SOURCE ALGEBRA VERSION OF DONOVAN'S CONJECTURE FOR FINITE GROUP ALGEBRAS
有限群代数におけるドノバン予想のソース代数版

SHIGEO KOSHITANI (越谷 重夫　こしたに)

Abstract. In the modular representation theory of finite groups there is a well-known and important conjecture called 'Donovan's Conjecture', which says that if we are given a finite p-group D (here p is a prime number), there should/would be only finitely many Morita equivalence classes of block algebras B of certain finite groups G such that D is a defect group of B. In this article we consider a more precise conjecture which is called 'Puig's Finiteness Conjecture', whose claim is described if we replace 'Morita' by 'splendid Morita (Puig)' in Donovan's Conjecture. We look at the case where the block algebras B are the principal blocks of finite groups whose defect groups are dihedral 2-group of order at least 8. This is joint work with Caroline Lassueur.

まず初めに、これは Caroline Lassueur との共同結果である。

有限群のモジュラー表現論において、ブロック理論は根本である。ここでブロックの定義を復習から。以下 G は有限群、k は標数 p (p はある素数）の代数的閉体、kG で群代数（多元環）を表すことにする。また、扱う加群はすべて有限生成で、主に右加群を考える。kG は有限次元 k 上代数であるから有限個の（両側加群としての）直既約成分に一意的に分解される。

$$kG = B_0 \times B_1 \times \cdots \times B_n$$

つまり、各 B_i は両側加群 (両側イデアル）として直既約で、kG のブロックと呼ばれる。自明な単純加群 k_G は必ずどこか一つのブロック B_i に含まれている（言い換えると $k_G{\cdot}B_i{\neq}0$ となる B_i がただ一つだけある）が、これを kG の主ブロックと呼び上の記号で、$B_0 =: B_0(kG)$ がそれだとする。以後単に B で kG のブロックを意味することとする。すると、B の不足群 (defect group) D が G-共役を除いて一意的に存在する（不足群は、有限群と素数で決まる Sylow p 部分群の一般化である)。因みに、今回ここで扱うのは主に主ブロック B_0 であるが、これの不足群とは G の Sylow p-部分群に他ならない。不足群の定義、および不足群 D の表現論が B の表現論を大きく統制（支配）するという事実は、この号の前の記事に述べたのでここでは省略する (例えば [17] 参照)。

それでは、まずは Donovan 予想を説明する。

Donovan 予想 D を有限 p-群とする。このとき、D を不足群に持つ（ある有限群の）ブロック B の森田同値類は高々有限個ではないだろうか？

The detailed version of this paper will be submitted for publication elsewhere.

この予想が肯定的に解けているいくつかの場合を挙げる。

定理 1. 次の場合には Donovan 予想は正しい。

(1) D が巡回群のとき。(B は有限表現型なのであるから当然)。
(2) D がいわゆる tame 表現型のとき（つまり、D が二面体群（位数 4 の Klein 群を含む)、一般四元群、準二面体群のとき)。Erdmann [3] (厳密には、一般四元群の場合には「ほとんど解けている」と言わねばならないが)。
(3) D が位数 8 の基本可換群（つまり位数 2 の群 3 つの直積）の場合。C.Eaton (2015)。（有限単純群の分類定理を使って)。

B は有限次元代数なのであるから、その表現論は直既約加群が森田同値を除いてわかれば、それは素晴らしいことである。もちろん、直既約加群の k 上次元などの情報は失われるが。ただ、我々の話は元々有限群 G から始まった。つまり、単なる森田同値では、有限群 G の情報はかなり失われてします（もちろん逆に、これを忘れたい、という場面、気持ちになることもあるが)。そこで登場したのが、Lluis Puig に依る　ソース代数同型同値 (=splendid Morita 同値=Puig 同値）の概念である。これの元々の定義ではなく、同値な言い換えの主張で以下に述べる（但し、そこにはもうソース代数は出てこない。題目にあるのに変ではあるが)。因みに、著者は長らく Puig 同値　と呼んでいた。Michle Broué（ブルエ）がそう呼んでいたからである。ところが、今年 2017 年カナダ・バンフでの研究集会で筆者とその共著者 C. Lassueur が、この記事の内容の半分ずつを講演をしたのだが、講演後の質疑応答で、ブルエ自身が「プーチ Puig は僕の友達だけれども、今後は、混乱を避けるために、そして用語の統一という意味でも、『Puig 同値』と呼ぶことはやめて『spliendid Morita 同値』と呼ぶことにしたらどうだろうか？」との発言があった。と言う訳で、私も以後 splendid Morita 同値　と呼ぶことにする。

