中山予想と関連する予想についての歴史的概説
ON NAKAYAMA CONJECTURE AND RELATED CONJECTURES WITH HISTORICAL VIEWPOINTS

MASAHISA SATO

ABSTRACT. In this article, we review famous and classical problem "Nakayama Conjecture", which was proposed by Japanese mathematician Tadashi Nakayama in 1958. This conjecture is as following;

Theorem *Let A be a finite dimensional algebra over a field K and $0 \to {}_AA \to E_1 \to E_2 \to \dots$ a mininal injective resolution of A. If all E_i's are projective, then ${}_AA$ is self-injective.*

Also we give conjectures so called "Generalized Nakayama Conjecture", "Strong Nakayama Conjecture", "Tachikawa Conjecture", "Finitistic dimension Conjecture" and so on. We discuss relations between their conjectures. The same lecture was given in International Conference on Algebra and its Applications held in Aligarh Muslim University, India from November 12 to 14, 2016. For the English version of this article will be published as the proceeding of the conference. So explanation parts of this report are written in Japanese.

1. INTRODUCTION

この報告集では、環論および表現論シンポジュームが創設されて 50 周年を迎えるにあたり、環論の基本的な未解決問題である「中山予想」と、これに関連する研究結果をまとめておく。この研究の中には、環論の半世紀の研究で培われた基本的な概念や手法が随所にあり、これを参照することで、若い研究者が環論の研究に興味を持ち、この問題を解決する努力の過程で、今後の環論の進展が図られることを期待したい。特に、体上の有限次多元環とアルティン環での違いを感じ取り、一般のアルティン環（あるいはより一般の環）の研究にまで、日本の環論研究の裾野が広がることを願うものである。

中山予想は、世界的によく知られた長い間未解決の予想である。中山正先生（名古屋大学）は、当時創始されたホモロジー代数の優越性・有効性を問う意味も込めて、1958 年に次の予想を提起されたと、太刀川弘幸先生（筑波大学）は 1994 年の最終講義で回顧されていた。

中山予想 (Nakayama Conjecture)

A を体 K 上の有限次多元環、$0 \to {}_AA \to E_1 \to E_2 \to \dots$ を ${}_AA$ の極小移入分解とする。全ての E_i が射影加群なら、${}_AA$ は自己移入的である。

多くの環論研究者が、中山予想の解決に向けて研究を積み上げてきたが、その中で、この研究の中心的な役割を果たしたのは、太刀川先生である。中山予想の仮定の中で、環の

The final version of this paper will be published in the proceeding of International Conference on Algebra and its Applications 2016（Aligarh India).

移入分解の最初の移入加群、すなわち環の移入包絡が射影加群であるという条件を満たす環が、QF-3 環ということで、この研究を通じて中山予想を詳細に分析している。これについては、1973 年に出版されたシュプリンガーの講義録 [14] を参照されたい。

この報告集では、以下の目次に沿って中山予想に関連する予想を挙げて解説をする。

2. 中山予想 (Nakayama Conjecture)

A を体 K 上の有限次多元環、$D(M) = \mathrm{Hom}_K(M, K)$ をベクトル空間 M の双対空間とする。序文でも書いたように、次の予想が 1958 年に [12] で提起された中山予想である。

予想 (NC: 中山予想 (Nakayama Conjecture)).

Assume ${}_AA$ *has a minimal injective resolution*

$$0 \to A \to E_1 \to E_2 \to \cdots \to E_n \to \cdots$$

such that all E_i*'s are projective, then* A *is self-injective.*

太刀川先生は、中山予想を次の 2 つの命題に分けて特徴付けた。(定理 2.4 参照)

予想 (TC: 太刀川予想 (Tachikawa Conjecture)).

[T1] $\mathrm{Ext}^i_A({}_AD(A), {}_AA) = 0$ が、すべての $i > 0$ で成立するなら、${}_AA$ は自己移入的である。

[T2] A を自己移入多元環（準フロベニュース多元環）、${}_AM$ を有限生成左 A 加群とする。$\mathrm{Ext}^i_A(M, M) = 0$ が全ての $i > 0$ で成立するなら、M は射影加群である。

注意. 中山予想では、A を有限次多元環でなく、アルティン環としても予想自体は有効である。しかし、条件 [T2] はアルティン環では一般に成立しない。従って、中山予想もアルティン環では成立しない。これは、 8 章 (7) で解説する。この意味で、中山予想は有限次多元環に関する典型的な問題と言える。

中山予想の話を続ける前に、上記の注意に関連して、有限次多元環とアルティン環の間のどのような違いが中山予想に影響を与えているか考えてみたい。

一つには、アルティン環は一般には自己双対ではないことがあげられる。勿論、有限次多元環はベクトル空間の双対性に関して自己双対である。そこで、自己双対なアルティン環について、中山予想が成立するかどうか、と改めて問うてみたい。

予想 (NNC: 新中山予想 (New Nakayama Conjecture)).

A を自己双対 (self-duality) を持つアルティン環で、${}_AA$ の極小移入分解

$$0 \to {}_AA \to E_1 \to E_2 \to \cdots \to E_n \to \cdots$$

で全ての E_i が射影的なら、A は自己移入的である。

自己双対なアルティン環の典型例はアルティン多元環 (artin algebra)、すなわち、中心上有限生成なアルティン環である。このアルティン多元環はエミー・アルティン (Emil Artin) によって定義されたものである。詳細については、モウリス・アウスランダー (Maurice Auslander)、イデュアン・ライテン (Idun Reiten)、スヴェレ・スメロー (Sverre O. Smalø) の論文 [3] を参照されたい。

次は、馬場良始先生が学会発表時に挙げた自己双対なアルティン環の例である。また、馬場先生は、日本数学会の雑誌「数学」[4] の論説記事の中で、自己双対なアルティン環の話題を取り上げ解説している。

