ON SKEW BRACES: SIMILARITIES WITH RINGS AND GROUPS AND THEIR REPRESENTATIONS

YUTA KOZAKAI AND CINDY (SIN YI) TSANG

Abstract. Skew brace is an algebraic structure introduced as a tool to study the non-degenerate set-theoretic solutions of the Yang–Baxter equation. In this report, we shall first explain how skew braces share similarities with both rings and groups. After that, we shall introduce the definition of a skew brace representation that is due to Letourmy–Vendramin and Zhu, and then report on some recent results.

Key Words: skew brace, left and right ideals, ideal, representation, Maschke's theorem, Clifford's theorem

2000 *Mathematics Subject Classification*: 17D99, 20C15, 20C20

1. Introduction

Skew brace は，brace の一般化であり，どちらも Yang–Baxter 方程式の非退化集合論的解を研究するために導入された代数的構造である [1, 6].

Definition 1. Skew brace とは，二つの群演算を備えた集合 $A = (A, \cdot, \circ)$ であって，

$$\forall a, b, c \in A : \ a \circ (b \cdot c) = (a \circ b) \cdot a^{-1} \cdot (a \circ c) \tag{1.1}$$

を満たすものである．ただし，a^{-1} は a の $(A, \cdot)$ における逆元である．$(A, \cdot)$ と $(A, \circ)$ の単位元が一致するのは容易に示され，それを 1 と表記する．また，$(A, \cdot)$ と $(A, \circ)$ をそれぞれ A の加法群と乗法群と呼ぶ．

Definition 2. $A = (A, \cdot, \circ)$ を skew brace とする．

(1) 加法群 $(A, \cdot)$ がアーベル群であるとき，A を brace とも呼ぶ．
(2) 式 (1.1) だけでなく，任意の $a, b, c \in A$ に対して $(b \cdot c) \circ a = (b \circ a) \cdot a^{-1} \cdot (c \circ a)$ も成り立つとき，A が two-sided であると言う．

Brace と skew brace の典型例として，以下の例が知られている．

Example 3. 環 $(A, +, *)$ が与えられたとき，

$$\forall a, b \in A : \ a \circ b = a + b + a * b$$

とおくと $(A, \circ)$ がモノイドとなる．環 $(A, +, *)$ が radical であるとは，$(A, \circ)$ が実際に群をなすときに言う．このとき，$(A, +, \circ)$ が two-sided brace となる．

The detailed version [3] of §3 of this paper has been accepted for publication in Int. J. Group Theory. The second author was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 24K16891.

Example 4. 群 $(A,\cdot)$ が与えられたとき，

$$\forall a,b\in A:\ a\circ b=a\cdot b$$

とおくと $(A,\cdot,\circ)$ が two-sided skew brace となる．このように備えている二つの群演算が同じものになっているような skew brace は trivial であると言う．また，

$$\forall a,b\in A:\ a\circ b=b\cdot a$$

とおくと $(A,\cdot,\circ)$ も two-sided skew brace となる．このように備えている二つの群演算が互いに opposite になっているような skew brace は almost trivial であると言う．

上述の例からわかるように，skew brace は radical 環あるいは群の拡張として考えられる．実際，radical 環と two-sided brace が一対一対応することが知られている [6]．このような類似性があるため，環論および群論における概念・定理・研究手法などを skew brace に応用または一般化する試みがよく行われている．例えば，skew brace の同質類と Schur 被覆はそれぞれ [4, 5] によって定義されており，skew brace の分解は [2, 8] にて検討されている．素数べき位数の群に関する Lazard's correspondence を素数べき位数の skew brace に拡張する試みもあった [7]．

本稿の目的は二つある．一つ目は，skew brace における左右イデアルおよびイデアルという概念を紹介し，環または群と比較することである (§2)．二つ目は，[5, 9] によって提唱された skew brace の表現の定義を詳しく説明し，我々が [3] にて得た結果をいくつか紹介することである (§3)．

