TILTING MODULES FOR ALGEBRAIC GROUPS

NORIYUKI ABE

Abstract. This is a survey on the representation theory of algebraic reductive groups.

1. 初めに

体 $\mathbb{K}$ に対して，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ を可逆な n 次正方行列からなる群とする．本稿では，代数閉体 $\mathbb{K}$ に対して $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ の代数的な表現論の解説を行う．考える表現をきちんと定めておこう．

定義 1 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ の有限次元表現 V が代数的であるとは，V の基底を固定したときに，各 $g = (g_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の作用のその基底に関する表現行列が g_{ij} および $(\det g)^{-1}$ の多項式で表されることである．

以下 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ とし，$\operatorname{Rep} G$ で G の代数的な表現からなる圏を表す．$\operatorname{Rep} G$ の既約対象の同型類からなる集合を $\operatorname{Irr} G$ と書く．この群の表現に関しては様々な問題があるだろうが，純粋に表現論の立場からすると次の二つの問題が重要であるのは言うまでもないだろう．

- $\operatorname{Irr} G$ の決定.
- 各既約表現の指標の計算.

本稿でもこの二つ，特に後者を中心にその表現論を解説する．有限群などと同様，この表現論は $\mathbb{K}$ の標数によりその様子が大きく変わり，特に正標数の場合には難しくなる．以下 p を $\mathbb{K}$ の標数とする．基本的には $p > 0$ の場合をターゲットとする．なお，本稿で述べる事実はより一般に $\mathbb{K}$ 上の連結簡約代数群に対して成立する．

基本的な例を見ておこう．

例 2 $n = 2$ とし，$s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, t \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathbb{K}^2 = \mathbb{K}X \oplus \mathbb{K}Y$ の s 次対称積

$$\operatorname{Sym}^s \mathbb{K}^2 = \bigoplus_{k=0}^{s} \mathbb{K}X^{s-k}Y^k$$

The paper is in a final form and no version of it will be submitted for publication elsewhere.

に G の作用を

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X^{s-k}Y^k = (ad-bc)^t(aX+cY)^{s-k}(bX+dY)^k$$

と定めると，これは G の表現を与えることが確認できる．少しこの表現の様子を見てみよう．対角に $t_1, t_2 \in \mathbb{K}^\times$ が並んだ対角行列を $\mathrm{diag}(t_1, t_2)$ と表す．

(1) $X^{s-k}Y^k$ は $t = \mathrm{diag}(t_1, t_2)$ の作用に関する固有ベクトルで，その固有値は $t_1^{s-k+t}t_2^{k+t}$．これを，$X^{s-k}Y^k$ はウェイト $(s-k+t, k+t)$ のウェイトベクトルであるという．

(2) (1) でウェイトと呼んだものは整数の組であるが，任意の値をとれるわけではない．特に二つのウェイトがあったとすると，その差は $(1,-1)$ の整数倍である．また，$k=0$ の時のウェイト $(s+t, t)$ は次の性質を持つ：他のウェイト $(s-k+t, k+t)$ について，$(s+t,t)-(s-k+t,k+t) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(1,-1)$.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X^{s-k}Y^k$ を展開して $X^{s-l}Y^l$ が現れたとすると，ウェイトの間に

$$(s-l+t, l+t) - (s-k+t, k+t) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(1,-1)$$

という関係がある．このことから，(2) で述べた特別なウェイト (s,t) に対するベクトル X^s に対して $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X^s = X^s$ となることがわかる．（定義からも明らかであるが．）

上のウェイトの関係は直接も確かめられるが，次のようにもわかる．$x \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X^{s-k}Y^k = v_0 + xv_1 + \cdots + x^r v_r$$

と展開する．（代数的表現の定義から，左辺は x の多項式である．）これに $t = \mathrm{diag}(t_1, t_2)$ を作用させると，左辺は

$$\begin{aligned} t\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X^{s-k}Y^k &= t\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t^{-1}tX^{s-k}Y^k \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t_1t_2^{-1}x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t_1^{s-k+t}t_2^{k+t}X^{s-k}Y^k \end{aligned}$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
&tv_0 + xtv_1 + \cdots + x^r tv_r \\
&= t_1^{s-k+t} t_2^{k+t} v_0 + t_1^{s-k+t} t_2^{k+t} (t_1 t_2^{-1} x) v_1 + \cdots + t_1^{s-k+t} t_2^{k+t} (t_1 t_2^{-1} x)^r v_r
\end{aligned}
$$

なので, $tv_i = t_1^{s-k+t} t_2^{k+t} (t_1 t_2^{-1})^i v_i$. すなわち v_i のウェイトは $(s-k+t, k+t)+i(1,-1)$ である.

(4) $p = 0$ ならば既約である．W を 0 でない部分空間とする．次の事実に注意しよう．$\sum_k c_k X^{s-k} Y^k \in W$ かつ $c_k \neq 0$ ならば $X^{s-k} Y^k \in W$．これは，W が対角行列の作用で閉じているのでその作用に関する固有空間分解を持つことから従う．よってある k に対して $X^{s-k} Y^k \in W$ であるが，$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X^{s-k} Y^k$ を考え上の事実を使えば $X^s \in W$ がわかる．最後に $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X^s$ を考えることで任意の l に対して $X^{s-l} Y^l \in W$ となることがわかる.

(5) $p > 0$ の場合は既約とは限らない．例えば $s = p$ として $W = \mathbb{K} X^p \oplus \mathbb{K} Y^p$ とすると，

$$
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X^p = (ad-bc)^t (aX + cY)^p = (ad-bc)^t (a^p X^p + c^p Y^p) \in W
$$

などから W が部分表現になることがわかる.（なおこの W は既約である.）

一般の場合には，$s = s_0 + s_1 p + \cdots + s_r p^r$ $(0 \le s_i \le p-1)$ を s の p 進法による表示とすると，

$$
\bigoplus_{0 \le k_i \le s_i, k = \sum_i k_i p^i} \mathbb{K} X^{s-k} Y^k \tag{1.1}
$$

が部分既約表現を与える.

(1.1) の既約表現がこの場合の既約表現をすべて与える．$\nabla(s+t, t) = \mathrm{Sym}^s \mathbb{K}^2$ を上で構成した表現とし，$L(s+t, t)$ を (1.1) で与えられるその部分既約表現とする.

定理 3

$$
\mathrm{Irr}\, G \simeq \{L(s+t,t) \mid s \in \mathbb{Z}_{\ge 0}, t \in \mathbb{Z}\} = \{L(\lambda_1, \lambda_2) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}, \lambda_1 \ge \lambda_2\}
$$

が成り立つ.