定義. 有限群 G, G' の群代数 kG, kG' のブロックを B, B' とする。そして、B, B' の不足群をそれぞれ D, D' とする。このとき、

B と B' は spliendid Morita 同値である
$\Leftrightarrow$ 以下を充たす p-置換両側 (B, B')-加群 M が存在する:
対 $(M, M^\vee)$ は B と B' との間の森田同値を引き起こす。

ただし $M^\vee := \mathrm{Hom}_k(M, k)$ （つまり M の k-双対)。また M が p-置換加群であるとは、M は自然に右 $k(G \times G')$-加群になっているが、$G \times G'$ のある部分群 $\mathcal{Q}$ が存在して、M は誘導加群 $k_{\mathcal{Q}}{\uparrow}^{G\times G'}$ の直和因子になっている、という意味である。これはもちろん正しいのだが、これだけで何と $D \cong D'$ が導かれてしまうのである。Ll. Puig の 20 年くらい前の結果である。[20, Chapter 7]。そして、D と D' を同一視してしまうと、上の $\mathcal{Q}$ は $\Delta D := \{(d,d) | \forall d \in D\} \subseteq G \times G'$ としてよい。より詳しく言うと、M は そのソース（それは直既約 $k\Delta D$-加群である）が、endo-permutation 加群でありさえすれば良い（これらの用語の定義は、ここでは述べない)。これは非常に驚くべき強い結果なのである。一般に有限群のモジュラー表現論に於ける大問題の一つとして

「森田同値である二つのブロック B, B' の不足群たち D, D' は同型であろうか？」

がある。上の Puig の定理は、M の状況が良ければこの問題は正しい、と言っているからである。

若干、話が反れてしまったので、本題に戻す。今回の主役は次の予想である。

Puig の有限性予想. (M. Broué [1]) D を有限 p-群とする。このとき、D を不足群に持つ（ある有限群の）ブロック B の splendid Morita 同値類は高々有限個ではないだろうか？

もちろん、帰結は、Donovan 予想より真に強いのであるから、Puig の有限性予想は Donovan 予想を導く。Puig の有限性予想が肯定的に解けているいくつかの場合を挙げる。

定理 2. 次の場合には Puig の有限性予想は正しい。
(1) D が巡回群のとき。
(2) D が位数 4 の Klein 群のとき。Craven-Eaton-Kessar-Linckelmann [2]。

たったこれだけである。但し D ばかりだけではなくて、G にも条件を付ければいろいろ結果はある。例えば、[14, 9, 10, 13, 11, 12, 19]。

上記で、splendid Morita 同値は、森田同値より真に強い、と述べたがそれの理由として恐らく一番簡単な下記の例を挙げる。

例. $p = 3$, $G := \mathrm{SL}(2, 3)$ とする。$G = Q_8 \rtimes C_3$ である。つまり、 G は位数 8 の四元群 Q_8 を正規部分群に持ち、これと位数 3 の群 C_3 の半直積になっている。$D := C_3$ とすれば、D は G の Sylow 3-部分群で、G は 3-巾零群である。すると、kG は 3 つのブロックを持ち以下のようになっている。(講演では最後の defect zero のブロックが抜けていました。御詫びします。指摘して頂いた花木章秀さん、ありがとう)。

$$kG = B_0 \times B \times B', \text{ そして } B_0 \cong kD, \ B \cong \mathrm{Mat}_2(kD), \quad B' \cong \mathrm{Mat}_3(k) \quad k\text{-代数として}$$