本稿では，以降 $A=(A,\cdot,\circ)$ を skew brace とする．

2. Skew brace における左右イデアルとイデアル

まず，A に備えている二つの演算 $\cdot$ と $\circ$ の差を測るツールとして，

$$\forall a,b\in A:\ a*b=a^{-1}\cdot(a\circ b)\cdot b^{-1}$$

と定義する．例えば，A が radical 環 $(A,+,*)$ からなる brace であるとき，上記の演算 $*$ は環の乗法 $*$ に一致する．これを鑑みて以下の定義をする．

Definition 5. A の左イデアルとは，

$$\forall a\in A,\ x\in I:\ a*x\in I$$

を満たす $(A,\cdot)$ の部分群 I のことである．同様に，A の右イデアルとは，

$$\forall a\in A,\ x\in I:\ x*a\in I$$

を満たす $(A,\cdot)$ の部分群 I のことである．

Example 6. A が radical 環 $(A,+,*)$ からなる brace であるとき，A の左イデアルは明らかに環 $(A,+,*)$ の左イデアルと一致する．同様に，A の右イデアルも環 $(A,+,*)$ の右イデアルと一致する．

Example 7. A が trivial であるとき，

$$\forall a,b\in A:\ a*b=1$$

が成り立つため，A の左イデアルも右イデアルも $(A,\cdot)$ の部分群に過ぎないことがわかる．そして，A が almost trivial であるとき，

$$\forall a,b\in A:\ a*b=a^{-1}\cdot b\cdot a\cdot b^{-1}$$

が成り立つため，$*$ は群の交換子 $[\,,\,]$ の類似として考えられ，A の左イデアルも右イデアルも $(A,\cdot)$ の正規部分群に過ぎないことがわかる．

Definition 5 では，I を加法群 $(A,\cdot)$ の部分群としていたが，左イデアルも右イデアルも自動的に乗法群 $(A,\circ)$ の部分群となる．任意の $a,b\in A$ に対して，

$$a\circ b=a\cdot(a*b)\cdot b,\quad \overline{a}=((\overline{a}*a)\cdot a)^{-1}=(a\cdot(a*\overline{a}))^{-1}$$

と書けるからである．ただし，$\overline{a}$ は a の $(A,\circ)$ における逆元である．実は，左右イデアルは，群の左右剰余類と強く関連する．

Proposition 8. I を $(A,\cdot)$ の部分群とする．このとき，

(1) I が A の左イデアルである $\iff \forall a\in A: a\circ I\subseteq a\cdot I$ が成り立つ．

(2) I が A の右イデアルである $\iff \forall a\in A: I\circ a\subseteq I\cdot a$ が成り立つ．

Proof. 任意の $a\in A,\ x\in I$ に対して，I は演算 $\cdot$ に関しては閉じているため，

$$a*x\in I \iff a^{-1}\cdot(a\circ x)\in I \iff a\circ x\in a\cdot I$$

$$x*a\in I \iff (x\circ a)\cdot a^{-1}\in I \iff x\circ a\in I\cdot a$$

が成り立つことに注意すると，どちらの主張も明らかである． □

I が A の左イデアルであるとき，任意の $a\in A,\ x\in I$ に対して (1.1) を用いて，

$$\overline{a}\circ(a\cdot x)=(\overline{a}\circ a)\cdot\overline{a}^{-1}\cdot(\overline{a}\circ x)=(\overline{a}*x)\cdot x\in I$$

と書けるため，$a\cdot I\subseteq a\circ I$ も成り立つことがわかる．I が A の右イデアルであるとき，A が two-sided であれば，任意の $a\in A,\ x\in I$ に対して同様に，

$$(x\cdot a)\circ\overline{a}=(x\circ\overline{a})\cdot\overline{a}^{-1}\cdot(a\circ\overline{a})=x\cdot(x*\overline{a})\in I$$