(2) で見たウェイトの条件は G の表現論においてよく現れる．例えば $\nabla(\lambda_1,\lambda_2)$ の組成列に $L(\mu_1,\mu_2)$ が現れるならば

$$(\lambda_1,\lambda_2)-(\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}(1,-1)$$

であることが確認できる．すなわち $\operatorname{Rep}G$ の Grothendieck 群 $K_0(\operatorname{Rep}G)$ において

$$[\nabla(\lambda)]\in[L(\lambda)]+\sum_{\mu-\lambda\in\mathbb{Z}_{<0}(1,-1)}\mathbb{Z}_{\geq 0}[L(\mu)]$$

が成り立つ．（このことから，例えば $\{[\nabla(\lambda)]\}$ も $K_0(\operatorname{Rep}G)$ の基底を与えることがわかる．）

一般の n でも既約表現の分類はほぼ同様に進む．すなわち，適当なパラメータに λ に対して表現 $\nabla(\lambda)$ が構成され，その部分表現として既約表現 $L(\lambda)$ をとることができ，これが全ての既約表現を与える．$n=2$ の場合は上のように既約表現が具体的に書けるため，その指標の計算も可能である．一般でも $p=0$ ならば $\nabla(\lambda)$ が既約となり，その指標の計算も古典的な結果として知られている．一方 $p>0$ の場合は $n=2$ で見た通り $\nabla(\lambda)$ は既約とならず，n が大きいと既約表現の具体的な記述も困難である．そのため指標の計算も難しくなる．実際のところ，（このような計算する系問題のあるあるではあるが）何により記述されるのかというのも非自明な問題となる．

2. 既約表現の分類

以下 $G=\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ の代数的な表現論について述べる．この場合を含む簡約代数群の表現論については Jantzen の教科書 [9] に詳細に書かれている．以下でもこの本を参照する．

一般の n に対する既約表現の分類を述べる．T を対角行列からなる G の部分群とし，$t=\operatorname{diag}(t_1,\dots,t_n)\in T$ と $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{Z}^n$ に対して，$t^\lambda=t_1^{\lambda_1}\cdots t_n^{\lambda_n}$ と書くことにする．$V_\lambda=\{v\in V\mid tv=t^\lambda v\}$ と定める．V_λ の元をウェイト λ のウェイトベクトルと呼ぶ．

補題 4 $V=\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}^n}V_\lambda$.

$\operatorname{wt}V=\{\lambda\in\mathbb{Z}^n\mid V_\lambda\neq 0\}$ とおく．$\operatorname{wt}V$ の元を V のウェイト呼ぶ．例 2 の (2) で見たウェイトの関係は重要である．次のように定義しよう．e_i を $\mathbb{Z}^n$ の標準基底とする．$\lambda,\mu\in\mathbb{Z}^n$ に対して，$\lambda-\mu\in\sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{Z}_{\geq 0}(e_i-e_{i+1})$ であるとき，$\lambda\geq\mu$ と書く．これは $\mathbb{Z}^n$ 上の順序を与える．例 2 の (2) で見た特別なウェイトは，$\operatorname{wt}(\operatorname{Sym}^s\mathbb{K}^2)$ の最大元である．

$$\mathbb{Z}^n_+=\{\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{Z}^n\mid\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n\}$$

とおく．$\mathbb{Z}_+^n$ の元は支配的であるといわれる．以下が既約表現の分類を与える．

定理 5（[9, II.2.4 Proposition]）　$V \in \mathrm{Rep}\, G$ とする．

(1) V が既約ならば，$\mathrm{wt}\, V$ は最大元を持ち，それは $\mathbb{Z}_+^n$ に属する．この最大元を V の最高ウェイトと呼ぶ．

(2) $V \in \mathrm{Irr}\, G$ に対してその最高ウェイトを定める写像は全単射 $\mathrm{Irr}\, G \simeq \mathbb{Z}_+^n$ を与える．

$\lambda \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して $L(\lambda)$ を対応する既約表現とする．例 2 では $L(\lambda)$ は $\nabla(\lambda)$ という表現の部分表現として実現されていた．一般の n では $\nabla(\lambda)$ は誘導表現として実現される．

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{pmatrix} \right\} = \{g = (g_{ij}) \in G \mid i > j \text{ ならば } g_{ij} = 0\}$$

を上三角行列からなる部分群，また $\overline{B} = \{{}^t b \mid b \in B\}$ を下三角行列からなる部分群とする．但し ${}^t b$ は b の転置行列である．$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ と $b = (b_{ij}) \in \overline{B}$ に対して $b^\lambda = b_{11}^{\lambda_1} \cdots b_{nn}^{\lambda_n}$ と書く．$b \in T$ の時はすでに定義したものと一致する．

$$\nabla(\lambda) = \{f \colon G \to \mathbb{K} \mid f \text{ は代数的で，} b \in \overline{B} \text{ および } x \in G \text{ に対して } f(bx) = b^\lambda f(x)\}$$

と定める．但し代数的の意味は定義 1 と同様，$g = (g_{ij})$ の関数として g_{ij} および $(\det g)^{-1}$ の多項式で表されることである．$g \in G$ と $f \in \nabla(\lambda)$ に対して $(gf)(x) = f(xg)$ と定めると，これは G の表現になる．

注意 6　一般に環 A とその部分環 $A' \subset A$ に対して，A 加群の圏から A' 加群への圏への忘却関手の右随伴は

$$M \mapsto \mathrm{Hom}_{A'}(A, M)$$

で与えられる．群 G とその部分群 $H \subset G$ に対して $A' = \mathbb{K}[H] \subset \mathbb{K}[G] = A$ の時を考えると，G の表現としての同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}[H]}(\mathbb{K}[G], M) = \{f \colon G \to M \mid h \in H, x \in G \text{ に対して } f(hx) = hf(x)\}$$

が $\Phi \mapsto \Phi|_G$ により得られる．上の定義はこの構成を代数的な表現の場合に適応させたものである．

随伴性（Frobenius 相互律）は同様に成り立つ [9, I.3.4 Proposition].

命題 7 $V \in \operatorname{Rep} G$ に対して $\operatorname{Hom}_G(V, \nabla(\lambda)) \simeq \operatorname{Hom}_{\overline{B}}(V, \lambda)$．ただし $\overline{B}$ の指標 $b \mapsto b^\lambda$ から定まる一次元表現を単に λ と書いた．

定理 8（[9, II.2.2 Proposition, II.2.4, II.2.6 Proposition, II.5.6 Corollary]） $\lambda \in \mathbb{Z}_+^n$ ならば $\nabla(\lambda) \neq 0$ であり，λ は $\operatorname{wt} \nabla(\lambda)$ の最大元である．また $L(\lambda) = \operatorname{soc} \nabla(\lambda)$ で，$p = 0$ ならば $\nabla(\lambda)$ は既約．

特に最後の部分を Borel-Weil の定理という．

注意 9 $n = 2$ とする．$f \in \nabla(\lambda)$ に対して

$$X^{\lambda_1 - \lambda_2} f \begin{pmatrix} 1 & Y/X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を考えるとこれは X, Y の同次多項式であり，$\nabla(\lambda) \simeq \operatorname{Sym}^{\lambda_1 - \lambda_2} \mathbb{K}^2$ を与えることが証明できる．同様に，一般の n に対しても上三角行列への制限を考えることで $\nabla(\lambda)$ を多項式環に埋め込むことができる．

