SURVEY ON REPRESENTATION THEORY OF QUIVER HECKE ALGEBRAS

SUSUMU ARIKI (有木　進)

Abstract. This survey article aims at non-experts. We introduce cyclotomic quiver Hecke algebras with focus on finite and affine Lie types. We begin with explaining how they naturally generalize the group algebra of the symmetric group and the finite Hecke algebra, by mentioning Brundan and Kleshchev's theorem. After giving the definition of the cyclotomic quiver Hecke algebra, we state the fundamental theorem by Kang and Kashiwara on the categorification of integrable highest weight modules, we consider finite Lie types and explain construction of irreducible modules by Benkart-Kang-Oh-Park, and standard and costandard modules by Syu Kato and Brundan-Kleshchev-McNamara. Finally, I briefly explain various Fock spaces, which appear in my series of papers with Euiyong Park.

1. Introduction

昔，Lascoux，Leclerc と Thibon の提案した対称群に付随するヘッケ代数の分解係数に関する予想というものがあり，予想を解決するにあたりヘッケ代数のブロック代数が $A_\ell^{(1)}$ 型リー代数の基本加群 $V(\Lambda_0)$ の重み空間の圏化を与えるというアイデアを用いた．その際併せて円分商という概念を導入し，$G(m,1,n)$ 型ヘッケ代数と呼ぶアフィンヘッケ代数の円分商を用いることで基本重み Λ_0 以外の支配的重み Λ に対する最高重み可積分加群 $V(\Lambda)$ も圏化した．$G(m,1,n)$ 型ヘッケ代数は同時期にリー型有限群の非等標数モジューラー表現の研究のため Broué や Malle が複素鏡映群の群代数の変形として導入した円分ヘッケ代数の例になっており，以後 $G(m,1,n)$ 型の円分ヘッケ代数の表現論の研究も欧米の一部研究者の興味を引くことになった．その研究者の中には，Khovanov や Rouquier といった強力な数学者も含まれていて，その後しばらくたって，任意の対称化可能カルタン行列 A に付随するリー代数 $\mathfrak{g}(A)$ の可積分加群 $V(\Lambda)$ をより精密にした量子普遍包絡代数 $U_q(\mathfrak{g}(A))$ の可積分加群 $V_q(\Lambda)$ の圏化のために Khovanov と Lauda により円分箙ヘッケ代数が導入された．Rouquier も独立にアフィン箙ヘッケ代数を導入したのでアフィン箙ヘッケ代数は KLR 代数，円分箙ヘッケ代数は円分 KLR 代数とも呼ばれる．以上の経緯でわかるように，円分箙ヘッケ代数は対称群の群代数やヘッケ代数の広範な一般化である．

この概説論文では，最初に従来対称群特有のヤング図形の言葉で記述されてきた対称群のモジュラー表現論がより一般的な設定でどう記述されるかを説明する．その後，Kang と Kashiwara による基本的な結果を述べる．後半では，有限型カルタン行列に付随するアフィン箙ヘッケ代数の既約表現の構成に関する結果や，Syu Kato の研究を嚆矢とし，Brundan，Kleshchev と McNamara により導入された標準加群・余標準加群を紹介する．

上で述べた $G(m,1,n)$ 型ヘッケ代数の研究では，可積分加群 $V(\Lambda)$ のフォック空間への埋め込みの圏化理論としての解釈が重要な役割を果たし，フォック空間自体ヘッケ代数の遺伝被覆である量子シューア代数を用いて圏化される．著者と Euiyong Park の研究では

The paper is in a final form and no version of it will be submitted for publication elsewhere.

アフィン型量子普遍包絡代数の基本加群 $V_q(\Lambda_0)$ から得られる円分箙ヘッケ代数を扱っており，従来ヘッケ代数の研究で使われてこなかった別種のフォック空間が現れる．最終節ではこのフォック空間を紹介する．

2. Lie theory for the symmetric group

まずリー理論における標準的な用語を復習しておく．

Definition 1. 整数成分行列 $A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ が対称化可能一般カルタン行列とは，

(i) $a_{ii}=2$.
(ii) $i\neq j$ ならば $a_{ij}\le 0$.
(iii) $a_{ij}=0$ は $a_{ji}=0$ と同値.
(iv) 自然数成分対角行列 D が存在して DA は対称行列.

をみたすときをいう．

対称化可能一般カルタン行列 A が与えられると，$\mathbb{C}$ 上の Kac-Moody リー代数 $\mathfrak{g}(A)$ が定義される．$\mathfrak{g}(A)$ にはカルタン部分代数と呼ばれる可換リー部分代数 $\mathfrak{h}(A)$ が存在する．$\mathfrak{h}(A)^*$ を $\mathfrak{h}(A)$ の双対空間とする．

$\Pi=\{\alpha_i|i\in I\}$ と $\Pi^\vee=\{\alpha_i^\vee|i\in I\}$ を $\mathfrak{g}(A)$ のルートの集合と余ルートの集合とする．重み格子 $P\subseteq\mathfrak{h}(A)^*$ とその双対格子 $P^\vee\subseteq\mathfrak{h}(A)$ が存在し，Π は P，$\Pi^\vee$ は $P^\vee$ の一次独立な元の集合である．$\operatorname{rank}P=\dim\mathfrak{h}=2|I|-\operatorname{rank}(A)$ かつ DA は P 上の二次形式 $(\ |\ )$ を定める．

ルートデータ $(A,\Pi,\Pi^\vee,P,P^\vee)$ に対し量子普遍包絡代数 $U_q(\mathfrak{g}(A))$ が定義される．$U_q(\mathfrak{g}(A))$ の生成元は Chevalley 生成元 e_i,f_i $(i\in I)$ と q^h $(h\in P^\vee)$ である．

Definition 2. $U_q(\mathfrak{g}(A))$-加群 V が可積分加群であるとは，

(i) V は重み分解をもつ．すなわち，

$$V=\bigoplus_{\mu\in P}V_\mu,\quad V_\mu=\{v\in V\mid q^hv=q^{\langle h,\mu\rangle}v\ (\forall h\in P^\vee)\}.$$

(ii) e_i,f_i $(i\in I)$ の作用は局所ベキ零，すなわち V の任意の元に対し作用はベキ零.