と書けるため，$I\cdot a\subseteq I\circ a$ も成り立つことが言える．しかし，A が two-sided でなければ，上記の計算ができないため，一般の場合には $I\cdot a\subseteq I\circ a$ は成り立たないと思われる．実際の反例を見つけることはできなかったが，Proposition 8 より，反例は無限 skew brace の中から探さなければならない．

Remark 9. Skew brace の研究において，左イデアルはさまざまな場面において用いられており，非常に重要な部分構造であるのに対して，右イデアルは我々の知る限り，[8] 以外の論文で用いられたことはまだない．

次は，skew brace におけるイデアルを定義する．環において，イデアルは商を構成するために必要な部分構造である．Skew brace において，商を構成するにはどのような部分構造が必要かと考えると，以下の条件が導かれる．

Definition 10. A のイデアルとは，

(1) I は $(A,\cdot)$ の正規部分群である．

(2) I は $(A,\circ)$ の正規部分群である．

(3) 任意の $a\in A$ に対して $a\cdot I=a\circ I$ が成り立つ．

を満たす部分集合 I のことを指す．このとき，A の演算 $\cdot$ と $\circ$ を用いて，

$$A/I=\{a\cdot I: a\in A\}=\{a\circ I: a\in A\}$$

に対して，自然な skew brace 構造を与えることができる．

Example 11. A が radical 環 $(A,+,*)$ からなる brace であるとき，A が two-sided であることと $(A,+)$ がアーベル群であることから，Proposition 8 とその後の議論より，A のイデアルは左イデアルかつ右イデアルである部分集合に過ぎない．Example 6 より，これは A のイデアルは環 $(A,+,*)$ のイデアルと一致することを意味する．

A のイデアルは，Proposition 8 より左イデアルかつ右イデアルである．しかし，環の場合と違ってその逆は成り立たない．例えば，A が trivial であるとき，Example 7 より左イデアルかつ右イデアルである部分集合は $(A,\cdot)$ の部分群に過ぎない．正規性が欠けているため，イデアルとならない例が存在する．

3. Skew brace の表現の定義と理論

まず，[5, 9] によって提唱された skew brace の表現の定義を述べる．係数体 k を固定しておき，すべての表現およびベクトル空間は k 上のものとする．

Definition 12. A の表現とは，同じベクトル空間 V に関する加法群と乗法群の表現

$$\beta : (A,\cdot) \longrightarrow \mathrm{GL}(V), \quad \rho : (A,\circ) \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

のなすペア (β,ρ) であって，かつ

$$\forall a,b \in A:\ \beta((a\circ b)\cdot a^{-1}) = \rho(a)\beta(b)\rho(a)^{-1} \tag{3.1}$$

を満たすものである．

条件 (3.1) を付ける理由について，[5] では述べられていなかったが，我々が著者の Letourmy 氏と Vendramin 氏に直接に伺った．これを説明するために，A の lambda 写像とも呼ばれる写像

$$\lambda : (A,\circ) \longrightarrow \mathrm{Aut}(A,\cdot);\ a \mapsto \lambda_a, \quad \lambda_a(b) = a^{-1}\cdot(a\circ b)$$

について考える．この λ は群の準同型であることがよく知られている [4, Proposition 1.9]．a^{-1} を左からではなく右から掛けても，同様の証明を用いて，

$$\lambda^{\mathrm{op}} : (A,\circ) \longrightarrow \mathrm{Aut}(A,\cdot);\ a \mapsto \lambda^{\mathrm{op}}_a, \quad \lambda^{\mathrm{op}}_a(b) = (a\circ b)\cdot a^{-1}$$

も群の準同型であることが示せる．よって，加法群と乗法群の半直積群

$$\Lambda_A := (A,\cdot) \rtimes_{\lambda^{\mathrm{op}}} (A,\circ)$$

を構成することができ，Λ_A において $(A,\circ)$ の $(A,\cdot)$ への共役作用は，

$$\forall a \in (A,\circ), b \in (A,\cdot):\ \lambda^{\mathrm{op}}_a(b) = aba^{-1}$$