左随伴にあたる表現も作ることができるが，双対を取ってしまった方が早い．$\Delta(\lambda)$ を双対空間 $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(\nabla(\lambda), \mathbb{K})$ に G の作用を $(gf)(v) = f({}^t g v)$ で定めたものとする．通常の双対表現とは異なることに注意しよう．この定義の下で $\operatorname{wt} \Delta(\lambda) = \operatorname{wt} \nabla(\lambda)$ が成り立つことが容易に確認できる．次の随伴性も容易である．

補題 10 $V \in \operatorname{Rep} G$ に対して $\operatorname{Hom}_G(\Delta(\lambda), V) \simeq \operatorname{Hom}_B(\lambda, V)$．ただし $\overline{B}$ の指標 λ と同様に B の指標 λ を定めている．

注意 11 $V \in \operatorname{Rep} G$ とする．例 2 で述べたことと同様の議論により（行列のサイズが大きい分一見大変だが），$v \in V_\lambda$ と $b \in B$ に対して

$$bv \in b^\lambda v + \bigoplus_{\mu > \lambda} V_\mu \tag{2.1}$$

であることを示すことができる．特に $V = L(\lambda)$ としよう．この時 λ は $\operatorname{wt} L(\lambda)$ の中で最大なので，$v \in L(\lambda)_\lambda$ に対して $bv = b^\lambda v$ となる．すなわち v は $\operatorname{Hom}_B(\lambda, L(\lambda))$ の元を与えるため，随伴性から 0 でない準同型 $\Delta(\lambda) \to L(\lambda)$ を得る．$L(\lambda)$ は既約なのでこれは全射，すなわち $L(\lambda)$ は $\Delta(\lambda)$ の商である．

$\mathbb{Z}^n$ の上の順序は $\operatorname{Rep} G$ にも構造を与える．すなわち $\operatorname{Rep} G$ は次の意味で最高ウェイト圏となる．$\lambda \in \mathbb{Z}^n$ に対して $\operatorname{Rep}_{\leq \lambda} G$ を，その組成列が全て $\{L(\mu) \mid \mu \leq \lambda\}$ に属して

いるような表現からなる部分圏とする．また，一般に $M \in \operatorname{Rep} G$ と $L \in \operatorname{Irr} G$ に対して $[M : L]$ を M における L の重複度とする．

定理 12　$\lambda \in \mathbb{Z}^n_+$ に対して次が成り立つ．

(1) $\operatorname{Rep}_{\leq\lambda} G$ において，$\Delta(\lambda), \nabla(\lambda)$ は $L(\lambda)$ の射影被覆と入射包絡を与える．
(2) $[\operatorname{Ker}(\Delta(\lambda) \to L(\lambda)) : L(\mu)] \neq 0$ ならば $\mu < \lambda$，$[\operatorname{Coker}(L(\lambda) \to \nabla(\lambda)) : L(\mu)] \neq 0$ ならば $\mu < \lambda$．
(3) $\operatorname{Ext}^{>0}(\Delta(\lambda), \nabla(\mu)) = 0$．

ウェイトの大小関係とこのようなホモロジー代数的な性質は注意 11 の議論を通して関連付けることができる．例えば $\operatorname{Rep}_{\leq\lambda} G$ において $\Delta(\lambda)$ が射影的であることを示してみよう．$V \in \operatorname{Rep}_{\leq\lambda} G$ とすると，注意 11 の議論から $v \in V_\lambda$ は B 準同型 $\lambda \to V$ を与える．すなわち $\operatorname{Hom}_B(\lambda, V) \simeq V_\lambda$ であるので，補題 10 から $\operatorname{Hom}_G(\Delta(\lambda), V) \simeq V_\lambda$．補題 4 を念頭におけば右辺は V に関して完全である．

注意 13　最高ウェイト圏は準遺伝環上の加群圏としてとらえられることも多いが，$\operatorname{Rep} G$ は無限個の既約対象を持つため有限次元代数の加群圏とはならない．そのため上のような述べ方をした．この辺の事情については [3] にまとめられている．

3. 指標

定義 14　$V \in \operatorname{Rep} G$ と $g \in G$ に対して $\operatorname{Tr}_V(g)$ を g の V における作用のトレースとする．これにより定まる $\operatorname{Tr}_V : G \to \mathbb{K}$ を V の指標と呼ぶ．

有限群の表現論でよく知られている通り，指標は既約表現の重要な不変量である．例えば $\{\operatorname{Tr}_V \mid V \in \operatorname{Irr} G\}$ が一次独立であることはこの場合も成り立つ．この指標を計算したいわけだが，少し帰着を行っておこう．まず定義から Tr_V は G 上の代数的な関数であるので，その値は G の（Zariski 位相に関する）稠密な部分集合上で定まる．よって，対角化可能な行列の上での値で定まる．一方 Tr_V は共役作用に関して不変であり，よって対角化可能な行列上での値の計算は対角行列のそれに帰着される．すなわち，Tr_V の T への制限を計算すれば十分である．$t \in T$ に対して $\operatorname{Tr}_V(t) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} (\dim V_\lambda) t^\lambda$ であるから，$\dim V_\lambda$ を計算すればよい，といってもよい．

$V = \Delta(\lambda)$ の場合には答えが知られている．

定理 15（**Weyl の指標公式** [9, II.5.10 Proposition]） $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ と $t = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n) \in T$ に対して

$$\mathrm{Tr}_{\Delta(\lambda)}(t) = \mathrm{Tr}_{\nabla(\lambda)}(t) = \frac{\det((t_i^{\lambda_j+n-j})_{i,j})}{\prod_{i<j}(t_i - t_j)}.$$

従って $p = 0$ の場合は $\mathrm{Tr}_{L(\lambda)} = \mathrm{Tr}_{\Delta(\lambda)}$ の値はこれで計算できている．なお，$\lambda_n \geq 0$（したがって $i = 1, \ldots, n$ に対して $\lambda_i \geq 0$）の場合には右辺は t_i の多項式となるが，これを Schur 多項式と呼ぶ．これは $t_1, \ldots, t_n$ の対称多項式であり，対称群の表現論を始め様々な場所に現れる重要な多項式である．

例 16 $n = 2$ とする．例 2 の記号を用いると $\nabla(\lambda_1, \lambda_2) = \bigoplus_{k=0}^{\lambda_1-\lambda_2} \mathbb{K}X^{\lambda_1-\lambda_2-k}Y^k$ である．$\mathrm{diag}(t_1, t_2)X^{\lambda_1-\lambda_2-k}Y^k = t_1^{\lambda_1-k}t_2^{\lambda_2+k}X^{\lambda_1-\lambda_2-k}Y^k$ であるから，

$$\mathrm{Tr}_{\nabla(\lambda_1,\lambda_2)}(t) = \sum_{k=0}^{\lambda_1-\lambda_2} t_1^{\lambda_1-k}t_2^{\lambda_2+k} = \frac{t_1^{\lambda_1+1}t_2^{\lambda_2} - t_1^{\lambda_2}t_2^{\lambda_1+1}}{t_1 - t_2}.$$