をみたすときをいう．$P^+=\{\Lambda\in P\mid\langle\alpha_i^\vee,\Lambda\rangle\in\mathbb{Z}_{\ge0}\ (\forall i\in I)\}$ とおくと最高重み加群 $V_q(\Lambda)$ は $\Lambda\in P^+$ のとき（またそのときに限り）可積分加群である．

可積分最高重み加群 $V_q(\Lambda)$ は対応する柏原結晶 $B(\Lambda)$ から復元でき，テンソル積加群の分解則や制限則などを準正規柏原結晶の言葉で記述できることが知られている．

Definition 3. A を対称化可能一般カルタン行列とし，$\mathfrak{g}(A),\mathfrak{h}(A),\Pi,\Pi^\vee,P,P^\vee,U_q(\mathfrak{g}(A))$ を定める．このとき，集合 B と関数 $\mathrm{wt}:B\to P$，$\tilde{e}_i,\tilde{f}_i:B\sqcup\{0\}\to B\sqcup\{0\}$ $(i\in I)$ の組 $(B,\mathrm{wt},\{\tilde{e}_i,\tilde{f}_i\}_{i\in I})$ が準正規柏原結晶とは，

$$\epsilon_i(b)=\max\{k\in\mathbb{Z}_{\ge0}\mid\tilde{e}_i^kb\in B\},\ \ \varphi_i(b)=\max\{k\in\mathbb{Z}_{\ge0}\mid\tilde{f}_i^kb\in B\}$$

と定めたとき，次の条件が成り立つときをいう．

(0) $\tilde{e}_i0=0,\tilde{f}_i0=0$.
(1) $b\in B,i\in I$ に対し，$\epsilon_i(b)<\infty$ かつ $\varphi_i(b)<\infty$.
(2) $b\in B,i\in I$ に対し，$\varphi_i(b)=\epsilon_i(b)+\langle\alpha_i^\vee,\mathrm{wt}(b)\rangle$.
(3) $b\in B$ かつ $\tilde{e}_ib\in B$ ならば，$\mathrm{wt}(\tilde{e}_ib)=\mathrm{wt}(b)+\alpha_i$.
(4) $b,b'\in B$ に対し $b'=\tilde{f}_ib$ は $b=\tilde{e}_ib'$ と同値.

詳細は省くが，柏原結晶 $B(\Lambda)$ は可積分加群 $V_q(\Lambda)$ の結晶基底から構成され，いろいろな組合せ論的な実現をもつ．準正規でない柏原結晶もあり $B(\infty)$ が代表的である．

Example 4. $e \geq 2$ とし，カルタン行列 $A^{(1)}_{e-1}$ を考える．このとき，

$$P^\vee = \mathbb{Z}\alpha_0^\vee \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_{e-1}^\vee \oplus \mathbb{Z}d$$

と書けて，基本重み $\Lambda_0 \in P^+$ が $\langle \alpha_i^\vee, \Lambda_0 \rangle = \delta_{i0}, \langle d, \Lambda_0 \rangle = 0$ で定まる．このとき，$B(\Lambda_0)$ は次の e-制限的ヤング図形の集合上に実現される．

$$\{\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots) \mid 0 \leq \lambda_i - \lambda_{i+1} \leq e-1\}$$

これを Misra-Miwa model という．

他方，Littelmann path model という実現もあり，e-core，つまりこれ以上長さ e の hook を抜けないヤング図形，$\kappa^{(i)}$ の列と，0 から始まり 1 で終わる単調増加有理数列 a_i の組であって，ある条件をみたすものの集合

$$\{(\kappa^{(1)}, \ldots, \kappa^{(s)} : a_0, \ldots, a_s)\}$$

の上に実現できる．

Misra-Miwa model は対称群や対称群に付随するヘッケ代数のモジュラー表現論を研究する際に標準的に使われてきた．しかし，この分野の研究者は柏原結晶という概念を知らなかったので，他の実現を用いて定理を記述するということを思いもしなかった．以下では Mullineaux 写像を取り上げ，古典的な Misra-Miwa model での記述と Littelmann path model での記述を比較しよう．

対称群の群代数や対称群に付随するヘッケ代数は cellular 代数であり，James や Murphy の結果により既約加群は e-制限的ヤング図形でラベルされる．ただし，ヘッケ代数は構造定数に非零定数 q（対称群のときは $q=1$）を含んでおり，e は量子標数である．すなわち，

$$e = \min\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \mid 1 + q + \cdots + q^{k-1} = 0\}.$$

そこで既約加群の同型類の集合を $\{D^\lambda \mid \lambda : e\text{-制限的}\}$ で表わす．対称群は Coxeter 関係式をみたす生成元を持つが同様に対称群に付随するヘッケ代数も 2 次の関係式 $(T_i - q)(T_i + 1) = 0$ と braid 関係式をみたす生成元 T_i を持ち，さらに $\theta : T_i \mapsto -qT_i^{-1}$ が自己同型を定める．