(1) 可換環
(2) 単列環 (Amdal, Ringdal,1968 [1])
(3) soc$R$ が一つの単純加群の有限個の直和となっている原田環
(4) ホモジニアス原田環 (加戸次郎、大城紀代市 [9])
(5) ある種の準原田環

定義. (1) 任意の直既約射影加群 ${}_RP$ に対して、ある直既約射影的かつ移入的な加群 ${}_RI$ とある自然数 n があり、$P = (\mathrm{rad}^n R)I$ となるような環 R を**左原田環**という。

(2) 任意の射影加群は準移入 (quasi injective) 加群となるような環を**準原田環** という。

(3) 次の同値条件を満たす環 A を**左 QF-3 環**という。

(a) $E(A) \subset \prod A.$
ここで 、$E(A)$ は ${}_AA$ の移入包絡である。

(b) A は極小忠実加群 ${}_AM$ を持つ。
すなわち、${}_AM$ は忠実加群で、任意の忠実加群 ${}_AN$ は M の直和因子と同型である。

(c) ある巾等元 $f = f^2 \in A$ で Af が忠実移入加群となる。

(4) 環 A は、A が右かつ左 QF-3 環のとき **QF-3 環**という。

次の定理により、QH 環は QF-3 環の拡張概念であることがわかる。

定理 2.1 (馬場)**.** QH 環は QF-3 環である。eRe が局所単列環 (local serial ring) で (center of eRe) $\cap$ $(e \cdot \mathrm{rad}Re - (e \cdot \mathrm{rad}Re)^2)$ が空集合でなければ、R は自己双対である。

次は、上記の定理の条件を満たす環として馬場先生があげたものである。

例. D を斜体、集合 $R = D \times D \times D$ に次の積を入れる。

$$(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2y_1, x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1).$$

このとき、R は loewy length 3 の非可換局所単列環で
$(0, 1, 0)$ は (center of eRe)$\cap$$(e(\mathrm{rad}R)e - (e(\mathrm{rad}R)e)^2)$ の元である。

注意*.* 上記の例の R は、D 上の多項式環 $D[x]$ のイデアル (x^3) による剰余環 $D[x]/(x^3)$ と同型である。

中山予想と太刀川予想の同値性を示すために、次の概念と事実が必要である。

補題 2.2. 体 K 上の有限次多元環 A に対し、次の同型が成立する。

$$\mathrm{Ext}^i_A({}_AD(A), {}_AA) \cong \mathrm{Ext}^i_{A^e}(A, A^e).$$

ここで、$A^e = A \otimes_K A^{op}$ は A の**包絡多元環 (enveloping algebra)** である。

Proof.

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^i_A(D(A_A), {}_AA) &= \mathrm{Ext}^i_{A\otimes_K K}({}_AA\otimes_A D(A_A)_K, {}_AA_K)\\ &\cong \mathrm{Ext}^i_{A^e}({}_AA_A, \mathrm{Hom}_K(D(A_A)_K, {}_AA_K)).\end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned}{}_A\mathrm{Hom}_K(D(A_A)_K, {}_AA_K)_A &= {}_A\mathrm{Hom}_K(D(A_A)_K, D({}_KD({}_AA_K)))_A\\ &\cong {}_A\mathrm{Hom}_K(D(A_A)\otimes_K D({}_AA_K), {}_KK)_A\\ &\cong D(D({}_AA\otimes_K A_A))\\ &\cong {}_AA\otimes_K A_A.\end{aligned}$$

. □

定義. 左優越次元 (left dominant dimension)
環 A 上の極小移入分解

$$0\to {}_AA\to E_1\to E_2\to\cdots\to E_n\to\cdots$$

で $E_1,\ldots,E_n$ が射影加群となっている場合、$\ell.dom.dimA\geq n$ と表し、A の**左優越次元**は n 以上であるという。

補題 2.3 ([14] p.p.97)**.** A を QF-3 環で、Ae および fA を各々極小忠実左加群および極小忠実右加群とする。ℓ.dom.dim $A\geq 2$ で、${}_{fAf}fA$ の極小移入分解の最初から n 番目までの像が、${}_{fAf}fAe$ により有限余生 (finitely cogenerated) されるとする。このとき、次は同値である。

(1) ℓ.dom.dim $A\geq n+2$.
(2) $\mathrm{Ext}^i_{fAf}(fA, fA)=0$ $(i=1,2,\ldots,n)$.
(3) $\mathrm{Ext}^i_{eAe}(Ae, Ae)=0$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

以下が、中山予想と太刀川予想の同値性の証明である。

定理 2.4. [NC] $\iff$ [TC]

Proof. Assume [NC]. We first prove [T1]. We set $R=\mathrm{End}_A(A\oplus D(A))$. Let f and e in R be projections to A and $D(A)$, respectively. Then it holds $fRf=A,\ fR=fRf\oplus fRe=A\oplus D(A)$ as left A-module. Since

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^i_{fRf}(fR, fR) &= \mathrm{Ext}^i_A(A\oplus D(A), A\oplus D(A))\\ &= \mathrm{Ext}^i_A(D(A), A),\end{aligned}$$

we have $\mathrm{Ext}^i_{fRf}(fR, fR)=0$ from [T1]. By Lemma 2.3, we know ℓ.dom.dim.$R=\infty$. So R is self-injective by [NC]. Thus A is also self-injective. (See Lemma 2.5 below.)

Next we prove [T2]. Assume A is self-injective and M is finitely generated. We set $R=\mathrm{End}_A(A\oplus M)$. Let f and e in R be projections to A and M, respectively. By the same argument in the proof of [T1], it holds $\mathrm{Ext}^i_{fRf}(fR, fR)=\mathrm{Ext}^i_A(M, M)=0$ and R is self-injective.