さて，$\Delta(\lambda)$ における最大のウェイトは λ である．一方 $L(\mu)$ はウェイト μ を持つので，$L(\mu)$ が $\Delta(\lambda)$ の組成列に現れるならば，$\mu \leq \lambda$ となる．さらに $\dim \Delta(\lambda)_\lambda = 1$ であることから，$[\Delta(\lambda) : L(\lambda)] = 1$ となる．すなわち Grothendieck 群において

$$[\Delta(\lambda)] = [L(\lambda)] + \sum_{\mu<\lambda} c_{\mu,\lambda}[L(\mu)] \tag{3.1}$$

と書くことができる．ここで $c_{\mu,\lambda} = [\Delta(\lambda) : L(\mu)]$ は $L(\mu)$ の $\Delta(\lambda)$ における重複度である．(3.1) より，$\{[\Delta(\lambda)]\}$ を基底 $\{L(\lambda)\}$ で展開したときの係数行列は下三角かつ対角が 1 の行列となる．この行列は可逆なので，$\{[\Delta(\lambda)]\}$ も基底を与える．

さて，今この重複度 $c_{\mu,\lambda}$ が計算できたとしよう．すると (3.1) を逆に解くことで，

$$[L(\mu)] = [\Delta(\mu)] + \sum_{\lambda<\mu} d_{\lambda,\mu}[\Delta(\lambda)]$$

となる $d_{\lambda,\mu} \in \mathbb{Z}$ を計算することができる．すると

$$\mathrm{Tr}_{L(\mu)} = \mathrm{Tr}_{\Delta(\mu)} + \sum_{\lambda<\mu} d_{\lambda,\mu}\, \mathrm{Tr}_{\Delta(\lambda)}$$

となる．$\mathrm{Tr}_{\Delta(\lambda)}$ は Weyl の指標公式で計算できるから，$\mathrm{Tr}_{L(\mu)}$ も計算できる．従って指標の計算は重複度 $c_{\mu,\lambda}$ の計算に帰着される．以下ではこの重複度の計算を問題としよう．

4. ブロック分解

$\operatorname{Rep} G$ はより小さい圏に分解される．まず一般論を述べよう．$\mathbb{Z}^n_+$ における同値関係 $\sim$ を $\operatorname{Ext}^1(L(\lambda), L(\mu)) \neq 0$ ならば $\lambda \sim \mu$ である最小のものとして定める．$\sim$ による同値類 Ω に対して，$\operatorname{Rep}_\Omega G$ を組成因子が $L(\lambda)$ $(\lambda \in \Omega)$ のみからなる表現からなる部分圏とする．

命題 17　任意の $V \in \operatorname{Rep} G$ は $V = \bigoplus_\Omega V_\Omega$ $(V_\Omega \in \operatorname{Rep}_\Omega G)$ となる分解を一意的に持ち，また $\Omega \neq \Omega'$ ならば $\operatorname{Hom}_G(\operatorname{Rep}_\Omega G, \operatorname{Rep}_{\Omega'} G) = 0$.

従って $\operatorname{Rep} G$ の研究は各 $\operatorname{Rep}_\Omega G$ の研究に帰着される．

今の場合 Ω の記述は大体次のような幾何学的な様相により与えられる．$1 \leq i \neq j \leq n$ と $r \in \mathbb{Z}$ に対して，$H_{i,j}(r) = \{(x_i) \in \mathbb{R}^n \mid x_i - x_j = r\}$ を $\mathbb{R}^n$ 内の超平面とし，$s_{i,j}(r)$ を $H_{i,j}(r)$ に関する鏡映とする．$W_{\mathrm{aff},p}$ を $\mathbb{R}^n$ のアフィン変換群 $\operatorname{Aff}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ の部分群であって $\{s_{i,j}(pk + i - j) \mid 1 \leq i < j \leq n, k \in \mathbb{Z}\}$ により生成されるものとする．これは $\mathbb{R}^n$ に作用し，$\mathbb{Z}^n$ を保つ．

定理 18（**linkage principle,** [9, 6.17 Corollary]）　$\lambda, \mu \in \mathbb{Z}^n_+$ に対して，$\lambda \sim \mu$ ならば $\lambda \in W_{\mathrm{aff},p}\mu$.

注意 19　逆は成り立たない．一般の場合により精密な記述が [6] にある．

さきほどの記号と重なるが次のような記号を用意する．Ω を $\mathbb{Z}^n$ における $W_{\mathrm{aff},p}$ 軌道とし，$\operatorname{Rep}_\Omega G$ を組成因子が $L(\lambda)$ $(\lambda \in \Omega)$ のみからなる表現からなる部分圏とする．$\Delta(\lambda)$ は直既約であるから，$\Delta(\lambda) \in \operatorname{Rep}_{W_{\mathrm{aff},p}\lambda} G$．従って (3.1) はもう少し精密に

$$[\Delta(\lambda)] = [L(\lambda)] + \sum_{\mu < \lambda, \mu \in W_{\mathrm{aff},p}\lambda} c_{\mu,\lambda}[L(\mu)]$$

と書き直される．

$W_{\mathrm{aff},p}$ は Coxeter 系と呼ばれる特別な構造を持つことが知られている．$W_{\mathrm{aff},p}$ は単に圏の分解をパラメータづけるだけの役割を持つわけではなく，特にその Coxeter 系としての構造が $\operatorname{Rep} G$ の構造を記述するための手段を与える．その一つとして，Lusztig は上の係数 $c_{\mu,\lambda}$ が $W_{\mathrm{aff},p}$ の構造を使い定義されるアフィン Kazhdan-Lusztig 多項式で記述されることを予想した．Kazhdan-Lusztig，柏原・谷崎，Andersen-Jantzen-Soergel などによりこの予想を解決するためのプログラム（Lusztig プログラム）が実行され，p が n に関して十分大きいときは成立することが示された．Lusztig によるもともとの予想は p が大きくなくても成り立つことを主張していたのだが，それに反例を与えたのが Williamson [14] で

ある．しかしさらなる研究によりやはり $W_{\mathrm{aff},p}$ の構造が指標を記述することがわかっている．それに関する一端を残りの部分で説明しようと思う．

$W_{\mathrm{aff},p}$ 軌道 Ω に対する $\mathrm{Rep}_\Omega G$ は互いに関係しあう．雑にいえば，$\mathrm{Rep}_\Omega G$ は $\lambda \in \Omega$ の固定部分群で大体決まる．例えば次が成り立つ．Ω が正則であるとは，任意の $\lambda \in \Omega$ の固定部分群が自明であることである．もちろんこれはある $\lambda \in \Omega$ の固定部分群が自明であることと同値である．

定理 20（[9, II.7.9 Proposition]）　Ω_1, Ω_2 がともに正則ならば圏同値 $\mathrm{Rep}_{\Omega_1} G \simeq \mathrm{Rep}_{\Omega_2} G$ が存在する．