Definition 5. e-制限的ヤング図形 λ に対し，D^λ を自己同型 θ でひねった表現加群を $D^\lambda \otimes \mathrm{sgn}$ と書くことにすると，e-制限的ヤング図形 $m(\lambda)$ が存在して $D^\lambda \otimes \mathrm{sgn} \simeq D^{m(\lambda)}$ となる．このとき，写像 $\lambda \mapsto m(\lambda)$ を Mullineaux 写像と呼ぶ．

Mullineaux 写像を具体的に記述する規則は Mullineaux 自身により予想され，最終的に Kleshchev と Ford が証明したのはよく知られているが，規則の記述は複雑である．他方，Littelmann path model で記述すると記述は劇的に簡略化される．すなわち，

$$(\kappa^{(1)}, \ldots, \kappa^{(s)} : a_0, \ldots, a_s)$$

において，各 $\kappa^{(i)}$ を転置すればよい．q が 1 のベキ根でなければヘッケ代数は半単純代数になり，Mullineaux 写像は単に λ を転置する写像になるから，Littelmann path model における規則は半単純代数の場合の自然な拡張になっている．

他にもモジュラー分岐則等，対称群や対称群に付随するヘッケ代数のモジュラー表現論における重要な定理が，柏原結晶や $\mathfrak{g}(A^{(1)}_{e-1})$ 上の可積分加群とそのフォック空間への埋め込みを用いた記述をもち，円分箙ヘッケ代数の場合に一般化される．

3. 円分箙ヘッケ代数

K を次数付可換環とするとき，円分箙ヘッケ代数 $R^\Lambda(n)$ が次数付 K-代数として定義されるが，現在表現論を展開できているのは K が体の場合であるので，以下では K が体の場合に定義を述べる．まず，$Q_{ij}(u,v)=Q_{ji}(v,u)$ をみたす次の形の多項式 $Q_{ij}(u,v)$ $(i,j\in I)$ を用意しておく．

$$Q_{ij}(u,v)=\begin{cases}\sum_{p(\alpha_i|\alpha_i)+q(\alpha_j|\alpha_j)+2(\alpha_i|\alpha_j)=0} t_{i,j;p,q}u^pv^q & \text{if } i\neq j,\\ 0 & \text{if } i=j.\end{cases}$$

ただし，係数 $t_{i,j;p,q}\in K$ は $t_{i,j;-a_{ij},0}\neq 0$ と仮定する．

Example 6. たとえば，$t_{i,j;p,q}\neq 0$ かつ $t_{i,j;p,q}=t_{j,i;q,p}$ として

$$Q_{ij}(u,v)=\begin{cases} t_{i,j;0,0} & \text{if } a_{ij}=a_{ji}=0,\\ t_{i,j;1,0}u+t_{i,j;0,1}v & \text{if } a_{ij}=a_{ji}=-1,\\ t_{i,j;2,0}u^2+t_{i,j;0,1}v & \text{if } a_{ij}=-2, a_{ji}=-1,\\ t_{i,j;1,0}u+t_{i,j;0,2}v^2 & \text{if } a_{ij}=-1, a_{ji}=-2,\\ 0 & \text{if } i=j.\end{cases}$$

円分箙ヘッケ代数の定義はこの多項式に依存するのであるが，実は代数の構造に大きくは影響せず，たとえばカルタン行列 A の定める無向グラフ（ディンキン図形）が閉路をもたなければ定義から得られる代数の同型類は多項式 $Q_{ij}(u,v)$ の取り方によらない．

また，$\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in I^n$ に対し対称群の作用を項の並べ替えで定義する．すなわち，

$$s_k(\nu_1,\ldots,,\nu_k,\nu_{k+1},\ldots,\nu_n)=(\nu_1,\ldots,\nu_{k+1},\nu_k,\ldots,\nu_n).$$

Definition 7. $\Lambda\in P^+$ に対し，円分箙ヘッケ代数 $R^\Lambda(n)$ とは，生成元

$$\{e(\nu)\mid \nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in I^n\},\ \{x_k\mid 1\le k\le n\},\ \{\psi_k\mid 1\le k\le n-1\}$$

と次の基本関係で定まる K-代数である．

$$e(\nu)e(\nu')=\delta_{\nu,\nu'}e(\nu),\ \sum_{\nu\in I^n}e(\nu)=1,\ x_ke(\nu)=e(\nu)x_k,\ x_kx_l=x_lx_k,$$

$$\psi_ke(\nu)=e(s_k(\nu))\psi_k,\ \psi_k\psi_l=\psi_l\psi_k \text{ if } |k-l|>1,$$

$$\psi_k^2e(\nu)=Q_{\nu_k\,\nu_{k+1}}(x_k,x_{k+1})e(\nu),$$

$$(\psi_kx_l-x_{s_k(l)}\psi_k)e(\nu)=\begin{cases}-e(\nu) & \text{if } l=k \text{ and } \nu_k=\nu_{k+1},\\ e(\nu) & \text{if } l=k+1 \text{ and } \nu_k=\nu_{k+1},\\ 0 & \text{otherwise},\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&(\psi_{k+1}\psi_k\psi_{k+1}-\psi_k\psi_{k+1}\psi_k)e(\nu)\\ &\qquad=\begin{cases}\dfrac{Q_{\nu_k\,\nu_{k+1}}(x_k,x_{k+1})-Q_{\nu_k\,\nu_{k+1}}(x_{k+2},x_{k+1})}{x_k-x_{k+2}}e(\nu) & \text{if } \nu_k=\nu_{k+2},\\ 0 & \text{otherwise},\end{cases}\end{aligned}$$

$$x_1^{\langle h_{\nu_1},\Lambda\rangle}e(\nu)=0.$$

$R^\Lambda(n)$ は次のように次数を定めることで次数付代数になる．

$$\deg(e(\nu))=0,\quad \deg(x_k e(\nu))=(\alpha_{\nu_k}|\alpha_{\nu_k}),\quad \deg(\psi_k e(\nu))=-(\alpha_{\nu_k}|\alpha_{\nu_{k+1}}).$$