On the other hand, since $A\oplus M$ is finitely generated generator (cogenerator), it is well known that this satisfies double centralizer property. i.e. $\mathrm{End}_R(A\oplus M)=A$. Hence $A\oplus M$ is a projectice A-module. (See Lemma 2.5.) Thus M is projective. □

上記の証明中にある内容は重要なので、補題として取り出しておく。

補題 2.5. (1) ${}_AM$ を $\mathrm{Ext}_A^1(M,M)=0$ を満たす有限生成左 A 加群とする。$R=\mathrm{End}_A(M)$ が自己移入的なら、M は左 $\mathrm{End}_R(M_R)$ 射影加群である

(2) $R=\mathrm{End}_A(A\oplus D(A))$ が自己移入的なら、$\mathrm{Ext}_A^1(D(A),A)=0$ である必要十分条件は A が自己移入的なことである。

Proof. (1) We take a short exact sequence of left A-modules

$$0\to N\to\oplus A\to M\to 0.$$

We apply $\mathrm{Hom}_A(-,M)$ to the above exact sequence, we have the split short exact sequence of right R-modules

$$0\leftarrow\mathrm{Hom}_A(N,M)\leftarrow\mathrm{Hom}_A(\oplus A,M)\leftarrow\mathrm{Hom}_A(M,M)=R\leftarrow 0$$

from the assumptions $\mathrm{Ext}_A^1(M,M)=0$ and R is right self-injective.
We apply $\mathrm{Hom}_R(-,M_R)$ to the above exact sequence, we have the split exact sequence

$$0\to\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_A(M,N),M)\to\oplus\mathrm{End}_R(M)\to\mathrm{Hom}_R(R,M)=M\to 0.$$

Thus M is a projective $\mathrm{End}_R(M)$-module.

(2) If part is clear, so we prove only if part. We remark $A=\mathrm{End}_R(M)$ since ${}_AM$ is generator. We apply (1) to $M=A\oplus D(A)$, then ${}_AD(A)$ is projective, that is, A_A is injective. So A is self-injective. $\square$

次の補題は、加群のカテゴリー同値に関する森田理論で用いられる事実である。これらは、東屋先生が与えた森田理論の新構成で有効に利用されている。(第 6 回代数学シンポジューム報告集参照)

補題 2.6. 左 A 加群 ${}_AM$ とその準同型環を $B=\mathrm{End}_AM$ とする。$d:\ A\to\mathrm{End}_BM_B$ を、$a\in A$ と $m\in M$ に対し $d(a)(m)=am$ と定義される自然な写像 (canonical map) とする。

(1) d が単射である必要十分条件は ${}_AM$ が忠実加群であることである。
(2) ${}_AM$ が生成加群なら、d は同型で M_B は有限生成射影加群である。
(3) ${}_AM$ が 有限生成射影加群なら、M_B は有限生成な生成加群である。

Proof. (1) is clear.
(2) Since generator is faithful, d is monomorphism. So we show d is an epimorphism. Take an epimorphism $\sum^n\oplus M\xrightarrow{(f_1,f_2,\cdots,f_n)}A$, then there are some $m_j\in M$ $(j=1,\cdots,n)$ such that

$$1_A=f_1(m_1)+f_2(m_2)+\cdots+f_n(m_n).$$

Also for $m\in M$, we define $\phi_m:{}_AA\to{}_AM$ by $\phi_m(a)=am$ for any $a\in A$. We remark $f_j\phi_m\in B$. For any $\varphi\in\mathrm{End}_B(M_B)$,

$$\varphi(m_j\cdot f_j\phi_{m_i})=\varphi(m_j)\cdot f_j\phi_{m_i}=f_j(\varphi(m_j))m_i\in Am_i.$$

Since

$$\sum_{j=1}^n f_j(m_j)m_i=\left(\sum_{j=1}^n f_j(m_j)\right)m_i=m_i,$$

we have

$$\varphi(m_i) = \left(\sum_{j=1}^{n} f_j(\varphi(m_j)) \right) m_i \in Am_i.$$

We set $\varphi(m_i) = a_i m_i$ and

$$a = a_1 f_1(m_1) + a_2 f_2(m_2) + \cdots + a_n f_n(m_n),$$

then for any $m \in M$,

$$\begin{aligned} m = 1 \cdot m &= f_1(m_1)m + f_2(m_2)m + \cdots + f_n(m_n)m \\ &= m_1(f_1\varphi_m) + \cdots + m_n(f_n\varphi_m). \end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned} \varphi(m) &= \varphi(m_1)f_1\varphi_m + \cdots + \varphi(m_n)f_n\varphi_m \\ &= (a_1 f(m_1) + \cdots + a_n f(m_n))m \\ &= am. \end{aligned}$$

We apply $\mathrm{Hom}_A(-, {}_AM_B)$ to the above splittable epimorphism, then we have a splittable epimorphism

$$\sum^{n} \oplus \mathrm{Hom}_A(M, {}_AM_B)_B = \sum^{n} \oplus B_B \to \mathrm{Hom}_A(A, {}_AM_B)_B = M_B \to 0.$$

Thus M_B is finitely generated projective.

(3) Assume ${}_AM$ is finitely generated projective, then we have a splittable epimorphim

$$\sum^{n} \oplus_A A \xrightarrow{(f_1, f_2, \cdots, f_n)} {}_AM \to 0.$$

That is, there are $f_i(1) = m_i \in M$ and $g_i : {}_AM \to {}_AA$ $(i = 1, \cdots, n)$ such that

$$m = m_1 g_1(m) + m_2 g_2(m) + \cdots + m_n g_n(m)$$

for any m. Hence $m = m_1(g_1\varphi_m) + \cdots + m_n(g_n\varphi_m)$. Remarking that $g_i\varphi_i \in B$, $m_1, \cdots, m_n$ are generators of M_B, that is, M_B is finitely generated B-module.