によって与えられる．条件 (3.1) はこの共役作用を反映している．

Remark 13. Skew brace の研究において，λ を使う方が一般的であるが，我々は [5] に従って λ^{op} を使った．けれども，どちらを用いても本質は変わらないと思われる．

Proposition 14. 同じベクトル空間 V に関する A の加法群と乗法群の表現

$$\beta : (A,\cdot) \longrightarrow \mathrm{GL}(V), \quad \rho : (A,\circ) \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

のなすペア (β,ρ) が A の表現となるのは，

$$\varphi_{(\beta,\rho)} : \Lambda_A \longrightarrow \mathrm{GL}(V);\ \varphi_{(\beta,\rho)}(b,a) = \beta(b)\rho(a)$$

が群の準同型，すなわち Λ_A の表現であるとき，かつそのときに限る．また，群 Λ_A の表現はすべてこのように構成できる．

Proof. 既に述べたように，(3.1) は半直積群 Λ_A における $(A,\circ)$ の $(A,\cdot)$ への共役作用を反映しているため，この命題は明らかである． $\square$

[5] では明確に記述されてはいないが，Proposition 14 より，

$$\{A \text{ の表現}\} \longrightarrow \{\Lambda_A \text{ の表現}\}$$
$$(\beta,\rho) \longmapsto \varphi_{(\beta,\rho)}$$

は一対一対応であり，skew brace A の表現は群 Λ_A の表現と同一視できることがわかる．この対応を鑑みて，以下の定義をするのが自然である．

Definition 15. A の表現 (β,ρ) が<u>既約</u>であるとは，対応する Λ_A の表現 $\varphi_{(\beta,\rho)}$ が既約であるときに言う．<u>直既約</u>や<u>完全可約</u>などについても同様に定義する．

Definition 16. A の表現 (β,ρ) と (β',ρ') が<u>同値</u>であるとは，それぞれに対応する Λ_A の表現 $\varphi_{(\beta,\rho)}$ と $\varphi_{(\beta',\rho')}$ が同値であるときに言う．

すると，群の表現論におけるさまざまな定理が自然と skew brace の表現論に拡張する．我々 [3] は以下の三つの定理に着目し，それぞれの skew brace 版を示した．

(1) Maschke の定理とその逆 [3, Theorems 2.11 & 2.14].
(2) Clifford の定理の weak form および strong form [3, Theorem 3.6].
(3) 正標数かつ有限群の場合，自明な一次表現以外の既約表現が存在しないのは，群の位数が標数のべきであるとき，かつそのときに限る [3, Theorem 3.8].

ここでは，Clifford の定理の strong form 以外の定理の skew brace 版がどのように示されたかを簡単に説明する．

Theorem 17 (Maschke の定理の skew brace 版)**.** A を有限 *skew brace* とする．$\mathrm{char}(k)$ が 0 か $|A|$ と互いに素であるとき，A の有限次表現はすべて完全可約である．

Proof. $|\Lambda_A| = |(A,\cdot)||(A,\circ)| = |A|^2$ であることに注意すると，仮定より $\mathrm{char}(k)$ が 0 か $|\Lambda_A|$ と互いに素であることがわかる．Definition 15 より，この定理は通常の Maschke の定理から従う． $\square$

Maschke の定理の逆について，群 Λ_A の左正則表現を用いても示せるが，次元がより小さいベクトル空間 kA を用いても示せる．ただし，kA は集合 A を基底に持つベクトル空間とする．

Definition 18. A の<u>左正則表現</u>とは，加法群と乗法群それぞれの左正則表現

$$\beta_{\mathrm{reg}} : (A,\cdot) \longrightarrow \mathrm{GL}(kA), \quad \rho_{\mathrm{reg}} : (A,\circ) \longrightarrow \mathrm{GL}(kA)$$

のなすペア $(\beta_{\mathrm{reg}},\rho_{\mathrm{reg}})$ のことを指す．$(\beta_{\mathrm{reg}},\rho_{\mathrm{reg}})$ が (3.1) を満たすのは (1.1) を用いて容易に確かめられる [3, Proposition 2.12].

