

第48回環論および表現論シンポジウム

The 48th Symposium on Ring Theory and Representation Theory (2015)

第7回日中韓環論国際シンポジウム報告

Report on the 7th China-Japan-Korea International Conference on Ring Theory

(9月9日(水) 16:50~17:40)

2015年9月7日(月)~10日(木)

名古屋大学多元数理科学棟 509 室

Nagoya University, Nagoya

September 7 – 10, 2015

山梨大学工学部
佐藤真久

第7回日中韓環論国際シンポジウム

THE 7TH CHINA-JAPAN-KOREA INTERNATIONAL CONFERENCE ON RING THEORY

開催場所：浙江省杭州(Zhejiang Province, Hangzhou)

開催日時：2015年7月1日(水)－7日(火)

参加者：170名以上(日本から10名)

The 7th China-Japan-Korea International Conference on Ring Theory

第 七 届 中 日 韩 国 际 环 论 会 议

2015.7.2



Topics in this lecture

- About what kind place **Hangzhou** is:
Introduction to Universities and Impression West Lake
- On the **history** of China-Japan-Korea International Conference on Ring Theory
in the twenty four years **for young Japanese ring theorists**
with mathematics and **mathematicians in China**
- **Trend topics** in the 7th China-Japan-Korea International Conference on Ring Theory
This includes about
derived and triangulated categories, Gorenstein projective modules, derivations.
Also outline of some invited lectures will be introduced.

会場1: 浙江工科大学



会場2: 浙江大学数学科学研究中心

古いキャンパス(old campus)



中国組織委員メンバー(ORGANIZER)



西湖(West Lake)

- 南宋(1129-1279)の首都
- (中国人の心のふる里)

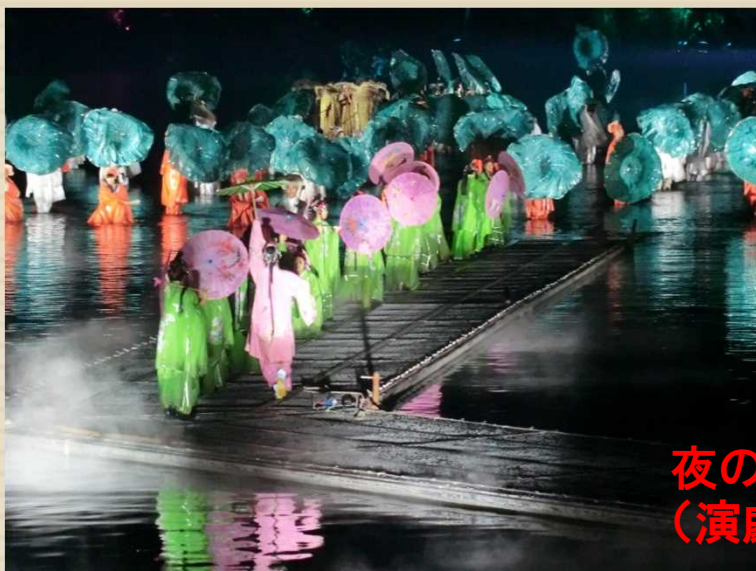
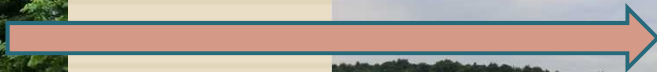


地上の樂園

西湖(West Lake)の蛇伝説



六和塔
蛇伝説(建物下に蛇)



夜の湖上パフォーマンス
(演劇)



西湖の風景を入れた1元札



後援(Financial Support)

□ 日本学術振興会・共同セミナー(日中パートナーシップ)

特に、若手研究者に支援を期待されている
院生を含め、若い人が積極的に参加して欲しい
日中韓シンポでは**毎回学振の補助を受けている**

- 中国高等教育省(補助金の使い勝手が良くなった)
- 浙江工科大学
- 浙江大学

日中韓環論国際シンポジュームの歴史

□ 第1回 1991年 中国広西省桂林

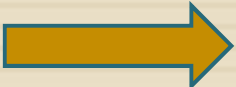
開催までの経緯

Oystaeyen(ベルギー・アントワープ) 環論国際会議

太刀川弘幸氏 劉招学氏の出会い(1983?)

