TORSION-FREE CLASSES OF SMOOTH PROJECTIVE CURVES OF GENUS 0 AND 1

SHUNYA SAITO

Abstract. In this summary, we introduce the classification of torsion-free classes of the category of coherent sheaves on an elliptic curve via the slope stability condition.

1. 導入

部分圏の分類問題は，環の表現論や代数幾何学において傾理論やスキームの圏論的復元問題との関連から長い間研究されてきた．最も古典的な結果は Gabriel によるネーター・スキーム上の連接層の圏における Serre 部分圏の分類 [3] であり，彼は Serre 部分圏とスキームの特殊化閉部分集合の間に明示的な全単射を構成した．とくに特別な場合として可換ネーター環上の加群圏の Serre 部分圏を分類した．この結果に触発され，可換ネーター環の場合には様々な種類の部分圏がこれまで研究・分類されてきた [2, 6, 9, 10]．一方で，連接層の圏の部分圏に関する研究は Gabriel 以降あまり多くなく (cf. [1, 4, 7, 8])，一次元代数多様体の場合でもその分類はまだほとんど分かっていない．本稿では，楕円曲線（種数 1 の非特異射影曲線）の場合のトーションフリー類の分類を紹介する．

以下，代数閉体 k を固定し，すべての対象は k 上で考える．また任意の部分圏は充満部分圏であり同型で閉じていることを仮定する．**トーションフリー類 (torsion-free class)** とは，拡大と部分対象で閉じる部分圏を言う．トーション対の一部であることは仮定しないことに注意せよ．

2. 連接層の圏について

本論に入る前に非特異射影曲線 C 上の連接層の圏 $\mathsf{coh}\, C$ の位置づけを環の表現論の観点からを簡単に解説する．ネーター環 Λ に対して有限生成 Λ 加群のなすアーベル圏 $\mathsf{mod}\, \Lambda$ が定まるように，ネーター・スキーム X に対して X 上の連接層のなすアーベル圏 $\mathsf{coh}\, X$ が定まる．非特異射影曲線 C はネータースキームの中でも遺伝的有限次元代数 (たとえば道代数) に対応するものであり，アーベル圏 $\mathsf{coh}\, C$ は次のような性質を持つ：

- **Hom 有限 (Hom-finite)** である．すなわち，任意の $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathsf{coh}\, C$ に対して $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ は有限次元ベクトル空間である．
- **遺伝的 (hereditary)** である．すなわち，任意の $n \geq 2$ に対して $\mathrm{Ext}^n(-,-) = 0$ である．

このことから非特異射影曲線上の連接層の圏 $\mathsf{coh}\, C$ は，環の表現論において扱われる圏と非常に近い性質を持つアーベル圏である．一方で $\mathsf{coh}\, C$ はゼロでない射影対象を持たないなど，加群圏 $\mathsf{mod}\, \Lambda$ とは大きく異なる性質を持ち，環の表現論の手法が簡単には適用できない固有の興味深さを持っている．

The detailed version of this paper will be submitted for publication elsewhere.

本稿の研究対象は，**楕円曲線** (**elliptic curve**) と呼ばれる種数 1 の非特異射影曲線上の連接層の圏である．**種数** (**genus**) とは，非特異射影曲線 C に対して定まる非負の整数 g_C であり，アーベル圏 $\mathsf{coh}\, C$ の表現型を決定する不変量である．一般に g_C の値が大きいほどアーベル圏 $\mathsf{coh}\, C$ は複雑な構造を持ち，$g_C \leq 1$ ならばテイム表現型であるが，$g_C \geq 2$ のときはワイルド表現型になる．この意味で楕円曲線 E 上の連接層の圏 $\mathsf{coh}\, E$ の部分圏を調べる本研究は，ある種のテイム表現型アーベル圏の研究として位置付けることができる．

3. 楕円曲線のトーションフリー類

非特異射影曲線 C を考える．連接層の圏 $\mathsf{coh}\, C$ のトーションフリー類の大域的な構造を述べるために Mumford が導入したスロープ安定性について述べる．

連接層 $\mathcal{F} \in \mathsf{coh}\, C$ に対して**階数** $\operatorname{rk}\mathcal{F}$ という非負整数と**次数** $\deg\mathcal{F}$ という整数が定まる．これらはともに加法的関数を定める．これらの商を用いて $\mathcal{F}$ の**スロープ**を次で定める：

$$\mu(\mathcal{F}) := \frac{\deg\mathcal{F}}{\operatorname{rk}\mathcal{F}} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}.$$

連接層 $\mathcal{F} \in \mathsf{coh}\, C$ が**半安定** (**semistable**) であるとは，任意の部分対象 $\mathcal{G}$ に対して $\mu(\mathcal{G}) \leq \mu(\mathcal{F})$ が成立するときにいう．スロープ μ の半安定連接層のなす部分圏を $\mathsf{coh}_\mu\, C$ で表す．

上で導入したスロープ安定性はトーション対の “数値的な” 拡張を与える．アーベル圏 $\mathcal{A}$ の**トーション対** (**torsion pair**) $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ とは $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$ および $\mathcal{A} = \mathcal{X} * \mathcal{Y}$ を満たす部分圏の対であった．ここで $\mathcal{X} * \mathcal{Y}$ は次で定義される $\mathcal{A}$ の部分圏である:

$$\mathcal{X} * \mathcal{Y} := \{A \in \mathcal{A} \mid \text{完全列}\ 0 \to X \to A \to Y \to 0,\ X \in \mathcal{X},\ Y \in \mathcal{Y}\ \text{が存在する}\}.$$