さらに，正則でない Ω に対する重複度の計算は正則な場合のそれに帰着されることが知られている．より正確には，正則でない Ω と正則な Ω' に対してある完全関手 $\mathrm{Rep}_{\Omega'} G \to \mathrm{Rep}_\Omega G$ で，既約表現を既約表現または 0 に移し，$\Delta(\lambda')$ を $\Delta(\lambda)$ の形の表現に移すものを構成することができる．この関手や定理 20 の圏同値を与える関手は translation functor と呼ばれ，G の表現論で重要な役割を果たすのだが，その詳細はここでは述べない．([9, II.7] を参照.) ともかく，指標を計算するという目的のためには正則な Ω に対する $\mathrm{Rep}_\Omega G$ を考えればよい．ただし，p が小さいとそもそも正則なパラメータが存在しないこともある．

補題 21　次は同値．

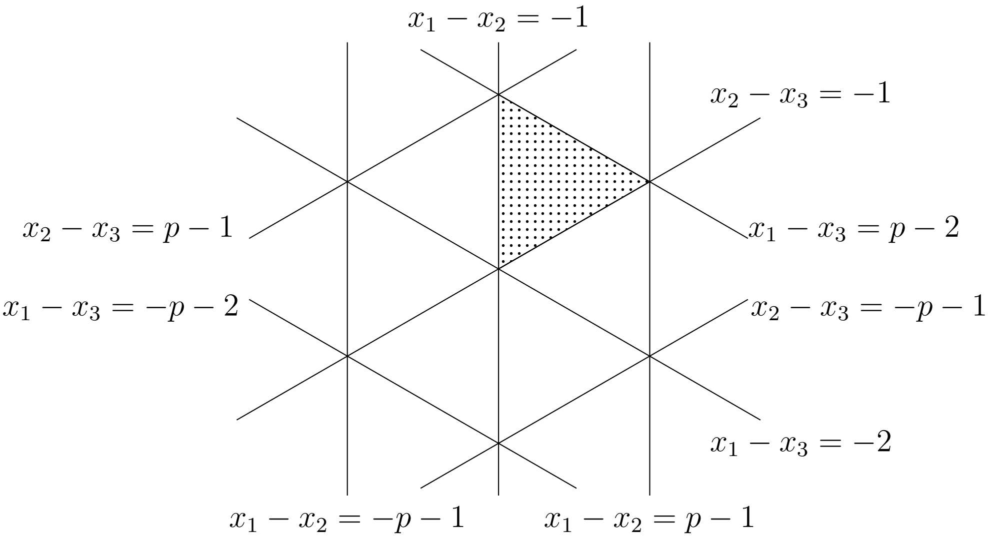
- 正則な Ω が存在．
- $W_{\mathrm{aff},p}0$ は正則．
- $p \geq n$．

従って，以下 $p \geq n$ と仮定する．さらに技術的な仮定により $p > n$ まで仮定することにする．また上の補題と定理 20 を念頭におけば $\Omega = W_{\mathrm{aff},p}0$ の場合を考えれば十分である．以下 $\mathrm{Rep}_0 G = \mathrm{Rep}_{W_{\mathrm{aff},p}0} G$ とおき，この場合を主に考えよう．なお，$\mathrm{Rep}_0 G$ は自明表現 $L(0)$ を含む．このようなブロックを主ブロックという．

5. アフィン Weyl 群

$W_{\mathrm{aff},p}$ の様子を理解するために $n = 3$ の時に絵を描いてみよう．しかし，そのまま書いては 3 次元の絵を描かなくてはならず難しいので，$\Delta\mathbb{R} = \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ とおき，$\mathbb{R}^3/\Delta\mathbb{R}$ の図を描くことにする．($\Delta\mathbb{R} \subset H_{i,j}(r)$ より $W_{\mathrm{aff},p}$ は $\Delta\mathbb{R}$ に自明に作

用するので，$\mathbb{R}^3/\Delta\mathbb{R}$ 上で考えても情報は落ちていない．）$\mathbb{R}^3/\Delta\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$ を $(1,-1,0) \mapsto (1,0), (0,1,-1) \mapsto (\cos(2\pi/3), \sin(2\pi/3))$ で与える．



この絵のぱっと見は p により変わらないことに注意しよう．（実際には引かれている線は p に依存しているが．）このことをきちんと見るには縮小してやればよい．さらに中心部分を原点に移すために平行移動を行おう．$\rho = (n-1, n-2, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^n$ とおくと，$x \mapsto px - \rho$ により $H_{i,j}(k)$ と $H_{i,j}(pk+i-j)$ が移りあう．従って，$W_{\mathrm{aff},p}$ は $\{s_{i,j}(k) \mid 1 \le i < j \le n, k \in \mathbb{Z}\}$ で生成される $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ の部分群と同型である．この部分群を W_{aff} と書こう．定義から W_{aff} は p とは無関係に決まっていて，また $W_{\mathrm{aff},p} \simeq W_{\mathrm{aff}}$ である．W_{aff} をアフィン Weyl 群と呼ぶ．

簡単な計算により $s_{i,j}(0)$ の $\mathbb{R}^n$ への作用は i 番目と j 番目の成分の入れ替えであることがわかる．よって，$W \subset W_{\mathrm{aff}}$ を $\{s_{i,j}(0) \mid 1 \le i < j \le n\}$ で生成される部分群とすれば，これは成分の入れ替えを与える群であり，よって S_n と同型である．さらに，成分の入れ替えにより $S_n \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ とみなした時に，

$$W_{\mathrm{aff}} = S_n \ltimes \{(y_i) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_i y_i = 0\} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n = \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$$

となることが確認できる．このように，W_{aff} は群としてはそこまで複雑なものではない．

上の絵で点で塗りつぶされた領域の周りの超平面に関する折り返しのなす集合を $S_{\mathrm{aff},p} \subset W_{\mathrm{aff},p}$ と置こう．式でかけば

$$S_{\mathrm{aff},p} = \{s_{i,i+1}(-1) \mid 1 \le i < n\} \cup \{s_{1,n}(p-n+1)\}$$

であり，また同型 $W_{\mathrm{aff}} \simeq W_{\mathrm{aff},p}$ で対応する W_{aff} の部分集合は

$$S_{\mathrm{aff}} = \{s_{i,i+1}(0) \mid 1 \leq i < n\} \cup \{s_{1,n}(1)\}$$

となる．

命題 22　$S_{\mathrm{aff},p}$ は $W_{\mathrm{aff},p}$ を生成する．さらに $(W_{\mathrm{aff},p}, S_{\mathrm{aff},p})$ は Coxeter 系である．