Example 8. $A=A^{(1)}_{e-1}$ とする．$e=2$ なら，一般性を失うことなく

$$Q_{01}(u,v)=Q_{10}(u,v)=u^2+\lambda uv+v^2$$

とできる．ただし，$\lambda\in K$ である．$e\geq 3$ なら，一般性を失うことなく $\lambda\neq 0$ かつ

$$Q_{ij}(u,v)=\begin{cases} u+v & \text{if } j=i+1, 0\leq i\leq e-2,\\ u+\lambda v & \text{if } i=e-1, j=0,\\ 1 & \text{if } j\neq i\pm 1 \mod e,\\ 0 & \text{if } i=j.\end{cases}$$

と仮定してよい．$A^{(1)}_{e-1}$ 以外のアフィン型や有限型のカルタン行列のときは，$Q_{ij}(u,v)$ を媒介変数を含まない特定の形に固定してかまわない．

Definition 9. $\beta\in Q_+=\sum_{i\in I}\mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i\subseteq P$ に対し

$$I^\beta=\{\nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)\in I^n \mid \alpha_{\nu_1}+\cdots+\alpha_{\nu_n}=\beta\}$$

と置くと，$e(\beta)=\sum_{\nu\in I^\beta}e(\nu)$ は $R^\Lambda(n)$ の中心元であり，$R^\Lambda(\beta)=R^\Lambda(n)e(\beta)$ は K-代数として $R^\Lambda(n)$ の直和因子になる．$R^\Lambda(\beta)$ も円分箙ヘッケ代数と呼ぶ．また，有限次元次数付 $R^\Lambda(\beta)$-加群のなす圏を $R^\Lambda(\beta)\text{-mod}^{\mathbb{Z}}$ で表わし，$q^i: R^\Lambda(\beta)\text{-mod}^{\mathbb{Z}}\to R^\Lambda(\beta)\text{-mod}^{\mathbb{Z}}$ を各加群の次数付けを一斉に i 次増やす関手とする．

Definition 10. $e(\beta,i)=\sum_{\nu\in I^\beta}e(\nu,i)$ と置き，

$$\begin{aligned} E_i&=e(\beta,i)R^\Lambda(\beta+\alpha_i)\otimes_{R^\Lambda(\beta+\alpha_i)}- &&: R^\Lambda(\beta+\alpha_i)\text{-mod}^{\mathbb{Z}}\to R^\Lambda(\beta)\text{-mod}^{\mathbb{Z}}\\ F_i&=R^\Lambda(\beta+\alpha_i)e(\beta,i)\otimes_{R^\Lambda(\beta)}- &&: R^\Lambda(\beta)\text{-mod}^{\mathbb{Z}}\to R^\Lambda(\beta+\alpha_i)\text{-mod}^{\mathbb{Z}}\end{aligned}$$

をそれぞれ制限関手，誘導関手と呼ぶ．

Remark 11. Kashiwara の定理 [8] により制限関手は誘導関手の両側随伴関手である．

次の Kang と Kashiwara による定理 [7] が円分箙ヘッケ代数の表現論における基本定理である．

Theorem 12. A を対称化可能一般カルタン行列とし，A から定まる量子普遍包絡代数や円分箙ヘッケ代数に関する記号は上記のとおりとする．また，$l_i=\langle\alpha_i^\vee,\Lambda-\beta\rangle$ と置く．

(1) E_i と F_i はともに完全関手である．
(2) $l_i\geq 0$ ならば，関手の同型 $q^{-2d_i}F_iE_i\oplus(\oplus_{k=0}^{l_i-1}q^{2d_ik})\simeq E_iF_i$ が成立．
(3) $l_i\leq 0$ ならば，関手の同型 $q^{-2d_i}F_iE_i\simeq E_iF_i\oplus(\oplus_{k=0}^{-l_i-1}q^{-2d_i(k+1)})$ が成立．

とくに，$R^\Lambda(\beta)\text{-mod}^{\mathbb{Z}}$ の直和

$$\mathcal{V}(\Lambda)=\bigoplus_{\beta\in Q_+}R^\Lambda(\beta)\text{-mod}^{\mathbb{Z}}$$

と $\mathcal{V}(\Lambda)$ から $\mathcal{V}(\Lambda)$ 自身への関手 $q^{d_i(1-l_i)}E_i, F_i$ $(i\in I)$ は $U_q(\mathfrak{g}(A))$-加群 $V_q(\Lambda)$ を圏化する．

$G(e,1,n)$ 型ヘッケ代数 $\mathcal{H}_n(q,\gamma_0,\dots,\gamma_{e-1})$ を生成元が $T_0,T_1,\dots,T_{n-1}$ で，関係式が

$$(T_0-q^{\gamma_0})\cdots(T_0-q^{\gamma_{e-1}})=0,\quad (T_i-q)(T_i+1)=0\ (1\le i\le n-1)$$