B_0 は主ブロックでこれに関しての上の同型は splendid Morita 同値をも導いている。問題は B に現れる同型である。この同型から、明らかに B と kD は森田同値である。しかし、この同値は、splendid Morita 同値にはなっていない。その理由は以下の通りである。B のただ一つの単純加群（これは 2 次元）は、p-置換加群になっていない（例えば、[16, II Lemma 12.6 (iii)]）。一方、kD の唯一の単純加群はもちろん自明加群 k_D なので、これはもちろん p-置換加群。そして splendid Morita 同値の定義を思い出すと、これは B と kD が splendid Morita 同値ではない、ということを意味している。

そろそろ、主定理を述べることにする。

主定理 (Lassueur-越谷, 2017). $p = 2$ とする。また、G を有限群で Sylow 2-部分群 P を持ち、そして $P := D_{2^n}$ は位数が 8 以上の二面体群とする（つまり $n \geqq 3$)。そして $B := B_0(kG)$ を考える（P は B の不足群になっている)。このとき、B は次のいずれかと、splendid Morita 同値になっている。その上、以下の (1)-(6) に於いて、かってな二つの主ブロックたち $B_0^{(1)}$, $B_0^{(2)}$ が同じグループに入っていたら $B_0^{(1)}$ と $B_0^{(2)}$ は splendid Morita 同値であって、そして、違うグループに入っていたら必ず splendid Morita 同値ではない。
(1) kD_{2^n} ここで $n \geqq 3$。
(2) $B_0(k\mathfrak{A}_7)$。ただし $\mathfrak{A}_7$ は 7 次交代群。したがって、この場合は $P = D_8$ である。
(3) $B_0(k[\mathrm{PSL}(2, q)])$, $q \equiv 1 \pmod 8$, したがって $|P| = (q-1)_2$.
(4) $B_0(k[\mathrm{PSL}(2, q)])$, $q \equiv -1 \pmod 8$, したがって $|P| = (q+1)_2$.

(5) $B_0(k[\mathrm{PGL}(2,q)])$, $q \equiv 1 \pmod 4$, したがって　$|P| = 2(q-1)_2$.

(6) $B_0(k[\mathrm{PGL}(2,q)])$, $q \equiv -1 \pmod 4$, したがって　$|P| = 2(q+1)_2$.

ここで若干注意を。

注意.

(1) G が2-ベキ零群ではない可解群であれば、実は B は $k\mathfrak{S}_4$ と splendid Morita 同値になってしまう [15]。したがって、$P \cong D_8$. ここで $\mathfrak{S}_4$ は、もちろん 4 次対称群。

(2) 上の**主定理**は有限単純群の分類の一部を使っている。ただし、Sylow 2-部分群が二面体群なので Gorenstein-Walter [8] で十分である。

(3) 簡単なことではあるが、$\mathrm{PGL}(2,3) \cong \mathfrak{S}_4$, $\mathrm{PGL}(2,5) \cong \mathfrak{S}_5$ である。

もちろん証明を詳しく述べることはできないが、それの幾つかの鍵となっているものの一つは、以下の補題である。その主張は恐ろしく単純、簡単である。群論習いたての知識で十分である。

補題. 有限群 G が正規 2-部分群 Q を持ち、その剰余群が　$G/Q \cong \mathfrak{S}_3$ (3 次対称群) を満たしているとする。更に、G は $t \notin Q$ となっている位数 2 の元 t を持つとする。このとき、G は $t \in H \cong \mathfrak{S}_3$ となる部分群 H を持つ。