前半はそう難しくない．後半は重要な性質であり，以下の構成ともかかわるのだが，明示的には出てこないのであまり深入りせずに次に進むことにする．

ここで見た構造と $\mathrm{Rep}_0 G$ との関わりに関して次のような観察をしてみよう．$\mathrm{Rep}_0 G$ に属する既約表現は $\{L(w0) \mid w \in W_{\mathrm{aff},p}, w0 \in \mathbb{Z}_+^n\}$ である．（条件 $w0 \in \mathbb{Z}_+^n$ があることに注意．）$W_{\mathrm{aff},p}^+ = \{w \in W_{\mathrm{aff},p} \mid w0 \in \mathbb{Z}_+^n\}$ とおこう．$\mathrm{Rep}_0 G$ の Grothendieck 群の基底として $\{[L(w0)] \mid w \in W_{\mathrm{aff},p}^+\}$ をとることができる．または，以前に行った議論から $\{[\Delta(w0)] \mid w \in W_{\mathrm{aff},p}^+\}$ も基底となることがわかる．ここで次の組み合わせ論的な命題に注意する．W_p を $W \subset W_{\mathrm{aff}}$ に対応する $W_{\mathrm{aff},p}$ の部分群とする．

補題 23　$W_{\mathrm{aff},p}^+ \simeq W_p \backslash W_{\mathrm{aff},p}$

少し言い換えてみよう．$\mathrm{sgn}\colon S_n \to \{\pm 1\}$ を置換の符号をとる写像とし，$W_p \simeq W \simeq S_n \xrightarrow{\mathrm{sgn}} \{\pm 1\}$ を同様に $\mathrm{sgn}\colon W_p \to \{\pm 1\}$ と書く．これにより $\mathbb{Z}$ を群環 $\mathbb{Z}[W_p]$ 上の加群とみなし，右 $\mathbb{Z}[W_{\mathrm{aff},p}]$ 加群 $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[W_p]} \mathbb{Z}[W_{\mathrm{aff},p}]$ を考える．この加群の基底は $W_p \backslash W_{\mathrm{aff},p}$ でパラメトライズされるので，上の補題から $W_{\mathrm{aff},p}^+$ でパラメトライズされる．よって，基底を対応させることで $\mathrm{Rep}_0 G$ の Grothendieck 群 $K(\mathrm{Rep}_0 G)$ との同型を次で与えることができる：

$$\begin{array}{ccc} K(\mathrm{Rep}_0 G) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[W_p]} \mathbb{Z}[W_{\mathrm{aff},p}] \\ \cup & & \cup \\ [\Delta(w0)] & \longmapsto & 1 \otimes w \end{array} \qquad (w \in W_{\mathrm{aff},p}^+).$$

これは単なる $\mathbb{Z}$ 加群としての同型を（無理矢理？）作ったに過ぎないが，これを通じて $K(\mathrm{Rep}_0 G)$ には $\mathbb{Z}[W_{\mathrm{aff},p}]$ 加群の構造を入れることができる．Riche-Williamson [12] は実はこれが圏化できるということを予想し，この予想は Bezrukavnikov-Riche [4] により解決された．正確には Riche-Williamson は GL_n の場合に限り証明を与えており，つまり次に述べる定理は本当は Riche-Williamson のものである．GL_n 以外への簡約群への拡張を行ったのが Bezrukavnikov-Riche である．その証明は GL_n の場合でも Riche-Williamson のものとは異なる．

非常に雑にその主張を述べておこう．

定理 24　あるモノイダル圏（加法圏でしかなく，アーベル圏にはならない）$\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}$ の $\mathrm{Rep}_0 G$ への作用であって次を満たすものが存在する：

(1) $K_{\oplus}(\mathcal{S}) \simeq \mathbb{Z}[W_{\mathrm{aff},p}]$.
(2) $\mathcal{S}$ の $\mathrm{Rep}_0 G$ への作用は上で与えた $K(\mathrm{Rep}_0 G)$ の $\mathbb{Z}[W_{\mathrm{aff},p}]$ 加群構造の圏化を与える．

ここで，$K_{\oplus}(\mathcal{S})$ は分裂 Grothendieck 群である．（$\mathcal{S}$ の対象の生成する自由アーベル群を $X \oplus Y - X - Y$ $(X, Y \in \mathcal{S})$ が生成する部分加群で割ったもの．）$\mathcal{S}$ の構成については最後の節で述べることにして，次節でこの定理がどのように既約指標の問題と関連づくかを説明しよう．

6. 傾加群

注意深くここまで読まれていた方は（注意深くなくても？）まだタイトルにある tilting module が出てきていないことに気づくであろう．ここでようやくその定義を述べる．

定義 25　$V \in \mathrm{Rep}\, G$ のフィルトレーション $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r = V$ が Δ フィルトレーションであるとは，各 i に対して $V_i/V_{i-1} \simeq \Delta(\lambda_i)$ となる i が存在することである．∇ フィルトレーションも同様に定義する．

V が Δ フィルトレーションを持つとき，$(V : \Delta(\lambda)) = \#\{i \mid \lambda_i = \lambda\}$ と置く．すると $[V] = \sum_{\lambda}(V : \Delta(\lambda))[\Delta(\lambda)]$ が Grothendieck 群において成り立つ．$\{[\Delta(\lambda)]\}$ は基底であり，$(V : \Delta(\lambda))$ は $[V]$ をその基底で展開したときの係数であるとも言える．従って $(V : \Delta(\lambda))$ は Δ フィルトレーションのとり方によらず，この記号が正当化される．

定義 26　$V \in \mathrm{Rep}\, G$ が傾加群 (tilting module) であるとは，Δ フィルトレーションと ∇ フィルトレーションを両方持つことである．

$\mathrm{Tilt}\, G$ で傾加群全体を表し，$\mathrm{Tilt}_0\, G = \mathrm{Tilt}\, G \cap \mathrm{Rep}_0\, G$ とおく．

注意 27　定理 12 (3) から，$T_1, T_2 \in \mathrm{Tilt}\, G$ ならば $\mathrm{Ext}^{>0}(T_1, T_2) = 0$.

注意 28　多元環の表現論における言葉遣いとは若干異なることに注意する．特に，全体を生成するという条件がなく，例えば 0 は傾加群となる．

傾加群の直和因子はまた傾加群となることが示される（非自明である）ので，傾加群の分類は直既約なものの分類に帰着される．

定理 29 ([9, II.E.6 Proposition]) 任意の $\lambda \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して，直既約な傾加群 $T(\lambda)$ であって，

$$(T(\lambda) : \Delta(\mu)) = \begin{cases} 1 & (\mu = \lambda) \\ 0 & (\mu \not\leq \lambda) \end{cases}$$

を満たすものが同型を除きただ一つ存在する．また任意の直既約傾加群はある λ に対して $T(\lambda)$ と同型である．

例 30 $\Delta(0) = \nabla(0) = L(0)$ は自明表現であり，傾加群である．

$n = 2$ とする．$L(p, 0) \subset \nabla(p, 0)$ であり，例 2 における記述を見ると $\nabla(p, 0)/L(p, 0) \simeq L(p-1, 1)$ であることがわかる．また $\Delta(p, 0)$ はその双対．この二つの表現の構造を次のように書くことにする．(下に部分表現を書いている．)

$$\nabla(p,0) = \begin{array}{|c|}\hline L(p-1,1) \\ \hline L(p,0) \\ \hline \end{array}, \quad \Delta(p,0) = \begin{array}{|c|}\hline L(p,0) \\ \hline L(p-1,1) \\ \hline \end{array}.$$