および B 型 braid 関係式で与えられる K-代数とする．次の Brundan と Kleshchev の定理 [4] により，対称群の群代数や対称群に付随するヘッケ代数は円分箙ヘッケ代数の特別な場合であることがわかる．

Theorem 13. $A=A^{(1)}_{e-1}$ とし，$Q_{ij}(u,v)=-(u-v)^{-a_{ij}}$ $(i\ne j)$ に選ぶ．e が K の標数で割り切れないとすると，$q=\sqrt[e]{1}$, $\langle\alpha_i^\vee,\Lambda\rangle=\gamma_i$ $(0\le i\le e-1)$ として，$G(e,1,n)$ 型ヘッケ代数 $\mathcal{H}_n(q,\gamma_0,\dots,\gamma_{e-1})$ は円分箙ヘッケ代数 $R^\Lambda(n)$ に K-代数として同型である．

Remark 14. とくに $\Lambda=\Lambda_0$ の場合を有限箙ヘッケ代数と呼ぼう．この定理により，対称群の群代数 KS_n が次数付代数であることがわかり，KS_n の $A^{(1)}_{e-1}$ 型有限箙ヘッケ代数による変形族を考えることができる．

Remark 15. カルタン行列 A の定める無向グラフ（ディンキン図形）がグラフ自己同型 σ をもち，$\sigma(\Lambda)=\Lambda$ ならば，$Q_{ij}(u,v)=Q_{\sigma(i)\sigma(j)}(u,v)$ と定めた円分箙ヘッケ代数 $R^\Lambda(n)$ に対し，σ は $e(\nu)\mapsto e(\sigma\nu), x_k\mapsto x_k, \psi_k\mapsto\psi_k$ により自己同型を誘導する．Mullineaux 写像はその特別な場合であるから，Mullineaux と同じ問題をより一般のカルタン行列と柏原結晶の実現に対して考えることができる．言い換えれば，Mullineaux の問題は対称群のモジュラー表現論特有の問題ではないのである．

次の定理は最近 Webster のアイデアに基づいて Shan, Varagnolo, Vasserot により証明された．

Theorem 16. 円分箙ヘッケ代数 $R^\Lambda(n)$ は対称代数である．また，その非退化跡形式は，

- $\nu\ne\nu'$ ならば，$e(\nu)R^\Lambda(n)e(\nu')\to 0$.
- $\nu=\nu'$ ならば，余単位自然変換 $E_{\nu_1}\cdots E_{\nu_n}F_{\nu_n}\cdots F_{\nu_1}\to \mathrm{Id}$ を用いて

$$e(\nu)R^\Lambda(n)e(\nu)=E_{\nu_1}\cdots E_{\nu_n}F_{\nu_n}\cdots F_{\nu_1}R^\Lambda(0)\longrightarrow R^\Lambda(0)=K$$

  を各 ν ごとに適切に定数倍．

として与えられる．

Remark 17. A を体 K 上の有限次元代数，$e\in A$ をベキ等元とし，

$$F=Ae\otimes_K -,\quad E=eA\otimes_A -$$

とすると，F は E の左随伴関手であるが，ここで F が E の右随伴関手でもあるとしよう．すると，余単位自然変換 $\epsilon: EF\to \mathrm{Id}_{K\text{-mod}}$ が線型形式 $t: eAe\to K$ を定める．そこで，$\eta:\mathrm{Id}_{A\text{-mod}}\to FE$ を単位自然変換として，$1_E=\epsilon E\circ E\eta$ を $E(A)\to E(A)$ に対し考えれば，$u_i\in Ae, v_i\in eA$ が存在して，任意の $u\in eA$ に対して $u=\sum t(uu_i)v_i$ である．とくに $t(uu_i)=0$ なら $u=0$ である．$A=R^\Lambda(n)$ ならば Theorem16 のように $t: A\to K$ を定義することで $t(ab)=t(ba)$ $(a,b\in A)$ が証明でき，t は $R^\Lambda(n)$ の非退化跡形式になる．

4. 有限型円分箙ヘッケ代数の既約加群の構成

本節では A を有限型カルタン行列と仮定し，Benkart, Kang, Oh, Park による既約 $R^\Lambda(\beta)$-加群の完全代表系の構成法 [3] を説明する．この構成法では A が定める有限ワイル群 W の最長元 w_0 の適切な最短表示をひとつ固定するが，簡単のため $A=A_{m-1}$，最短表示を

$$w_0=w^{(1)}\cdots w^{(m-1)}=(s_{m-1})(s_{m-2}s_{m-1})\cdots(s_1\cdots s_{m-1})=s_{i_1}\cdots s_{i_N}$$

と限定して説明する．$B(\Lambda)$ が柏原結晶であったことを思い出そう．

Definition 18. $b \in B(\Lambda)$ に対し，$a(b) = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ が b の adapted string とは

$$a_1 = \epsilon_{i_1}(b),\ a_2 = \epsilon_{i_2}(\tilde{e}_{i_1}^{a_1} b),\ \cdots,\ a_N = \epsilon_{i_N}(\tilde{e}_{i_{N-1}}^{a_{N-1}} \cdots \tilde{e}_{i_1}^{a_1} b)$$