裏話. これの証明は演習問題として残しておく、と書きたいところだが、実は最初の証明は結構長く（数ページ）、Ron Solomon に教わった。有限群論の超大物である。Solomon は最初は（私が成り立って欲しいと思っていた）この主張は成り立たない（嘘）と思ったようである。しかし、その後彼は、長いが正しい証明を見つけ、筆者に教えてくれた。その後、彼が有限単純群分類定理の非常に重要な本 [5, 6] の打ち合わせのために、Richard Lyons と会って、上記の**補題**を彼に話したら、Lyons は直ちに「これは、いわゆる例の Baer-鈴木 (道夫）の定理から直ぐに導かれる」と見抜いた。Solomon と私はこれが適用できることに気が付かなかった訳である。Solomon が言うには「Richard の第一作目は J.L. Alpeirn との共著で書いた Baer-鈴木の定理の別証明だった。だから、Richard (Lyons) は、よく覚えていた訳さ！」。因みに、Baer-鈴木の定理は [4, Chapter 3, Theorem 8.2] にある。

謝辞　プログラム責任者 眞田克典先生、および会場関連で御世話になった佐藤真久先生 始め山梨大学の関係の方々に深く感謝の意を表します。

References

[1] M. Broué, *Equivalences of blocks of group algebras*, in "Finite-dimensional Algebras and Related Topics (Ottawa 1992)", Eds. V. Dlab and L.L. Scott, Kluwer Academic Pub., Derdrecht, 1994, pp.1–26.

[2] D.A. Craven, C.W. Eaton, R. Kessar, M. Linckelmann, *The structure of blocks with a Klein four defect group*, Math. Z. **268** (2011), 441–476.

[3] K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras*, Lecture Notes in Mathematics **1428**. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[4] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Harper and Row, New York, 1968.

[5] D. Gorenstein, R. Lyons and R. Solomon, *The Classification of the Finite Simple Groups, Number 2* (Math. Survay Monographs, Amer. Math. Soc., 1996).

[6] D. Gorenstein, R. Lyons and R. Solomon, *The Classification of the Finite Simple Groups, Number 3* (Math. Survey Monographs, Amer. Math. Soc., 1998).

[7] D. Gorenstein, J.H. Walter, *On finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups.* Illinois J. Math. **6** (1962), 553–593.
[8] D. Gorenstein, J.H. Walter, *The characterization of finite groups with dihedral Sylow* 2*-subgroups. I, II, III*, J. Algebra **2** (1965), 85–151, 218–270, 354–393.
[9] G. Hiss, R. Kessar, *Scopes reduction and Morita equivalence classes of blocks in finite classical groups.* J. Algebra **230** (2000), 378–423.
[10] G. Hiss, R. Kessar, *Scopes reduction and Morita equivalence classes of blocks in finite classical groups II.* J. Algebra **283** (2005), 522–563.
[11] R. Kessar, *Blocks and source algebras for the double covers of the symmetric and alternating groups*, J. Algebra **186** (1996), 872933.
[12] R. Kessar, *Equivalences for blocks of the Weyl groups.* Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 337–346.
[13] R. Kessar, *Source algebra equivalences for blocks of finite general linear groups over a fixed field.* Manusc. Math. **104** (2001), 145–162.
[14] R. Kessar, *Scopes reduction for blocks of finite alternating groups*, Quart. J. Math., **53** (2002), 443–454.
[15] S. Koshitani, *A remark on blocks with dihedral defect groups in solvable groups*, Math. Z. **179** (1982), 401–406.
[16] P. Landrock, *Finite Group Algebras and their Modules*, London Math. Soc. Lecture Note Series **84**, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
[17] H. Nagao, Y. Tsushima, *Representations of Finite Groups*, Academic Press, New York, 1988.
[18] L. Puig, *Une conjecture de finitudes sur les blocks*, unpublished manuscript.
[19] L. Puig, *On Joanna Scopes' criterion of equivalence for blocks of symmetric groups*, Algebra Colloq. **1** (1994), 25–55.
[20] L. Puig, *On the Local Structure of Morita and Rickard Equivalences between Brauer Blocks*, Birkhäuser, Basel, 1999.

Center for Frontier Science （先進科学センター）
Chiba University （千葉大学）
Chiba 263-8522 JAPAN （263-8522 千葉市稲毛区弥生町）
E-mail address: koshitan@math.s.chiba-u.ac.jp