この時 $T(p, 0)$ の構造は次で与えられる．

$$\begin{array}{r} \Delta(p-1,1) \\ \\ \Delta(p,0) \end{array} \begin{array}{|c|}\hline L(p-1,1) \\ \hline L(p,0) \\ \hline L(p-1,1) \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \nabla(p,0) \\ \\ \nabla(p-1,1) \end{array}$$

定理を見ると，$(T(\lambda) : \Delta(\mu))$ はどうなるのだろうかというのが気になる人も多いのではないだろうか．これは実際に興味深い問題で，p がある程度大きければ（具体的には $p \geq 2n-4$ ならば）既約表現の指標の計算とかかわる．正確な関係は結構面倒なのでここでは述べないが，例えば [2] の Introduction などを参照してほしい．

前節で述べた圏化との関係を述べよう．$B \in \mathcal{S}$ を $V \in \operatorname{Rep}_0 G$ に作用させた結果を $V * B$ と書く．

定理 31 $\mathcal{S}$ の作用は $\operatorname{Tilt}_0 G$ を保つ，また，$\mathcal{S}_0 = \{B \in \mathcal{S} \mid \Delta(0) * B = 0\}$ とおくと，圏同値

$$\mathcal{S}_0 \backslash \mathcal{S} \simeq \operatorname{Tilt}_0(G)$$

が $B \mapsto \Delta(0) * B$ により与えられる．

但し圏 $\mathcal{S}_0 \backslash \mathcal{S}$ は次のように定義される．まず $B_1, B_2 \in \mathcal{S}$ に対して $\operatorname{Hom}_{\mathcal{S}}(B_1, B_2)$ の部分空間 $I(B_1, B_2)$ を

$$I(B_1, B_2) = \{f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}}(B_1, B_2) \mid \text{ある } B_0 \in \mathcal{S}_0 \text{ が存在して } f \text{ は } B_0 \text{ を経由する }\}$$

と定める．$\mathcal{S}_0\backslash\mathcal{S}$ の対象は $\mathcal{S}$ の対象と同じであり，$B_1, B_2 \in \mathcal{S}$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_0\backslash\mathcal{S}}(B_1, B_2) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(B_1, B_2)/I(B_1, B_2)$$

とおくことで圏 $\mathcal{S}_0\backslash\mathcal{S}$ を定める．

これにより $\mathrm{Tilt}_0 G$ は完全に $\mathcal{S}$ により記述され，従って $\mathcal{S}$ から定まる量（p-Kazhdan-Lusztig 多項式）により $(T(\lambda) : \Delta(\mu))$ が記述されることが結論づけられる．

注意 32　実は定理 31 はそのままでは正しくなく，少し修正が必要となる．次節でコメントすることにする．

7. 圏 $\mathcal{S}$

圏 $\mathcal{S}$ の構成として知られているものは次の三つである．

- アフィン旗多様体上のパリティ層によるもの [10].
- 生成元と関係式によるもの [8].
- Soergel 両側加群によるもの [1].

このうち定理 24 の証明に最初に使われたものは三つ目なので，ここではその構成を述べよう．（のちに最初の実現を使う別証明も得られた [5].）

$\mathcal{S}$ は $(W_{\mathrm{aff}}, S_{\mathrm{aff}})$ という組に付随して構成される．$R = \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ を n 変数多項式環とし，その商体を Q とする．R および Q には対称群 S_n が変数の置換により作用する．一方，$W_{\mathrm{aff}} \simeq S_n \ltimes \{(y_i) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_i y_i = 0\}$ という同型があったので，これにより得られる $W_{\mathrm{aff}} \to S_n$ を使い W_{aff} を R や Q に作用させておく．まず次のように定義される圏 $\mathcal{C}$ を考える．$\mathcal{C}$ の対象は組 $(M, (M_Q^x)_{x \in W_{\mathrm{aff}}})$ で次を満たすものである．

- M は両側 R 加群.
- M_Q^x は両側 Q 加群で，$m \in M_Q^x$ および $f \in Q$ に対して $mf = x(f)m$ を満たす.
- 左 Q 加群と見たときの M_Q^x の次元は有限.
- 有限個の x を除き $M_Q^x = 0$.
- $M \otimes_R Q = \bigoplus_{x \in W_{\mathrm{aff}}} M_Q^x$.

この圏の対象は単に M と書かれる．$\mathcal{C}$ における射 $M \to N$ とは，両側 R 加群の準同型 $\varphi\colon M \to N$ であって，φ が誘導する $M \otimes_R Q \to N \otimes_R Q$ が任意の $x \in W_{\mathrm{aff}}$ に対して M_Q^x を N_Q^x に写すもののことである．$M, N \in \mathcal{C}$ ならば，両側 R 加群としての直和 $M \oplus N$ に $(M \oplus N)_Q^x = M_Q^x \oplus N_Q^x$ と定めることで $\mathcal{C}$ における直和を定めることができる．また，両

側 R 加群としてのテンソル積 $M \otimes N = M \otimes_R N$ に

$$(M \otimes N)_Q^x = \bigoplus_{yz=x} M_Q^y \otimes_Q N_Q^z$$

により $\mathcal{C}$ の対象の構造を入れることができ，これにより $\mathcal{C}$ はモノイダル圏となる．単位対象は R 自身を両側 R 加群と見たものに

$$(R_Q)^x = \begin{cases} Q & (x = 1), \\ 0 & (x \neq 1) \end{cases}$$

として $\mathcal{C}$ の対象の構造を入れたものである．$K_\oplus(\mathcal{C})$ を分裂 Grothendieck 群としよう．すると $\mathrm{ch}\colon K_\oplus(\mathcal{C}) \to \mathbb{Z}[W_{\mathrm{aff}}]$ を

$$\mathrm{ch}([M]) = \sum_{x \in W_{\mathrm{aff}}} (\dim_Q M_Q^x) x$$

により定義することができ，容易にわかるようにこれは環準同型を与える．

目的の圏 $\mathcal{S}$ は $\mathcal{C}$ の中に構成することができる．もう少し記号の準備を行う．$s \in S_{\mathrm{aff}} = \{s_{i,i+1}(0) \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{s_{1,n}(1)\}$ に対して $\alpha_s \in R$ を

$$\alpha_s = \begin{cases} X_i - X_{i+1} & (s = s_{i,i+1}(0)), \\ X_n - X_1 & (s = s_{1,n}(1)) \end{cases}$$

により定める．そこで

$$B_s = \{(f,g) \in R^2 \mid f \equiv g \pmod{\alpha_s}\}$$

と定める．R 両側加群の構造を $r_1(f,g)r_2 = (r_1 f r_2, r_1 g s(r_2))$ と定めると，$B_s \otimes_R Q = Q \oplus Q$．これに対して，

$$(B_s)_Q^x = \begin{cases} Q \oplus 0 & (x = 1), \\ 0 \oplus Q & (x = s), \\ 0 & (x \neq 1, s) \end{cases}$$

と定めることにより，$B_s \in \mathcal{C}$ となる．$\mathrm{ch}([B_s]) = 1 + s$ なので，$[B_s] \in K_\oplus(\mathcal{C})$ の像は $\mathbb{Z}[W_{\mathrm{aff}}]$ を生成する．