日中の環論の発展のために日中環論国際シン
ポジュームの創設を話し合った

1990年代の中国数学事情

- 文化大革命(1966-1976)が終了
「学問より労働」「紅衛兵による徴農と地方移送」
 中国の学問全体的大幅な遅れ

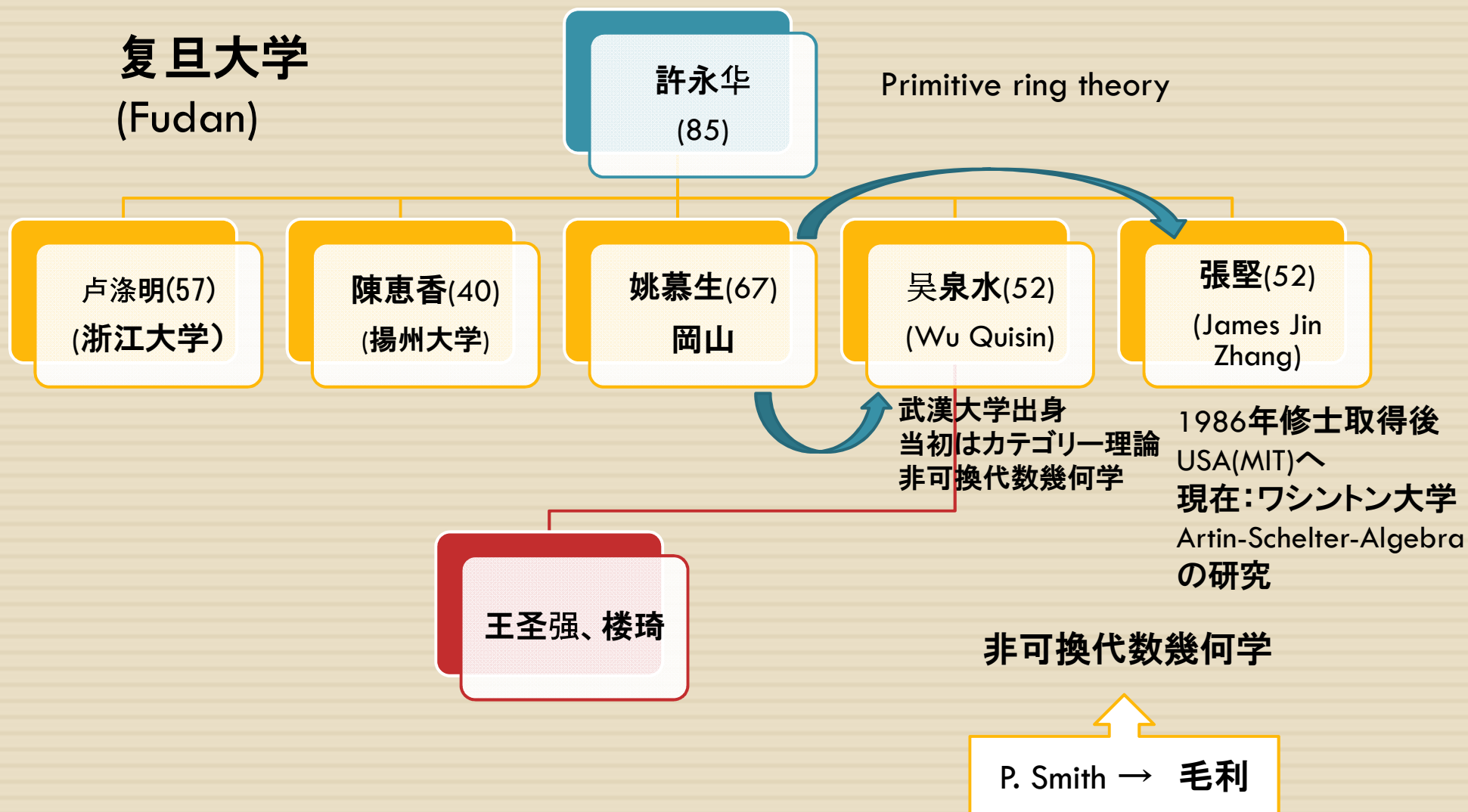
1980年代

劉氏などの留学組の帰国と数学の研究の立て直し
多くの弟子を海外へ派遣、国際会議の開催

1990年代

発展の前準備の段階

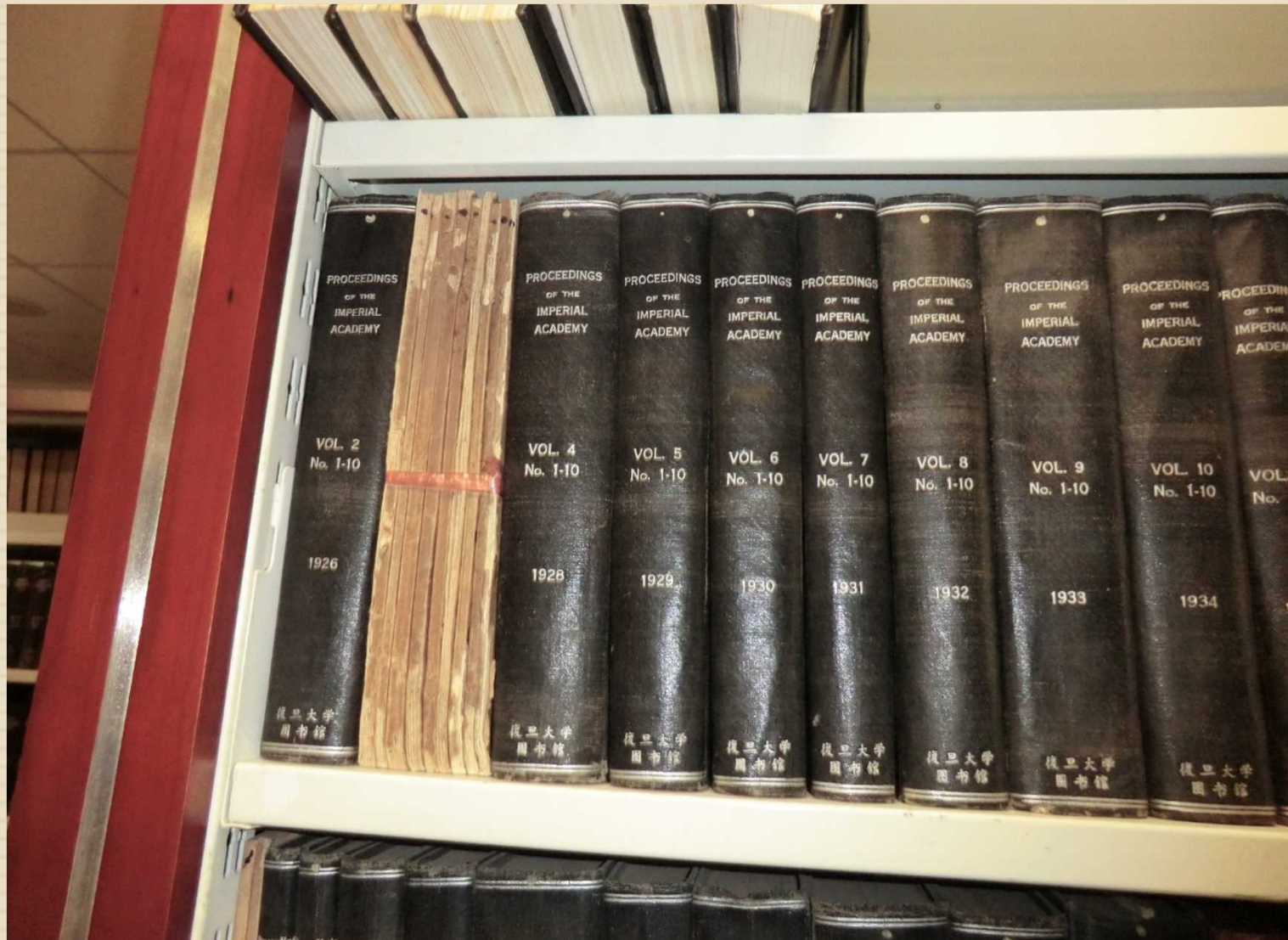
中国の環論人脈



Proc. of Imperial Academy Proc. of Japan Academy