のときをいう．$S^\Lambda = \{a(b) \mid b \in B(\Lambda)\}$ を adapted string の集合とする．

Remark 19. $(a_1, \dots, a_N) \mapsto \tilde{f}_{i_1}^{a_1} \cdots \tilde{f}_{i_N}^{a_N} b_\Lambda$ により全単射 $S^\Lambda \simeq B(\Lambda)$ が得られる．また，

$$\tilde{f}_{\mathbf{i}_1}^{\mathbf{a}_1} = \tilde{f}_{m-1}^{a_1},\ \tilde{f}_{\mathbf{i}_2}^{\mathbf{a}_2} = \tilde{f}_{m-2}^{a_2} \tilde{f}_{m-1}^{a_3},\ \tilde{f}_{\mathbf{i}_3}^{\mathbf{a}_3} = \tilde{f}_{m-3}^{a_4} \tilde{f}_{m-2}^{a_5} \tilde{f}_{m-1}^{a_6}, \dots$$

とすると，最短表示の取り方 $(s_{m-1})(s_{m-2}s_{m-1}) \cdots (s_1 \cdots s_{m-1})$ は

$$\epsilon_i(\tilde{e}_{\mathbf{i}_k}^{\mathbf{a}_k} \cdots \tilde{e}_{\mathbf{i}_1}^{\mathbf{a}_1} b) = 0, \quad (m - k \leq i \leq m - 1)$$

を保障する．つまり adapted string は Levi 部分代数の減少列に対する最高重み元の列を与えている．

Definition 20. 円分箙ヘッケ代数 $R^\Lambda(n)$ の定義関係式から $x_1^{\langle h_{\nu_1}, \Lambda \rangle} e(\nu) = 0$ を除いて定義した代数を $R(n)$ と書きアフィン箙ヘッケ代数と呼ぶ．$\beta \in Q_+$ に対し $e(\beta) = \sum_{\nu \in I^\beta} e(\nu)$ とすれば $R(\beta) = R(n)e(\beta)$ も定義される．

$b \in B(\Lambda)$ に対し adapted string を $a(b) = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{m-1})$ と書き，

$$\beta_k = a_{1+(k-1)k/2} \alpha_{m-k} + a_{2+(k-1)k/2} \alpha_{m-k+1} + \cdots + a_{k(k+1)/2} \alpha_{m-1}$$

とする．このとき，$R(\beta_k)$-加群 $N_k(b)$ を

$$N_k(b) = \tilde{f}_{\mathbf{i}_k}^{\mathbf{a}_k}(R(0))$$

と定める．ただし，$R(\beta)$-加群 M に対し，$\tilde{f}_i(M) = \mathrm{Top}(R(\beta + \alpha_i)e(\beta, i) \otimes_{R(\beta)} M)$ であり，$R(0) = K$ は自明な $R(0)$-加群である．また，$\beta = \sum_{k=1}^{m-1} \beta_k$ として，$R(\beta)$-加群

$$\mathrm{Ind}(\boxtimes_{k=1}^{m-1} N_k(b)) = R(\beta) \otimes_{R(\beta_1) \boxtimes \cdots \boxtimes R(\beta_{m-1})} N_1(b) \boxtimes \cdots \boxtimes N_{m-1}(b)$$

を定める．Benkart, Kang, Oh, Park は円分箙ヘッケ代数およびアフィン箙ヘッケ代数に対し，次のような既約加群の完全代表系を得た．

Theorem 21. 有限型カルタン行列から定まる円分箙ヘッケ代数 $R^\Lambda(\beta)$ に対し，

$$\{\mathrm{Top}(\mathrm{Ind}(\boxtimes_{k=1}^{m-1} N_k(b))) \mid b \in B(\Lambda),\ \mathrm{wt}(b) = \Lambda - \beta\}$$

は既約 $R^\Lambda(\beta)$-加群の完全代表系である．

Theorem 22. 有限型カルタン行列から定まる箙ヘッケ代数 $R(\beta)$ に対し，

$$\{\mathrm{Top}(\mathrm{Ind}(\boxtimes_{k=1}^{m-1} N_k(b))) \mid b \in B(\infty),\ \mathrm{wt}(b) = -\beta\}$$

は既約 $R(\beta)$-加群の完全代表系である．

次節では，加藤周のコストカ系の理論 [9] に触発された McNamara による別の既約加群の構成法 [10] を紹介する．

5. 標準加群と余標準加群

本節でも A を有限型カルタン行列と仮定するが，最長元の最短表示 $w_0 = s_{i_1} \cdots s_{i_N}$ は任意でよい．まず正ルート系の集合 Δ^+ に全順序を以下のように定める．

$$\beta_1 = \alpha_{i_1} < \beta_2 = s_{i_1}\alpha_{i_2} < \cdots < \beta_N = s_{i_1} \cdots s_{i_{N-1}}\alpha_{i_N}.$$

この順序は凸順序である．すなわち，$\beta, \gamma, \beta+\gamma \in \Delta^+$ かつ $\beta < \gamma$ ならば $\beta < \beta+\gamma < \gamma$ が成り立つ．

Definition 23. 量子普遍包絡代数 $U_q(\mathfrak{g}(A))$ の自己同型 T_i が

$$T_i(f_j) = \sum_{r+s=-a_{ij}} (-1)^r q^{d_i r} f_i^{(r)} f_j f_i^{(s)} \quad (j \neq i)$$

等により定義される．そこで，$E_{\beta_k} = T_{i_1} \cdots T_{i_{k-1}}(f_{i_k})$ と定めると

$$\{E_{\beta_N}^{(c_N)} \cdots E_{\beta_1}^{(c_1)} \mid c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{Z}\}$$