$\mathcal{S}$ を R および B_s $(s \in S_{\mathrm{aff}})$ を含み，$\oplus, \otimes$ 及び直和因子について閉じている最小の部分圏とする．

定理 33 (1) $\mathrm{ch}\colon K_\oplus(\mathcal{S}) \to \mathbb{Z}[W_{\mathrm{aff}}]$ は同型．

(2) $\mathcal{S}$ は Krull-Schmidt 圏．

(3) 各 $w \in W_{\mathrm{aff}}$ に対して直既約対象 $B(w) \in \mathcal{S}$ で $\mathrm{ch}([B(w)]) \in w + \sum_{x<w} \mathbb{Z}x$ を満たすものが同型を除きただ一つ存在する．また任意の既約対象はある w に関して $B(w)$ と同型である．

ここで $x < w$ は Bruhat 順序と呼ばれる Coxeter 系の構造を使い定義される W_{aff} の順序である．${}^{p}\overline{h}_{x,w} \in \mathbb{Z}$ を $\mathrm{ch}([B(w)]) = \sum_{x \in W_{\mathrm{aff}}} {}^{p}\overline{h}_{x,w} x$ により定め，$W_{\mathrm{aff},p} \simeq W_{\mathrm{aff}}$ を通じて，$x, w \in W_{\mathrm{aff},p}$ に対しても ${}^{p}\overline{h}_{x,w} \in \mathbb{Z}$ を定める．定理 31 は次を導く．

定理 34　$w, x \in W_{\mathrm{aff},p}^{+}$ に対して

$$(T(w0) : \Delta(x0)) = \sum_{y \in W_p} \mathrm{sgn}(y)\ {}^{p}\overline{h}_{yx,w}.$$

注意 35　${}^{p}\overline{h}_{x,w}$ における p は標数 p への依存性を書いたものだが，もしかしたらこの構成のどこに p があったか不思議に思うかもしれない．R は $\mathbb{K}$ 上の多項式環であり，p は $\mathbb{K}$ の標数である．p が設定にかかわる場所はここのみで，それ以外の設定は p に非依存である．このように $\mathcal{S}$ はその「形」は p には非依存な形で定義されていて，ただ係数のみが p にかかわるのである．

注意 36　$\mathcal{S}$ は R 圏，つまり Hom は R 加群の構造を持つ．$\mathrm{Tilt}_0(G)$ は $\mathbb{K}$ 圏でしかなく，この分だけ $\mathcal{S}_0 \backslash \mathcal{S}$ は $\mathrm{Tilt}_0 G$ より大きい．定理 31 の主張を正確にするためには，$\mathcal{S}_0 \backslash \mathcal{S}$ において R 作用を消しておく必要がある．これは単に各 Hom を $\mathrm{Hom} \otimes_R \mathbb{K}$ に取り換えればよい

$\mathcal{C}$ の定義において「両側 R 加群」を「次数付き両側 R 加群」に変えると，$\mathcal{S}$ は Hecke 環と呼ばれる $\mathbb{Z}[W_{\mathrm{aff}}]$ の一変数変形の圏化を与える．${}^{p}\overline{h}_{x,w}$ はこの変形パラメータを含む Laurent 多項式となる．これを ${}^{p}h_{x,w}(v) \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ と書き，p-Kazhdan-Lusztig 多項式と呼ぶ．(v が変形パラメータ．) ${}^{p}\overline{h}_{x,w}$ とは ${}^{p}\overline{h}_{x,w} = {}^{p}h_{x,w}(1)$ により結び付く．

$p = 0$ の時は Kazhdan-Lusztig 多項式と呼ばれ，[11] で定義された．この場合は圏化を使わずとも Hecke 環内部での定義を行うことができる．ただしそのように定義されたものとここでの定義が一致するかは非自明であり，アフィン旗多様体上の偏屈層を介することで示される．そのような高度な理論を使わない証明も Elias-Williamson[7] により与えられたが，いずれにせよ非自明である．

定理 34 は最初に Achar-Makisumi-Riche-Williamson [2] により，$\mathcal{S}$ の作用を使わない形で示された．実は定理自身は適切に定式化することで任意の p での成立が示される [13].

ただし，これで $(T(\lambda):\Delta(\mu))$ の計算が終わったというのは早計であるように思われる．${}^p h_{x,w}$ 自身の計算はまだ理解されたとは言えず，それは今後の課題の一つであろう．なお，Kazhdan-Lusztig 多項式（$p=0$ に対応する場合）は前述の Hecke 環内部での定義に基づく計算が効果的な計算方法を与え（結果が複雑であるので手でやるのは簡単ではないのだが）満足いく形で計算可能であるとみなされているようである．

参考文献

[1] N. Abe, *A bimodule description of the Hecke category*, Compos. Math. **157** (2021), no. 10, 2133–2159.

[2] P. N. Achar, S. Makisumi, S. Riche, and G. Williamson, *Koszul duality for Kac–Moody groups and characters of tilting modules*, J. Amer. Math. Soc. **32** (2019), no. 1, 261–310.

[3] P. N. Achar and S. Riche, *Dualité de Koszul formelle et théorie des représentations des groupes algébriques réductifs en caractéristique positive*, arXiv:1807.08690.

[4] R. Bezrukavnikov and S. Riche, *Hecke action on the principal block*, Compos. Math. **158** (2022), no. 5, 953–1019.

[5] J. Ciappara, *Hecke category actions via Smith-Treumann theory*, Compos. Math. **159** (2023), no. 10, 2089–2124.

[6] S. Donkin, *The blocks of a semisimple algebraic group*, J. Algebra **67** (1980), no. 1, 36–53.

[7] B. Elias and G. Williamson, *The Hodge theory of Soergel bimodules*, Ann. of Math. (2) **180** (2014), no. 3, 1089–1136.

[8] B. Elias and G. Williamson, *Soergel calculus*, Represent. Theory **20** (2016), 295–374.

[9] J. C. Jantzen, *Representations of algebraic groups*, second ed., Mathematical Surveys and Monographs, vol. 107, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[10] D. Juteau, C. Mautner, and G. Williamson, *Parity sheaves*, J. Amer. Math. Soc. **27** (2014), no. 4, 1169–1212.

[11] D. Kazhdan and G. Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Invent. Math. **53** (1979), no. 2, 165–184.

[12] S. Riche and G. Williamson, *Tilting modules and the p-canonical basis*, Astérisque (2018), no. 397, ix+184.

[13] S. Riche and G. Williamson, *Smith-Treumann theory and the linkage principle*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **136** (2022), 225–292.

[14] G. Williamson, *Schubert calculus and torsion explosion*, J. Amer. Math. Soc. **30** (2017), no. 4, 1023–1046, With a joint appendix with Alex Kontorovich and Peter J. McNamara.

Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo
3-8-1 Komaba Meguro-ku Tokyo 153-8914, Japan
Email address: abenori@ms.u-tokyo.ac.jp