Apply $\mathrm{Hom}_A(-, {}_AM_B)$ to the above splittable exact sequence, we have a splittable epimorphism

$$\sum^{n} \oplus \mathrm{Hom}_A(A, {}_AM_B) = \sum^{n} \oplus M_B \to \mathrm{End}_A(M) = B_B \to 0.$$

That is, M_B is generator. □

3. **太刀川予想＋ (Tachikawa Conjecture+)**

定理 2.4 の証明中で、生成加群 (generator) および余生成加群 (cogenerator) が本質的な働きをしている。この概念を用いて、太刀川先生は中山予想と同値な次の予想を与えた。

予想 (TC+: 太刀川予想＋ (Tachikawa Conjecture +))**.**
${}_AM$ を有限生成で生成加群かつ余生成加群とする。
このとき、$\mathrm{Ext}^i_A(M, M) = 0$ が各 $i > 0$ で成立すれば、M は射影的である。

定理 3.1. [TC] $\iff$ [TC+]

Proof. Assume [TC]. Since M is generator cogenerator, we have a splittable epimorphism $\sum \oplus M \to A \to 0$. That is, for some $m, n > 0$, it holds ${}_AA < \oplus M^{(n)}$ and ${}_AD(A) < \oplus M^{(m)}$. Thus $\mathrm{Ext}^i_A(M, M) = 0$ implies $\mathrm{Ext}^i_A(D(A), A) = 0$. Hence A is self-injective by [T1] and M is projective by [T2].

Assume [TC+], then we have

$$0 = \mathrm{Ext}^i_A(D(A), A) = \mathrm{Ext}^i_A(D(A) \oplus A, D(A) \oplus A).$$

We show [T1]. Since $D(A) \oplus A$ is projective, $A = D(D(A))$ is injective.
We show [T2]. $\mathrm{Ext}^i_A(M, M) = 0$ for any $i > 0$ and A is self-injective imply $\mathrm{Ext}^i_A(M \oplus A, M \oplus A) = 0$. Also $D(A) \cong A$ implies A is generator cogenerator, thus $M \oplus A$ is finitely generated generator cogenrator. By [TC+], ${}_AM$ is projective. $\square$

4. 一般中山予想 (Generalized Nakayama Conjecture)

モウリス・アウスランダーとイデュアン・ライテンは、1975 年に次の予想を与えた [2]。

予想 (GNC: 一般中山予想 (Generalized Nakayama Conjecture))**.**
$0 \to {}_AA \to E_1 \to E_2 \to \cdots \to E_n \to \cdots$ を ${}_AA$ の極小移入分解とし、S を任意の単純加群とする。このとき、S はある E_i $(i > 0)$ の直和因子と同型である。

注意. 一般中山予想は、Ext を用いて次のように表される。

$$[\mathrm{GNC}] \iff \mathrm{Ext}^i_A(S, A) \neq 0 \text{ for some } i > 0.$$

生成加群を用いて表される次の一般中山予想＋を考えることで、一般中山予想が中山予想を含むことがわかる。

予想 (GNC+: 一般中山予想＋ (Generalized Nakayama Conjecture+))**.**
各 $i > 0$ で $\mathrm{Ext}^i_A(M, M) = 0$ となる生成加群 ${}_AM$ は有限生成射影加群である。

一般中山予想と一般中山予想＋の同値性を先に見ておく。

定理 4.1. [GNC] $\iff$ [GNC+]. 特に、 [GNC] $\implies$ [NC].

Proof. Assume [GNC]. We set $B = \mathrm{End}_A(M)$. Then M_B is finitely generated projective since ${}_AM$ is generator by Lemma 2.6(3) . Let

$$0 \to {}_AM \to E_1 \to E_2 \to \cdots$$

be a minimal injective resolution of ${}_AM$.

We apply $\mathrm{Hom}_A(M, -)$, then the following sequence

$$0 \to B = {}_B\mathrm{Hom}_A({}_AM_B, {}_AM) \to {}_B\mathrm{Hom}_A({}_AM_B, E_1) \to {}_B\mathrm{Hom}_A({}_AM_B, E_2) \to \cdots$$

is exact since $\mathrm{Ext}^i_A(M, M) = 0$ for any $i > 0$. Also ${}_B\mathrm{Hom}_A({}_AM_B, {}_AE_i)$ is injective since M_B is projective and ${}_AE_i$ is injective. Thus for some $m \gg 0$, $\sum_{i=1}^{m} \oplus \mathrm{Hom}_A({}_AM_B, {}_AE_i)$ is cogenerator by [GNC].

On the other hand, ${}_AE_i < \oplus \sum^{t_i} \oplus D(A)$ since $D(A)$ is an injective cogenerator.

So we have ${}_B\mathrm{Hom}_A({}_AM_B, E_i) < \oplus \sum^{t_i} \oplus {}_B\mathrm{Hom}_A({}_AM_B, D(A))$.
Since ${}_B\mathrm{Hom}_A({}_AM_B, D(A)) \cong {}_B\mathrm{Hom}_A(A \otimes_A M_B, A) = D(M_B)$ and $D(M_B)$ is cogenerator, M_B is generator. Thus ${}_AM$ is finitely generated projective and [GNC+] holds.