A の加法群と乗法群それぞれの右正則表現

$$\beta'_{\mathrm{reg}} : (A,\cdot) \longrightarrow \mathrm{GL}(kA), \quad \rho'_{\mathrm{reg}} : (A,\circ) \longrightarrow \mathrm{GL}(kA)$$

のなすペア $(\beta'_{\mathrm{reg}},\rho'_{\mathrm{reg}})$ も同様に (3.1) を満たすと思うかもしれないが，$(\beta'_{\mathrm{reg}},\rho'_{\mathrm{reg}})$ は A の表現になるとは限らないことに注意しておこう [3, Example 2.13].

Theorem 19 (Maschke の定理の逆の skew brace 版). A を有限 *skew brace* とする．A の有限次表現がすべて完全可約であるとき，$\mathrm{char}(k)$ は 0 か $|A|$ と互いに素である．

Proof. A の左正則表現 $(\beta_{\mathrm{reg}}, \rho_{\mathrm{reg}})$ について考える．kA において，$\delta := \sum_{a\in A} a$ の生成する部分空間 $\langle\delta\rangle$ は明らかに $\varphi_{(\beta_{\mathrm{reg}},\rho_{\mathrm{reg}})}$-不変であるため，仮定より $\langle\delta\rangle$ は $\varphi_{(\beta_{\mathrm{reg}},\rho_{\mathrm{reg}})}$-不変な補空間 U を持つが，群の場合と同様に

$$U = \left\{ \sum_{a\in A} k_a a \in kA \;\middle|\; \sum_{a\in A} k_a = 0 \right\}$$

となることが示せる [3, Theorem 2.14]．$\mathrm{char}(k)$ が $|A|$ の素因数であるとすると $\delta \in U$ となってしまうため，U が $\langle\delta\rangle$ の補空間であることに矛盾する． □

次は Clifford の定理の weak form の skew brace 版を考える．Skew brace において，イデアルは商を構成するために必要な部分構造であるため，群における正規部分群に相当するものとして考えられる．また，A のイデアル I に対して，同じ演算 $\cdot$ と $\circ$ を与えることができ，$I = (I, \cdot, \circ)$ が skew brace となるのは明らかである．

Theorem 20 (Clifford の定理の weak form の skew brace 版). A を有限 *skew brace* とし，I を A のイデアルとする．このとき，A の任意の既約表現 (β, ρ) について，制限して得られる I の表現 $(\beta|_I, \rho|_I)$ は完全可約である．

Proof. I が A のイデアルであることを使えば，

$$\Lambda_I := (I, \cdot) \rtimes_{\lambda^{\mathrm{op}}} (I, \circ)$$

が Λ_A の正規部分群であることが示せる（詳しい計算は [3, Theorem 3.6] を参照のこと）．したがって，この定理は通常の Clifford の定理から従う． □

最後に正標数の場合の有限 skew brace の既約表現を考える．自明な一次表現

$$\beta_0 : (A, \cdot) \longrightarrow \mathrm{GL}(k), \quad \rho_0 : (A, \circ) \longrightarrow \mathrm{GL}(k)$$

のなすペア (β_0, ρ_0) は明らかに (3.1) を満たし，A の既約表現である．

Theorem 21. A を有限 *skew brace* とする．$\mathrm{char}(k) > 0$ のとき，以下が同値である．

(1) $|A|$ が $\mathrm{char}(k)$ のべきである．
(2) A の既約表現は同値を除いて (β_0, ρ_0) のみである．

Proof. $|A|$ が $\mathrm{char}(k)$ のべきであるとき $|\Lambda_A| = |A|^2$ もそうであるため，群の表現論より Λ_A の既約表現は自明な一次表現のみである．Definitions 15 と 16 より，A の既約表現も同値を除いて (β_0, ρ_0) のみである．

