数 $f$ の定義域 $\mathrm{dom}(f) := \{\mathfrak{p} \mid f(\mathfrak{p}) < \infty\}$ は特殊化閉である。
**(B2):** $\mathrm{dom}(f)$ の包含関係による極小元 $\mathfrak{p}$ に対して $f(\mathfrak{p}) = 0$ である。
**(B3):** $\mathrm{dom}(f)$ における任意の飽和した包含 $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ に対して $f(\mathfrak{q}) \leq f(\mathfrak{p}) + 1$ である。

さらに $f(\mathfrak{p}) \leq n$ が任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{dom}(f)$ で成立するとき $n$**-Bass 関数**であるという。

**Example 10.**

(1) 任意の $M \in \mathsf{mod}\,R$ に対して深さ関数 $\mathfrak{p} \mapsto \mathrm{depth}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$ は Bass 関数である。
(2) より一般に任意の部分圏 $\mathcal{X} \subseteq \mathsf{mod}\,R$ に対して $f_\mathcal{X}$ は Bass 関数である。さらに $\mathcal{X}$ が KE 閉ならば $f_\mathcal{X}$ は 2-Bass 関数となる。

(3) 任意の部分集合 $\Phi \subseteq \operatorname{Spec} R$ に対して、次で関数を定める：

$$f_\Phi(\mathfrak{p}) := \begin{cases} 0 & \text{if } \mathfrak{p} \in \Phi, \\ 1 & \text{if } \mathfrak{p} \notin \Phi \text{ but } \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q} \text{ for some } \mathfrak{q} \in \Phi, \\ \infty & \text{else.} \end{cases}$$

このとき $f_\Phi$ は 1-Bass 関数である。

*Remark* 11. Bass 関数 $f$ が $f(\mathfrak{p}) \leq \operatorname{depth} R_\mathfrak{p}$ を任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ に対して満たすとき、関数 $\mathfrak{p} \mapsto \operatorname{depth} R_\mathfrak{p} - f(\mathfrak{p})$ は [2, 10] で**支配的分解部分圏 (dominant resolving subcategory)** を分類するために導入された**モデレート関数 (moderate function)** と一致する。実際、定理 8 の証明でも KE 閉部分圏と支配的分解部分圏の関係が証明の鍵となっている。

以上の準備のもと、KE 閉部分圏の分類を述べる。

**Theorem 12.** *$R$ は CM 環の準同型像であると仮定する（より一般に $(S_2)$-優秀という仮定でも良い）。このとき $f = f_{\mathcal{X}_f}$ が任意の 2-Bass 関数 $f$ に対して成立する。*

よって定理 8 と合わせることで次の全単射を得る：

$$\begin{array}{ccc} \{\mathsf{mod}\, R \text{ の部分圏}\} & \underset{\mathcal{X}_{(-)}}{\overset{f_{(-)}}{\rightleftarrows}} & \{\text{関数 } \operatorname{Spec} R \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}\} \\ \cup\!\mid & & \cup\!\mid \\ \{\text{KE 閉部分圏}\} & \xleftrightarrow{\quad\simeq\quad} & \{\text{2-Bass 関数}\}. \end{array}$$

2-Bass 関数は $\operatorname{Spec} R$ のポセット構造にしか依存しないことに注意すると、この全単射は $\mathsf{mod}\, R$ の KE 閉部分圏が位相空間 $\operatorname{Spec} R$ の内在的な情報のみを用いて記述できることを示している。

## References


[1] H. Enomoto, *IE-closed subcategories of commutative rings are torsion-free classes*, preprint (2023), arXiv:2304.03260v2.

[2] H. Dao, R. Takahashi, *Classification of resolving subcategories and grade consistent functions*, Int. Math. Res. Not. (2015), no. 1, 119–149.

[3] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323–448.

[4] O. Iyama, Y. Kimura, *Classifying subcategories of modules over Noetherian algebras*, Adv. Math. **446** (2024), Paper No. 109631.

[5] T. Kobayashi, S. Saito, *When are KE-closed subcategories torsion-free classes?*, Math. Z. **307** (2024), no. 4, Paper No. 65.

[6] T. Kobayashi, S. Saito, *Classifying KE-closed subcategories over a commutative noetherian ring*, preprint (2025), arXiv:2509.05767.

[7] D. Stanley, B. Wang, *Classifying subcategories of finitely generated modules over a Noetherian ring*, J. Pure Appl. Algebra **215** (2011), no. 11, 2684–2693.

[8] S. Saito, *Classifying torsionfree classes of the category of coherent sheaves and their Serre subcategories*, J. Pure Appl. Algebra **229** (2025), no. 1, Paper No. 107799, 34 pp.

[9] R. Takahashi, *Classifying subcategories of modules over a commutative Noetherian ring*, J. Lond. Math. Soc. (2) **78** (2008), no. 3, 767–782.

[10] R. Takahashi, *Classification of dominant resolving subcategories by moderate functions*, Illinois J. Math. **65** (2021), no. 3, 597–618.

Shunya Saito
Graduate School of Mathematical Sciences
The University of Tokyo
3-8-1 Komaba Meguro-ku Tokyo 153-8914, Japan
*Email address*: shunya.saito712@gmail.com

Toshinori Kobayashi
School of Science and Technology
Meiji University
1-1-1 Higashi-Mita, Tama-ku, Kawasaki-shi, Kanagawa 214-8571, Japan
*Email address*: tkobayashi@meiji.ac.jp