We assume [GNC+]. Let

$$0 \to {}_AA \to E_1 \to E_2 \to \cdots$$

be a minimal injective resolution of ${}_AA$ and $\{S_1, S_2, \ldots S_n\}$ the complete set of non-isomorphic simple modules included in some E_i. We take $f \in A$ such that $f^2 = f$ and

$${}_AE(S_1) \oplus {}_AE(S_2) \oplus \cdots \oplus {}_AE(S_n) = {}_AD(fA).$$

Then there is some m_i such that $E_i < \oplus_A D(fA)^{m_i}$. Remarking that $fA \otimes_A D(fA) = fD(fA) = D(fAf)$ as left fAf-module, we have the natural isomorphisms

$$\begin{aligned}{}_A\mathrm{Hom}_{fAf}(fA, fA \otimes_A D(fA)) &\cong {}_A\mathrm{Hom}_{fAf}(fA, D(fAf)) \\ &\cong {}_A\mathrm{Hom}_K(fAf \otimes_{fAf} fA_A, K) \\ &= {}_AD(fA_A).\end{aligned}$$

Hence we have the natural isomorphism

$$\varphi_i : \ {}_A\mathrm{Hom}_{fAf}(fA, fA \otimes E_i) \cong {}_AE_i.$$

From an exact sequence $0 \to {}_AA \to E_1 \to E_2$, we make an exact commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & {}_AA & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & E_2 & \\ & & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2} & \\ 0 \longrightarrow & {}_A\mathrm{Hom}_{fAf}(fA, fA \otimes_A A) & \longrightarrow & {}_A\mathrm{Hom}_{fAf}(fA, fA \otimes_A E1) & \longrightarrow & {}_A\mathrm{Hom}_{fAf}(fA, fA \otimes_A E2). & \end{array}$$

Since φ_1 and φ_2 are isomorphisms, we have an isomorphism

$${}_AA \cong \mathrm{End}_{fAf}(fA).$$

On the other hand, $fA \otimes_A D(fA) = D(fAf)$ is an injective fAf-module, so is $fA \otimes_A E_i$. Hence we have an injective resolution of ${}_{fAf}fA = {}_{fAf}fA \otimes_A A$

$$0 \to fA \otimes_A A \to fA \otimes_A E_1 \to fA \otimes_A E_2 \to \cdots .$$

From the above two facts, we have $\mathrm{Ext}^i_{fAf}(fA, fA) = 0$. Hence ${}_{fAf}fA$ is finitely generated projective by [GNC+], so fA is a generator as left $\mathrm{End}_{fAf}(fA)(\cong A)$-module, that is, fA_A is a finitely generated projective generator. Thus ${}_AD(fA)$ is cogenerator, which means $\{S_1, S_2, \ldots S_n\}$ is the complete set of all non-isomorphic simple modules. Hence [GNC] holds. □

5. 強中山予想 (Strong Nakayama Conjecture)

ロバート・コルビー (Robert R. Colby) とケント・フラー (Kent R. Fuller) は 1990 年に次の予想を与えた [6]。

予想 (SNC: 強中山予想 (Strong Nakayama Conjecture))**.**
任意の有限生成加群 ${}_AM$ に対し、ある $i \geq 0$ があり $\mathrm{Ext}^i_A(M, A) \neq 0$ となる。

注意. [SNC] $\Longrightarrow$ [GNC] が成立することは容易に分かる。

6. 有限射影次元の上限予想 (Finitistic Dimension Conjecture)

多元環 A の **finitistic global dimension** は、次のように有限射影次元の上限として定義される。

$$\mathrm{f.gl.dim}A = \sup\{\mathrm{p.d}(M) < \infty\}$$

ここで、$\mathrm{p.d}(M)$ は ${}_AM$ の射影次元を表す。

予想 (FDC: 有限射影次元の上限予想 (Finitistic Dimension Conjecture))**.**

$$\mathrm{f.gl.dim}A < \infty.$$

有限射影次元の上限予想は、次の定理より強中山予想を含むことがわかる。

定理 6.1.

$$[\mathrm{FDC}] \implies [\mathrm{SNC}]$$

Proof. Assume $n = \mathrm{f.gl.dim}A < \infty$. Take ${}_AM$ such that $\mathrm{Ext}^i_A(M, A) = 0$ for all $i \geq 0$.
Let

$$\cdots \xrightarrow{f_1} P_1 \xrightarrow{f_0} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$$

be a projective resolution of ${}_AM$. Then by assumption, we have an exact sequence

$$\cdots \leftarrow \mathrm{Hom}_A(P_1, A)_A \xleftarrow{\mathrm{Hom}_A(f_1,A)} \mathrm{Hom}_A(P_0, A)_A \xleftarrow{\mathrm{Hom}_A(f_0,A)} \mathrm{Hom}_A(M, A)_A = 0.$$

So we have the projective resolution of $\mathrm{ImHom}_A(f_{n+2}, A)$

$$0 \leftarrow \mathrm{ImHom}_A(f_{n+2}, A) \xleftarrow{\mathrm{Hom}_A(f_{n+2},A)} \mathrm{Hom}_A(P_{n+1}, A)_A \leftarrow \cdots$$

$$\leftarrow \mathrm{Hom}_A(P_1, A)_A \xleftarrow{\mathrm{Hom}_A(f_1,A)} \mathrm{Hom}_A(P_0, A)_A \xleftarrow{\mathrm{Hom}_A(f_0,A)} \mathrm{Hom}_A(M, A)_A = 0.$$

Since p.d $\mathrm{ImHom}_A(f_{n+2}, A) \leq n$, we have a splittable epimorphism

$$0 \leftarrow \mathrm{Hom}_A(P_1, A)_A \xleftarrow{\mathrm{Hom}_A(f_1,A)} \mathrm{Hom}_A(P_0, A)_A.$$

Thus we have a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(P_1, A)_A, A_A) & \xrightarrow{g} & \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(P_0, A)_A, A_A) & \longrightarrow & 0 \\
\cong\downarrow & & \cong\downarrow & & \\
P_1 & \xrightarrow{f_1} & P_0 & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Here, $g = \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(f_1 A_A)$. Thus f_1 is splittable epimorphism, which means $M = 0$.
$\square$

7. 傾版一般中山予想 (Tilting version of Generalized Nakayama Conjecture)