は量子普遍包絡代数の基底になる．この基底を PBW 基底と呼ぶ．

$R(\alpha_i) = F[x_1]$ は唯一の既約加群 $L(\alpha_i)$ を持つ．また，正ルート $\beta \in \Delta^+$ に対し，$w \in W$ と $i \in I$ が存在して $\beta = w\alpha_i$ と書けることと Chuang と Rouquier による導来圏同値を使えば，$R(\beta)$ も唯一の既約加群 $L(\beta)$ を持つことがわかる．$\{L(\beta) \mid \beta \in \Delta^+\}$ をカスピダル加群と呼ぶ．

Definition 24. 次で定義された加群を固有標準加群と呼ぶ．

$$\overline{\Delta}(c_1, \ldots, c_N) = \mathrm{Ind}\left(L(\beta_N)^{\boxtimes c_N} \boxtimes \cdots \boxtimes L(\beta_1)^{\boxtimes c_1}\right)$$

また，その双対加群を $\overline{\nabla}(c_1, \ldots, c_N)$ で表わし，固有余標準加群と呼ぶ．

Remark 25. 箙ヘッケ代数が量子普遍包絡代数の負ルート部分の圏化をしているという Khovanov と Lauda の描像では，固有標準加群は PBW 基底の双対基底と対応している．

Theorem 26. $L(c_1, \ldots, c_N) = \mathrm{Top}\,\overline{\Delta}(c_1, \ldots, c_N)$ と置くと，

$$\{L(c_1, \ldots, c_N) \mid c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \sum_{k=1}^{N} c_k\beta_k = \beta\}$$

は既約 $R(\beta)$-加群の完全代表系であり，次数付加群とみると自己双対的である．

[6] において，Brundan, Kleshchev, McNamara は次の完全列をみたす次数付直既約 $R(\alpha)$-加群 $\Delta_n(\alpha)$ の存在を示した．

$$0 \to q^{(n-1)(\alpha|\alpha)} L(\alpha) \to \Delta_n(\alpha) \to \Delta_{n-1}(\alpha) \to 0$$

$$0 \to q^{(\alpha|\alpha)} \Delta_{n-1}(\alpha) \to \Delta_n(\alpha) \to L(\alpha) \to 0.$$

さらに，次が成り立つ．

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{R(\alpha)}(\Delta_n(\alpha), L(\alpha)) = 1, \quad \dim \mathrm{Ext}^d_{R(\alpha)}(\Delta_n(\alpha), L(\alpha)) = 0\ (d \geq 2).$$

$\Delta_n(\alpha)$ の射影極限を $\Delta(\alpha)$ で表わし，ルート加群と呼ぶ．$\mathrm{End}_{R(c_k\beta_k)}(\mathrm{Ind}\,\Delta(\beta_k)^{\boxtimes c_k})$ を考えると，階数 c_k のベキ零ヘッケ代数に同型になり，その結果 $\mathrm{Ind}\,\Delta(\beta_k)^{\boxtimes c_k}$ の直和因子として直既約加群 $\Delta(c_k\beta_k)$ が定義される．$\Delta(c_1, \ldots, c_N) = \mathrm{Ind}\,\Delta(c_N\beta_N) \boxtimes \cdots \boxtimes \Delta(c_1\beta_1)$ を標準加群と呼ぶ．

Remark 27. $(c'_1,\dots,c'_N)<(c_1,\dots,c_N)$ を $c'_N=c_N,\dots,c'_{k+1}=c_{k+1},c'_k<c_k$ により定める．$L(c_1,\dots,c_N)$ の射影被覆を $P(c_1,\dots,c_N)$ とすると，$P(c_1,\dots,c_N)$ の部分加群

$$\sum_{(c'_1,\dots,c'_N)\not\leq(c_1,\dots,c_N)}\ \sum_{f\in\mathrm{Hom}(P(c'_1,\dots,c'_N),P(c_1,\dots,c_N))}\mathrm{Im}\,f$$

による商加群は $\Delta(c_1,\dots,c_N)$ に同型である．

次の定理は Brundan, Kleshchev, McNamara および Syu Kato による．

Theorem 28.
(1) $\mathrm{Ext}^d_{R(\beta)}(\Delta(c_1,\dots,c_N),\overline{\nabla}(c'_1,\dots,c'_N))$ は，$d=0$ かつ $(c_1,\dots,c_N)=(c'_1,\dots,c'_N)$ のときのみ 1 次元で，それ以外のときは 0 である．
(2) 有限生成 $R(\beta)$-加群 M が $\sum_{k=1}^N c_k\beta_k=\beta$ をみたす任意の $(c_1,\dots,c_N)$ に対して

$$\mathrm{Ext}^1_{R(\beta)}(M,\overline{\nabla}(c_1,\dots,c_N))=0$$

をみたすならば M は Δ-*flag* をもつ．

6. 有限箙ヘッケ代数（$\Lambda=\Lambda_0$ の円分箙ヘッケ代数）とフォック空間

$A^{(1)}_\ell$ 型の円分箙ヘッケ代数 $R^{\Lambda_0}(n)$ が対称群の群代数や対称群に付随するヘッケ代数を含む場合であって，色付きヤング図形を基底とするフォック空間を用いる議論により，分解係数の決定，既約加群の柏原結晶による分類，Dipper-James-Murphy 予想の証明等，種々の議論を走らせる場となってきた．たとえば [5] や [11] を参照せよ．Euiyong Park との共同研究では，他のフォック空間を利用することにより，両端に 2 重線をもつアフィン型 $A^{(2)}_{2\ell},D^{(2)}_{\ell+1},C^{(1)}_\ell$ に対し円分箙ヘッケ代数 $R^{\Lambda_0}(\beta)$ の次元の明示公式の導出や表現型の決定などを行った．（手法は同じなので参考文献としては [1]，[2] の 2 編のみを挙げてある．）