逆に，$|A|$ が $\mathrm{char}(k)$ のべきでないとき，群の表現論より $(A, \circ)$ は ρ_0 と同値でない既約表現 $\rho : (A, \circ) \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ を持つ．$\beta : (A, \cdot) \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ を自明な準同型とすれば，(β, ρ) は明らかに (3.1) を満たし，(β_0, ρ_0) と同値でない A の既約表現である． □

群の表現と同様に，skew brace の表現に関しても既約表現の分類を試みるのは自然なことである．A の表現を Λ_A の表現と同一視して群の表現論を用いて分類するアプローチもあるが，skew brace の特性を考えると A の加法群と乗法群それぞれの表現を用いた分類が望ましい．しかし，$(A, \cdot)$ と $(A, \circ)$ それぞれの表現がすべてわかっていても，A の表現を分類するのは困難であると思われる．例えば，A の表現 (β, ρ) に

ついて，β と ρ のどちらかが既約であれば (β,ρ) も既約となるが，その逆は成立しない [3, Example 4.1]．また，A の表現 (β,ρ) と (β',ρ') が同値であるとき，β,β' と ρ,ρ' もそれぞれ同値になるが，その逆は成立しない [3, Example 4.4]．

4. Skew brace の表現の今後の展望

本稿では，skew brace の表現の定義を紹介し，その理論を簡単に説明した．次に考えるべきことは skew brace の表現の応用であろう．群の表現論を用いて Burnside の定理などが示せるように，skew brace の表現論を用いることで，どのような結果が得られるのかを考えていきたい．また，[5, 9] が提唱した定義 (Definition 12) に基づくと，skew brace の表現が群の表現に帰着するため，この定義の仕方が果たして適切なのかも検討すべきであると，我々は思う．

References

[1] L. Guarnieri, and L. Vendramin, *Skew braces and the Yang-Baxter equation*, Math. Comp. **86** (2017), no. 307, 2519–2534.

[2] E. Jespers, , Ł. Kubat, A. Van Antwerpen, and L. Vendramin, *Factorizations of skew braces*, Math. Ann. **375** (2019), no. 3-4, 1649–1663.

[3] Y. Kozakai and C. Tsang, *Representation theory of skew braces*, Int. J. Group Theory, in press.

[4] T. Letourmy and L. Vendramin, *Isoclinism of skew braces*, Bull. Lond. Math. Soc. **55** (2023), no. 6, 2891–2906.

[5] ———, *Schur covers of skew braces*, J. Algebra **644** (2024), 609–654.

[6] W. Rump, *Braces, radical rings, and the quantum Yang-Baxter equation*, J. Algebra **307** (2007), no. 1, 153–170.

[7] A. Smoktunowicz, *On the passage from finite braces to pre-Lie rings*, Adv. Math. **409** (2022), part B, Paper No. 108683, 33 pp.

[8] C. Tsang, *A generalization of Ito's theorem to skew braces*, J. Algebra **642** (2024), 367–399.

[9] H. Zhu, *The construction of braided tensor categories from Hopf braces*, Linear Multilinear Algebra **70** (2022), no. 16, 3171–3188.

(Yuta KOZAKAI)
Department of Mathematics
Tokyo University of Science
1-3 Kagurazaka, Shinjuku-ku
Tokyo, JAPAN

Email address: kozakai@rs.tus.ac.jp

(Cindy (Sin Yi) TSANG)
Department of Mathematics
Ochanomizu University
2-1-1 Otsuka, Bunkyo-ku
Tokyo, JAPAN

Email address: tsang.sin.yi@ocha.ac.jp