若松隆義先生は、ある講義の中で一般中山予想を傾理論との関連で特徴付けた予想を与えた。

予想 (TGNC: 傾版一般中山予想 (Tilting version of Generalied Nakayama Conjecture))**.**
T_A を傾加群 (tilting module)、A_A の極小優越分解 (minimal dominant resolution) を

$$0 \to A \to T_1 \to T_2 \to \cdots \to T_n \to \cdots$$

とする。このとき、T の直既約因子 T' に対し、ある i で $T' < \oplus T_i$ となる。

加群 T_A は、次の条件を満たすとき**傾加群**と呼ばれる。
(1) ある $i>0$ で $\mathrm{Ext}^i_A(T,T)=0$ となる。
(2) ある完全列

$$\cdots \to T_2 \to T_1 \to D(A)_A \to 0$$

で、各 i に対し $T_i < \oplus(\sum^{n_i} \oplus T)$ であり、

$$\mathrm{Hom}_A(T,T_2) \to \mathrm{Hom}_A(T,T_1) \to \mathrm{Hom}_A(T,D(A)) \to 0$$

が完全列となるものがある。

T_A を傾加群とする。完全列

$$0 \to A_A \to T_1 \to T_2 \to \cdots$$

は、次の条件を満たすとき**優越分解 (dominant resolution)** と呼ばれる。
(1) 各 i で $T_i < \oplus(\sum^{n_i} \oplus T_A)$ となる。
(2) $0 \leftarrow \mathrm{Hom}_A(A,T) \leftarrow \mathrm{Hom}_A(T_1,T) \leftarrow \mathrm{Hom}_A(T_2,T) \leftarrow \cdots$ が完全列となる。

注意. (若松) 極小優越分解が存在する。

若松先生は、同じ講義で次の定理を示した。

定理 7.1. [GNC] $\iff$ [TGNC]

Proof. Assume [TGNC]. Let (*) $0 \to {}_AA \to {}_AI_1 \to {}_AI_2 \to \cdots$ be a minimal injective resolution of ${}_AA$. ${}_AD(A_A)$ is a tilting module with a minimal dominant resolution (*). Indecomposable direct summands of ${}_AD(A_A)$ are injective envelops of all simple modules. That is, any simple module is a submodule of some I_i by [TGNC]. Hence [GNC] holds.

Next assume [GNC]. We set $B=\mathrm{End}_A(T_A)$. We know that a tilting module has the double centralizer property, we have $A=\mathrm{End}_B({}_BT)$. Let $0 \to A_A \to T_1 \to T_2 \to \cdots$ and $0 \to {}_BB \to T'_1 \to T'_2 \to \cdots$ be minimal dominant resolutions of A_A and ${}_BB$, respectively. We take a direct sum $\sum \oplus L$ of non-isomorphic indecomposable direct summands of some T_i. Since $\sum \oplus L < \oplus T$, there is $f \in B$ such that $f^2=f$ and $\sum \oplus L = fT$.

[TGNC] is equivalent to $f=1_B$, so we show $f=1_B$. We make a direct sum $\sum \oplus M$ of non-isomorphic indecomposable direct summands of some T'_i. By the same argument as above, there is $e \in A = \mathrm{End}(T_B)$ such that $e^2=e$ and $\sum \oplus M = Te$. We know that
(1) ${}_{fAf}fTe_{eAe}$, ${}_BBf_{fBf}$, ${}_{eAe}eA_A$ are tilting modules.
(2) ${}_BT_A \cong {}_BBf \otimes_{fBf} fTe \otimes_{eAe} eA$.
(3) ${}_BT_A$ is a tilting module iff ${}_A\mathrm{Hom}_K(T,K)_B = D(T)$ is a cotilting module.

Since ${}_BBf_{fBf}$ is a tilting module, there is an exact sequence

$$\cdots \to \sum \oplus Bf \to \sum \oplus Bf \to {}_BD(B) \to 0.$$

Hence we have an exact sequence

$$0 \to B \to \sum \oplus fD(B) \to \sum \oplus fD(B) \to \cdots,$$

hence $f=1_B$ by [GNC]. □

8. 他の関連予想 (Related Results and conjectures)

有限次多元環に対し、各予想間の関係をまとめると次のようになる。

[FDC] $\Longrightarrow$[SNC] $\Longrightarrow$ [GNC] $\Longleftrightarrow$[GNC+] $\Longleftrightarrow$[TGNC] $\Longrightarrow$[NC].

[NC] $\Longleftrightarrow$[TC+] $\Longleftrightarrow$[TC] $\Longleftrightarrow$[TC1] and [TC2]

アルティン環に対する [NNC] $\Longrightarrow$ 有限次多元環に対する [NC]

予想が成立する典型的な場合を、歴史を追って以下で挙げてみる。

(1) George V. Wilson [16]

定理 8.1. 正次数付き多元環では [GNC] が成立する。

(2) 太刀川弘幸 [14]

定理 8.2. 体 K 上の有限 p 群 G の群環 $K[G]$ では、[T2] が成立する。

(3) Rainer Schultz [13]

定理 8.3. 体 K 上の有限群 G の群環 $K[G]$ では、[T2] が成立する。

(4) Edward L. Green, Birge Zimmermann-Huisgen [8]

定理 8.4. $\mathrm{rad}^3 A = 0$ となる有限次多元環 A に対して、[FDC] が成立する。

(5) Peter Dräxler [7]

定理 8.5. $\mathrm{rad}^{2\ell+1} A = 0$ かつ $A/\mathrm{rad}^{\ell} A$ が有限表現型となる有限次多元環 A に対して、[GNC] が成立する。

(6) Yong Wang [15]

定理 8.6. $\mathrm{rad}^{2\ell+1} R = 0$ かつ $R/\mathrm{rad}^{\ell} R$ が有限表現型となるアルティン環 R に対して、[SDC] が成立する。

Proof. (王さん自身の証明)
Assume there is a finitely generated non-zero R-module ${}_R M$ such that $\mathrm{Ext}^i_R(M, R) = 0$ for all $i \geq 0$. For a projective resolution of M,

$$\cdots \to P_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} P_n \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0,$$

we set $\Omega_i = \mathrm{Im} f_i$ and denote $T^* = \mathrm{Hom}_R({}_R T, {}_R R_R)_R$.