$$A^{(2)}_{2\ell}:\circ\Leftarrow\cdots\Leftarrow\circ\qquad D^{(2)}_{\ell+1}:\circ\Leftarrow\cdots\Rightarrow\circ$$

$$C^{(1)}_\ell:\circ\Rightarrow\cdots\Leftarrow\circ$$

対称群に付随するヘッケ代数の場合はフォック空間全体が量子シューア代数で圏化されるが，それ以外の場合についてはまだあまり事情がわかっていないので，他のアフィン型でどういうフォック空間が現れるかだけを紹介しておく．まず $A^{(1)}_\ell$ 型の場合を復習すると，次の residue pattern が定める色付きヤング図形が基底となる．見てわかるように対角線には同じ数が並ぶ．

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & \ell & 0 & 1 & \cdots \\ \ell & 0 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & \ell & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \end{array}$$

Example 29. $\ell\geq 3$ のとき，1 行めの長さが 3 で 2 行めの長さが 1 の色付きヤング図形は

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \ell & & \end{array}$$

$C_\ell^{(1)}$ 型のときは，やはり色付きヤング図形を基底とするフォック空間を考える．ただし，residue pattern が対角線に関して線対称な形に変わる．

$$
\begin{array}{cccccccccc}
0 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & \ell & 0 & 1 & \cdots & \cdots \\
1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & \ell & 0 & 1 & \cdots \\
2 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & \ddots \\
\vdots & \vdots & & & & & & & &
\end{array}
$$

$A_{2\ell}^{(2)}$ 型と $D_{\ell+1}^{(2)}$ 型の場合は色付きずらしヤング図形を基底とするフォック空間を考える．ただし，$A_{2\ell}^{(2)}$ 型のときの residue pattern は

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
0 & 1 & \cdots & \ell & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \\
 & 0 & 1 & \cdots & \ell & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \\
 & & \ddots & \ddots & & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots &
\end{array}
$$

であり，$D_{\ell+1}^{(2)}$ 型のときの residue pattern は

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & 1 & \cdots & \ell & \ell & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots \\
 & 0 & 1 & \cdots & \ell & \ell & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\
 & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots
\end{array}
$$

である．

Example 30. $A_4^{(2)}$ 型のとき，たとえば下記は色付きずらしヤング図形である．

$$
\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & & &
\end{array}
$$

ヘッケ代数のときの理論展開を思い出せば，これらのフォック空間の正しい圏化は何かや，Specht 加群理論の構築などが自然な未解決問題として浮上してくる．また他方で，順表現型の計算例からは次の予想も自然である．

Conjecture 31. $R^\Lambda(\beta)$ は直既約代数であり，順標準型なら *Brauer graph* 代数であろう．

Remark 32. 対称群の群代数やヘッケ代数の場合は，Scopes 同値により予想が正しいことがわかる．

References

[1] S. Ariki, K. Iijima and E. Park, *Representation type of finite quiver Hecke algebras of type $A_\ell^{(1)}$ for arbitrary parameters*, Int. Math. Res. Not. **IMRN 2015**, 6070–6135.

[2] S. Ariki and E. Park, *Representation type of finite quiver Hecke algebras of type $A_{2\ell}^{(2)}$*, J. Algebra **397** (2014), 457–488.

[3] G. Benkart, S.-J. Kang, Se-jin Oh and E. Park, *Construction of irreducible representations over Khovanov-Lauda-Rouquier algebras of finite classical type*, Int. Math. Res. Not. **IMRN 2014**, 1312–1366.

[4] J. Brundan and A. Kleshchev, *Blocks of cyclotomic Hecke algebras and Khovanov-Lauda algebras*, Invent. Math. **178** (2009), 451–484.

[5] ———, *Graded decomposition numbers for cyclotomic Hecke algebras*, Adv. Math. **222** (2009), 1883–1942.

[6] J. Brundan, A. Kleshchev, P. J. McNamara, *Homological properties of finite type Khovanov-Lauda-Rouquier algebras*, Duke Math. J. **163** (2014), 1353–1404.
[7] S.-J. Kang and M. Kashiwara, *Categorification of highest weight modules via Khovanov-Lauda-Rouquier algebras*, Invent. Math. **190** (2012), 699–742.
[8] M. Kashiwara, *Biadjointness in cyclotomic Khovanov-Lauda-Rouquier algebras*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **48** (2012), 501–524.
[9] Syu Kato, *Poincaré-Birkhoff-Witt bases and Khovanov-Lauda-Rouquier algebras*, Duke Math. J. **163** (2014), 619–663.
[10] P. J. McNamara, *Finite dimensional representations of Khovanov-Lauda-Rouquier algebras I: Finite type*, J. Reine Angew. Math. **707** (2015), 103–124.
[11] A. Mathas, *Cyclotomic quiver Hecke algebras of type A*, arxiv:1310.2142.

Department of Pure and Applied Mathematics
Graduate School of Information Science and Technology
Osaka University
1-5 Yamadaoka, Suita, Osaka 565-0871, JAPAN
E-mail address: ariki@ist.osaka-u.ac.jp