ON LOEWY LENGTHS OF CENTERS OF BLOCKS

YOSHIHIRO OTOKITA

Abstract. We consider the center ZB of a block B of a finite group with respect to an algebraically closed field of prime characteristic. A result of Okuyama in 1981 has proved that the Loewy length $\mathrm{ll}ZB$ of ZB is bounded above by $|D|$ where D is a defect group of B. In this paper we improve this bound and classify all blocks such that $|D|-3 \leq \mathrm{ll}ZB \leq |D|-1$.

Key Words: Finite group, block, defect group, center, Loewy length.

2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 20C15, 20C20; Secondary 16S34.

1. 序論

本稿は第４９回環論および表現論シンポジウムにおける講演内容にいくつかの補足を加えてまとめたものである．

以下では F を標数 $p > 0$ の代数的閉体，G を有限群とする．このとき群環 FG は (FG, FG)-両側加群として直既約分解することができ，各直和因子を FG のブロックという．また各ブロック B に対し，その不足群と呼ばれる p-群が定義される．有限群のモジュラー表現論において,「ブロック B の代数的構造と不足群 D の関係を調べる」という研究が重要な問題の１つとして挙げられる．本稿では特に B の中心 ZB について，その Loewy length $\mathrm{ll}ZB$ を用いて考察する．本研究の動機は奥山 [6] による結果，$\mathrm{ll}ZB \leq |D|$ であった．本稿ではこの不等式を精密化し，その応用として $|D|-3 \leq \mathrm{ll}ZB \leq |D|-1$ を満たすブロックが７通りに分類できることを示す．これらの結果は [7]，[8] に基づいている．

2. いくつかの準備

この章ではいくつかの表記や定義を述べる．

G の共役類全体の集合を $\mathrm{Cl}(G)$ とする．各 $C \in \mathrm{Cl}(G)$ に対し，その不足群 $\delta(C)$ を中心化群 $C_G(g)$ の Sylow p-部分群の１つとして定める（ただし，$g \in C$）．また C の class sum C^+ が

$$C^+ = \sum_{g \in C} 1_F \cdot g \in FG$$

によって定義される．このとき FG の中心 ZFG は class sum 全体を基底に持つことが知られており,

$$ZFG = \sum_{C \in \mathrm{Cl}(G)} FC^+ \tag{2.1}$$

本稿の最終原稿は ”Characterizations of blocks by Loewy lengths of their centers” として Proc. Amer. Math. Soc. に掲載予定である（Reference [8]）.

を満たす．FG のブロックへの分解，すなわち (FG, FG)-両側加群としての直既約分解には，FG の単位元の中心的原始べき等元への分解が対応する．よって，任意のブロック B に対し，

$$e = e^2, \quad B = FGe$$

となる $e \in ZFG$ が存在し，(2.1) より

$$e = \sum_{C \in \mathrm{Cl}(G)} a_C \cdot C^+, \quad a_C \in F \tag{2.2}$$

と表せる．ここで次の補題を用意する．

Lemma 1 ([5, V, Lemma 1.7])**.** (2.2) において，以下の 2 条件を満たす $C \in \mathrm{Cl}(G)$ が存在する．

(1) $a_C \neq 0$.
(2) $a_{C'} \neq 0$ となる任意の $C' \in \mathrm{Cl}(G)$ に対し，$\delta(C')$ のある G-共役が $\delta(C)$ に含まれる.

上の条件を満たす $C \in \mathrm{Cl}(G)$ に対し，その不足群 $\delta(C)$ を $\delta(B)$ と書いて，B の不足群という．以下では $\delta(B)$ を単に D と書くこととする．

序論で述べた通り，有限群の表現論においては B の構造と D の関係を調べることが重要な問題の 1 つとして挙げられる．例えば $D = 1$ であることと B が単純環であることは同値である（e.g. [5, III, Theorem 6.37]）．また，非同型な既約右 B-加群全体の個数を $l(B)$，位数 m の巡回群を $\mathbb{Z}_m$ とすると次の事実が知られている．

Theorem 2 (Linckelmann [4])**.** B を FG のブロック，D をその不足群とする．D が巡回群ならば B は $F[D \rtimes H]$ と導来同値である．ここで H は D の自己同型群の p'-部分群（すなわち $\mathbb{Z}_{p-1}$ の部分群）と同型で，$|H| = l(B)$ を満たし，$\rtimes$ は半直積を表す.

本稿では特に B の中心 ZB と D との関係について考察する．

3. ZB の Loewy length

中心 ZB の構造を調べるために，その Loewy length を導入する．すなわち，ZB の Jacobson radical JZB に対して

$$\mathrm{ll}ZB = \min\{n \geq 1 \mid JZB^n = 0\}$$

である．本研究の動機は奥山による次の結果であった．

Theorem 3 (Okuyama [6])**.** FG のブロック B とその不足群 D に対し，

$$\mathrm{ll}ZB \leq |D|.$$

また以下は同値である．

(1) $\mathrm{ll}ZB = |D|$.
(2) B はべき零ブロックで D は巡回群.