By assumption, we have an exact sequence

$$0 \leftarrow \Omega_i^* \leftarrow P_{i-1}^* \leftarrow \cdots \leftarrow P_1^* \xleftarrow{f_1^*} P_0^* \leftarrow 0.$$

Thus p.d $\Omega_i^* \leq i-1$ for any $i \geq 1$. Since $\Omega_i^* \subset J P_i^*$, we have $J^{2\ell} \Omega_i^* = 0$ for any i.

We prove $\mathrm{Ext}^1_R(\Omega_2^*, R) \neq 0$ and $\mathrm{Ext}^1_R(\Omega_i^*, R) = 0$ for any $i \geq 3$. Since $P \cong P^{**}$ for any projective module P, we have the following commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & P_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & P_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{f_1} & P_0 \\
 & & \cong\downarrow & & \cong\downarrow & & \cong\downarrow & & \cong\downarrow & & \cong\downarrow \\
\cdots & \longrightarrow & P_{n+1}^{**} & \xrightarrow{f_{n+1}^{**}} & P_n^{**} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_1^{**} & \xrightarrow{{f_1}^{**}} & P_0^{**}.
\end{array}$$

Thus

$$0 \longleftarrow (\Omega_{n+3})^* \longleftarrow (P_{n+2})^* \longleftarrow (P_{n+1})^* \longleftarrow \cdots$$

is a projective resolution and

$$0 \longrightarrow (\Omega_{n+3})^{**} \longrightarrow (P_{n+2})^{**} \longrightarrow (P_{n+1})^{**}$$

is exact, which means $\mathrm{Ext}^1_R((\Omega_{n+3})^*, R) = 0$ for any $n \geq 0$.

Consider the following commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Omega_2^{**} & \longrightarrow & P_1^{**} & \xrightarrow{f_1^{**}} & P_0^{**} & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_R(\Omega_2^*, R) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \cong\downarrow & & \cong\downarrow & & & & \\
 & & & & P_1 & \xrightarrow{f_1} & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

then we know that f_1 is non-splittable. Thus $\mathrm{Ext}^1_R(\Omega_2^*, R) \neq 0$.

We fix $m \geq 1$. Take $0 \neq {}_RN$ such that p.d ${}_RN \leq m$, and $J^{2\ell}N = 0$. We set $N_1 = J^\ell N$, $N_2 = N/J^\ell N$.

Since R/J^ℓ is representation finite, let $\{C_1, \ldots, C_m\}$ be the complete set of non-isomorphic indecomposable modules and we have the decompositions

$$N_1 = \sum_{j=1}^m \oplus C_j^{a_j},\ N_2 = \sum_{j=1}^m \oplus C_j^{b_j}.$$

For $i > m$, $\mathrm{Ext}^{i+1}_R(N_1, R)_R \cong \mathrm{Ext}^i_R(N_2, R)$ is finitely generated.
We set $\ell(k, j) = \text{length } \mathrm{Ext}^k_R(C_j, R)_R$, then

$$\sum_{j=1}^m \ell(i+1, j) \cdot a_j = \sum_{j=1}^m \ell(i, j) \cdot b_j.$$

We denote $\mathbb{Z}$-module L_i $(i > m)$ by

$$\Big\{(c_1, \cdots, c_m, d_1, \cdots, d_m) \in \mathbb{Z}^{2m} \mid \sum_{j=1}^m \ell(i+1, j) \cdot c_j = \sum_{j=1}^m \ell(i, j) \cdot d_j\Big\}$$

They are $\mathbb{Z}$-submodules of the noetherian module $\mathbb{Z}^{2m}$. So an increasing sequence $L_0 \subset L_1 \subset \cdots$ terminates. That is, $L_{m_0} = L_{m_0+1} = \ldots$ for some m_0. Take $N = (\Omega_{m_0+3})^*$. Remarking that p.d $(\Omega_{m_0+3})^* < m_0 + 2$, $(a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_m) \in L_{m_0+2}$, thus (*) $(a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_m) \in L_{m_0} = L_{m_0+1}$.

From the exact sequence

$$0 \to J^\ell N \to N \to N/J^\ell N \to 0$$

and the fact

$$\mathrm{Ext}_R^{m_0+1}((\Omega_{m_0+3})^*, R) \cong \mathrm{Ext}_R^1(\Omega_3^*, R) = 0,$$

we have an exact sequence

$$0 \to \mathrm{Ext}_R^{m_0+1}(J^\ell N, R) \to \mathrm{Ext}_R^{m_0+2}(N/J^\ell N, R) \to \mathrm{Ext}_R^{m_0+2}(N, R) \to$$
$$\mathrm{Ext}_R^{m_0+2}(J^\ell N, R) \to \mathrm{Ext}_R^{m_0+3}(N/J^\ell N, R) \to \mathrm{Ext}_R^{m_0+3}(N, R) = 0.$$

From (*), we have

$$\text{length } \mathrm{Ext}_R^{m_0+1}(J^\ell N, R) = \text{length } \mathrm{Ext}_R^{m_0+2}(N/J^\ell N, R),$$
$$\text{length } \mathrm{Ext}_R^{m_0+2}(J^\ell N, R) = \text{length } \mathrm{Ext}_R^{m_0+3}(N/J^\ell N, R).$$