これに対して部分圏の族 $\{\mathsf{coh}_\mu\, C\}_{\mu \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}}$ は次のような性質を持つ．

- $\mu > \nu$ のとき $\operatorname{Hom}(\mathsf{coh}_\mu\, C, \mathsf{coh}_\nu\, C) = 0$ となる．
- $\mathsf{coh}\, C = \bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_n} (\mathsf{coh}_{\mu_1}\, C) * (\mathsf{coh}_{\mu_2}\, C) * \cdots * (\mathsf{coh}_{\mu_n}\, C)$.

このスロープ安定性を用いてトーションフリー類の漸近的挙動を記述したのが次の補題である．

Lemma 1. 種数 g の非特異射影曲線 C を考える．トーションフリー類 $\mathcal{X} \subseteq \mathsf{coh}\, C$ がスロープ $\mu \in \mathbb{Q}$ の半安定連接層 $\mathcal{F}$ を含むとする．このとき $\mathcal{X}$ はスロープが $\mu - (2g-1)$ 未満のすべての半安定連接層を含む．

トーションフリー類 $\mathcal{X} \subseteq \mathsf{coh}\, C$ に対して

$$\mu^+(\mathcal{X}) := \sup\{\mu(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \in \mathcal{X}\ \text{は半安定}\}$$

とすれば，上の補題から $\mathcal{X}$ はスロープが $\mu^+(\mathcal{X}) - (2g-1)$ 未満のすべての半安定連接層を含むことになる．よって $\mathcal{X}$ を決定するには，$\mathcal{X}$ に属するスロープ $\mu^+(\mathcal{X}) - (2g-1)$ 以上 $\mu^+(\mathcal{X})$ 以下の半安定連接層を決定すればよいことになる．

楕円曲線 $(g = 1)$ の場合に補題 1 を用いるとスロープ μ の半安定連接層を含むトーションフリー類は，スロープ $\mu - 1$ 未満のすべての半安定連接層を含むことになる．じつはこの場合には補題 1 の評価を大きく精密することができ，次が成立する．

Theorem 2. 楕円曲線 E を考える．トーションフリー類 $\mathcal{X} \subseteq \mathsf{coh}\, E$ がスロープ $\mu \in \mathbb{Q}$ の半安定連接層 $\mathcal{F}$ を含むとする．このとき $\mathcal{X}$ はスロープが μ 未満のすべての半安定連接層を含む．

この定理を用いて先ほどと同じ議論をすると，トーションフリー類 $\mathcal{X} \subseteq \mathsf{coh}\, E$ を決定するには，$\mathcal{X}$ に属するスロープ $\mu^+(\mathcal{X})$ の半安定連接層を決定すればよいことになる．これをもとにトーションフリー類を分類することができ，次を得る．

Theorem 3. 楕円曲線 E を考える．

(1) 任意の $\mu \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ に対して，$\mu^+(\mathcal{X}) = \mu$ となるトーションフリー類 $\mathcal{X} \subseteq \mathsf{coh}\, E$ と E の部分集合の間には自然な一対一対応がある．

(2) 任意の $\mu \in\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ に対して，$\mu^+(\mathcal{X}) = \mu$ となるトーションフリー類 $\mathcal{X}$ がただ一つ存在する．

(1) の対応は明示的に書くことができるが，もう少し準備が必要なので本稿では省略する．

References

[1] M. Chen, Y. Lin, S. Ruan, *Stability approach to torsion pairs on abelian categories.* J. Algebra **636** (2023), 560–602.

[2] H. Enomoto, *IE-closed subcategories of commutative rings are torsion-free classes*, preprint (2023), arXiv:2304.03260v2.

[3] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323–448.

[4] Y. Hirano, G. Ouchi, *Prime thick subcategories on elliptic curves.* Pacific J. Math. **318** (2022), no. 1, 69–88.

[5] O. Iyama, Y. Kimura, *Classifying subcategories of modules over Noetherian algebras*, Adv. Math. **446** (2024), Paper No. 109631.

[6] T. Kobayashi, S. Saito, *When are KE-closed subcategories torsionfree classes?*, Math. Z. **307**, 65 (2024).

[7] H. Krause, G. Stevenson, *The derived category of the projective line.* Spectral structures and topological methods in mathematics, 275–297. EMS Ser. Congr. Rep. EMS Publishing House, Zürich, 2019.

[8] S. Saito, *Classifying torsionfree classes of the category of coherent sheaves and their Serre subcategories*, J. Pure Appl. Algebra **229** (2025), no. 1, Paper No. 107799.

[9] D. Stanley, B. Wang, *Classifying subcategories of finitely generated modules over a Noetherian ring*, J. Pure Appl. Algebra **215** (2011), no. 11, 2684–2693.

[10] R. Takahashi, *Classifying subcategories of modules over a commutative Noetherian ring*, J. Lond. Math. Soc. (2) **78** (2008), no. 3, 767–782.

Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo
3-8-1 Komaba Meguro-ku Tokyo 153-8914, Japan
Email address: shunya-saito@g.ecc.u-tokyo.ac.jp