本稿では「べき零ブロック」については言及しないが，上の（1），（2）の条件は「B は $F[\mathbb{Z}_{|D|}]$ と森田同値」と同値である（Broué-Puig [1] と Puig [9] による）．よって B の表現を調べるためには $F[\mathbb{Z}_{|D|}]$ を調べれば良いが，これは巡回 p-群の群環なので非常に分かりやすい．本研究の目的は定理 3 の式を精密化し，$\mathrm{ll}ZB$ の値による B の分類を発展させることである．

4. 主結果

次の定理 4 は [8]，および [7, Theorem 1.3] に述べられている．

Theorem 4 (Otokita [7], [8]). *B を FG のブロック，D をその不足群とする．また D の位数を p^d，指数 (exponent) を p^ε とすると次が成り立つ．*

$$\mathrm{ll}ZB \leq p^d - p^{d-\varepsilon} + 1.$$

一般に $p^d - p^{d-\varepsilon} + 1 \leq p^d$ であるから定理 3 の前半は定理 4 の系として得られる．また $\mathrm{ll}ZB = p^d$ のとき，$d = \varepsilon$ となって D が巡回群であることもわかる．このときに B がべき零ブロックとなることを上の定理からは読み取ることができないが，[3, Corollary 2.8] から導くことができる．

定理 4 の系として，$\mathrm{ll}ZB$ の値による B の分類をさらに進めることができる．

Theorem 5 (Otokita [7], [8]). *B を FG のブロック，D をその不足群とする．このとき $\mathrm{ll}ZB = |D| - 1$ となることと，B が以下のいずれかを満たすことは同値である．*

(1) $D \simeq \mathbb{Z}_3$，$l(B) = 2$.
(2) $D \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $l(B) = 1$.

上の条件（１）は D が巡回群の場合なので定理 2 を用いて B の表現を決定できる.（２）の場合は B がべき零ブロックとなり，定理 3 の後半と同様に B は $F[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2]$ と森田同値である．

Theorem 6 (Otokita [7], [8]). *B を FG のブロック，D をその不足群とする．このとき $\mathrm{ll}ZB = |D| - 2$ となることと，B が以下のいずれかを満たすことは同値である．*

(1) $D \simeq \mathbb{Z}_5$，$l(B) = 2$.
(2) $D \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $l(B) = 3$.

条件（１）の場合は定理 5 と同様，定理 2 に帰着できる．条件（２）のブロックは Erdmann [2] によって分類が完了しており，２つの森田同値類が存在する（講演時にはこの２つを区別し，３通りに分類した）.

最後に $\mathrm{ll}ZB = |D| - 3$ となるブロックについて述べる．

Theorem 7 (Otokita [7], [8]). *B を FG のブロック，D をその不足群とする．このとき $\mathrm{ll}ZB = |D| - 3$ となることと，B が以下のいずれかを満たすことは同値である．*

(1) $D \simeq \mathbb{Z}_5$，$l(B) = 4$.
(2) $D \simeq \mathbb{Z}_7$，$l(B) = 2$.
(3) $D \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, $l(B) = 1$.

条件（１）,（２）の場合は，やはり定理 2 に帰着される.（３）の場合は B がべき零ブロックとなり $F[\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2]$ と森田同値である．

References

[1] M. Broué, L. Puig, *A Frobenius theorem for blocks*, Invent. Math. **56** (1980), 117–128.
[2] K. Erdmann, *Blocks whose defect groups are Klein four groups: a correction*, J. Algebra **76** (1982), 505–518.
[3] S. Koshitani, B. Külshammer, B. Sambale, *On Loewy lengths of blocks*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **156** (2014), 555–570.

[4] M. Linckelmann, *Derived equivalence for cyclic blocks over a P-adic ring*, Math. Z. **207** (1991), 293–304.
[5] H. Nagao, Y. Tsushima, *Representations of finite groups*, Academic Press Inc., Boston, MA (1989).
[6] T. Okuyama, *On the radical of the center of a group algebra*, Hokkaido Math. J. **10** (1981), 406–408.
[7] Y. Otokita, *Some studies on Loewy lengths of centers of p-blocks*, arXiv:1605.07949v2.
[8] ———, *Characterizations of blocks by Loewy lengths of their centers*, Proc. Amer. Math. Soc., in press.
[9] L. Puig, *Nilpotent blocks and their source algebras*, Invent. Math. **93** (1988), 77–116.

Department of Mathematics and Informatics
Graduate School of Science
Chiba University
E-mail address: `otokita@chiba-u.jp`