Thus

$$0 = \mathrm{Ext}_R^{m_0+2}((\Omega_{m_0+3})^*, R) = \mathrm{Ext}_R^1(\Omega_2^*, R) \neq 0,$$

which is a contradiction. □

(7) ライナー・シュルツ (Rainer Schultz) は次のような例を与えた。Lemma 2.6 と合わせると、**[T2] は一般にアルティン環では不成立である**ことがわかる。
従って、**中山予想は一般にアルティン環では不成立である。**

例. 準フロベニュース環 (自己入射的アルティン環) R と有限生成左 R 加群 ${}_RM$ で次の条件を満たすものがある。

(i) 各 $i > 0$ に対し、 $\mathrm{Ext}_R^i(M, M) = 0$ となる。
(ii) $M_{\mathrm{End}_R(M,M)}$ は、$\mathrm{End}_R(M, M)$ 加群として有限生成でない。

(8) ロベルト・マルティネス (Robert Martinez-Villa) は安定圏の関手の圏で、中山予想と同値な条件を考察した。

定理 8.7 (Robert Martinez-Villa). ℓ.dom.dim $A \geq n$ とする。このとき、任意の $k \leq n$ に対し、$\mathrm{Dom}_k = \{{}_AM \mid \ell.\mathrm{dom.dim}\ M \geq k\}$ は、加群圏の安定圏 $\underline{\mathrm{mod}}$-A で、共変有限 (contravariantly finite) である。

次の記号を用意する。

$$\tilde{\mathcal{F}}_k = \{F \in \mathrm{mod}(\underline{\mathrm{mod}}\text{-}A) | F(M) = 0 \text{ for any } M \in \mathrm{Dom}_k\}$$

$$\tilde{\mathcal{T}}_k = \{G \in \mathrm{mod}(\underline{\mathrm{mod}}\text{-}A) | G(M) = 0 \text{ for any } M \in \tilde{\mathcal{F}}_k\}$$

このとき、$(\tilde{\mathcal{T}}_k, \tilde{\mathcal{F}}_k)$ はトーション根基 (torsion radical) t_k を持つ遺伝的捩れ理論 (hereditary torsion theory) である。そこで、$\mathrm{Dom} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathrm{Dom}_k$ および $\tilde{\mathcal{F}} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \tilde{\mathcal{F}}_k$ とおき、捩れ理論 $(\tilde{\mathcal{T}},\ \tilde{\mathcal{F}})$ に対応するトーション根基を t とする。
マルティネスは次の予想を与えた [11]。

予想 (MC: マルティネス予想 (Martinez Conjecture)).
任意の $M \in \mathrm{mod}(\underline{\mathrm{mod}}\text{-}A)$ に対し、次のことが成立する。

(1) $t(M) = \bigcap_{k=0}^{\infty} t_k(M)$

(2) $t(M)$ は有限表示形 (finitely presented) である。

定理 8.8 (Martinez-Villa Roberto [10]). マルティネス予想は中山予想を含む。

(9) 恵昌常 (Cheng Chang Xi) [5] は、次のことを注意している。
優越次元は導来圏同値に関する不変量ではない。

例. 可環体上 4 次の上三角行列環 R は遺伝環なので優越次元は 1 である。この多元環とその傾多元環上の導来圏は導来圏同値であることはよく知られている。そこで、R の $(2,3)$ 成分を 0 とした R の傾多元環を考えれば、優越次元は 2 であり、優越次元は異なることが分かる。

References

[1] K.I. Amdal, F. Ringdal, *Catégories uniséraleles*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A·B, **267** (1968),A85-A87, A247-249.
[2] M. Auslander, I. Reiten, *On a generalized version of the Nakayama conjecture*, Proc. Amer. Math. Soc. **52** (1975), 69-74.
[3] M. Auslander, I. Reiten, S.O. Smalø, *Representation theory of Artin algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **36**, Cambridge University Press (1997).
[4] Y. Baba, *Atarashii Artin kan no nagare* (Japanese), Suugaku **67(3)** (2015),271-290. (Iwanami Shoten)
[5] C.C. Xi, *Dominant dimensions, derived equivalences and tilting modules*, Israel J. math **215 (1)**(2016),349-395.
[6] R.R. Colby and K.R. Fuller, *A note on the Nakayama Conjectures*, Tsukuba J. Mmath. Vol.**14** No. 2 (1990), 343—352.
[7] P. Dräxler, *A proof of the generalized Nakayama conjecture for algebras with $J^{2\ell+1} = 0$ and A/J^{ℓ}representation finite*, J. Pure and Applied Algebra **78(2)** (1992), 161-164
[8] E. L. Green, Birge Zimmermann-Huisgen, *Finitistic dimension of artinian rings with vanishing radical cube*, Math. Zeitschrift **206** (1991), 505-526.
[9] J. Kado and K. Oshiro, *Self-Duality and Harada Rings*, J.Algebra **211** (1999),384-408.
[10] R. Martinez-Villa, *Algebras of infinite dominant dimension and torsion theories*, Comm. Algebra **22** (1994), no. 11, 4519–4535.
[11] R. Martinez-Villa , *Contravariantly finite subcategories and torsion theories*, applied Categorical Structures **5** (1997), 321–337.
[12] T. Nakayama, *On algebras with complete homology*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **22** (1958), 300-307.
[13] R. Schltz, *Boundedness and Periodicity of Modules over QF Rings*, J. Algebra **101** (1986), 450-469.
[14] H. Tachikawa, *Quasi-Frobenius Rings and Generalizayuions, QF-3 and QF-1 Rings*, Lecture Notes in Mathematics **351**, Springer-Verlag, Inc., Berlin and New York, 1973.
[15] Y. Wang, *A remarks on the Strong Nakayama Conjecture*,1992.
[16] G.V. Wilson, *The Cartan Map on Categories of Graded Modules*, J. Algebra **85** (1983), 390-398.

Mathematical section, Faculty of Engineering
University of Yamanashi
Kofu, Yamanashi 400-8511 JAPAN
E-mail address: msato@yamanashi.ac.jp