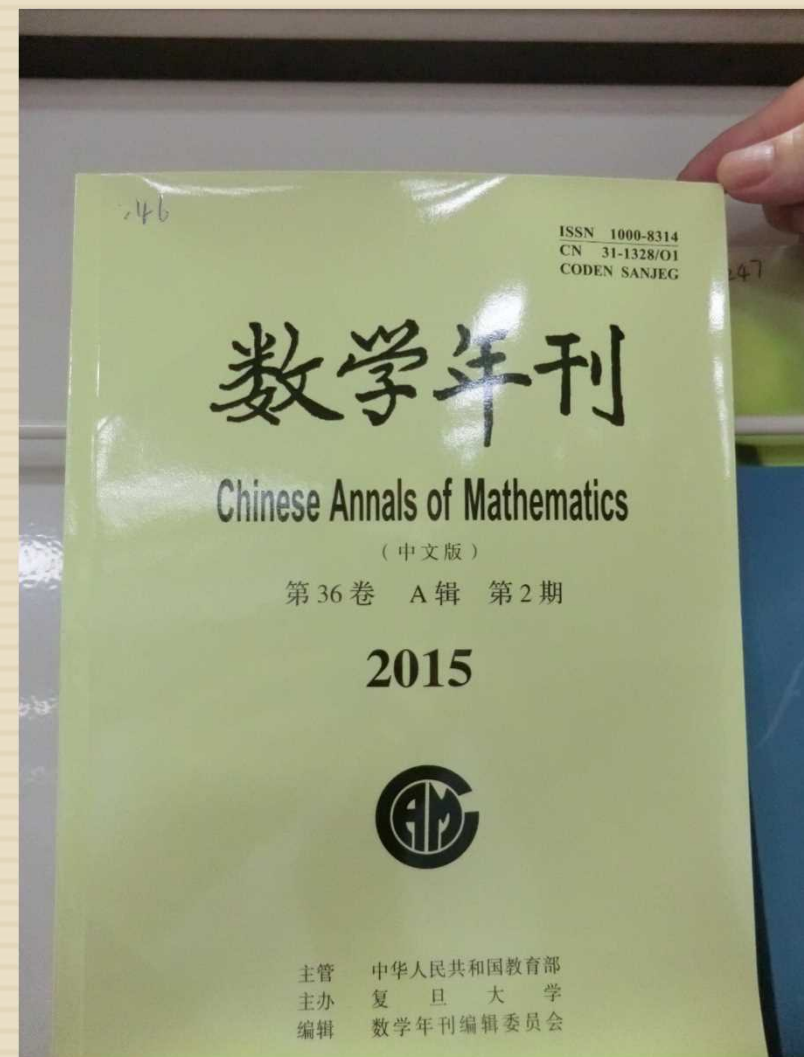


図
書
館



复旦大学数学科图书馆(雑誌)

図書用図書室はこの上の階



中国の環論人脈

北京師範大学

程福長
広西師範大学
(88)

劉紹学
(88)

環論

ホモロジー代数

張英伯(68)
(北京師範大学)

惠昌常(55)
(首都師範大学)

章璞(55)
(上海交通大学)

朱彬(65)
肖杰(63)
(清華大学)

彭联刚(57)
(四川大学)

黄兆泳(46)
(南京大学)
山梨・岡山

BautistaとBOCSの研究

Ringelのもとで表現論の研究

安徽師範大学卒

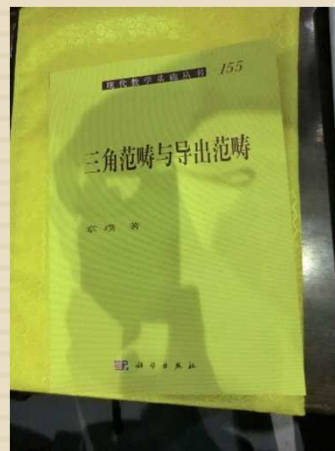
フンボルトで
Ringelのもとへ

修士は広西師範大学

江沢民の母校



Ringel:現在、上海交通大学客員教授
夏2ヶ月滞在して、講義と助言



Triangulated category and
Derived category
安徽師範大学卒、揚州大学修士、
1991博士

Gao Zhenghui
(南京大学)

四川大学出身

中国の環論人脈

□ 広西師範大学(桂林)



ホモロジー代数



1989年発行

1年間ポスドクで
复旦大学に滞在

中国の環論人脈

南京大学

周伯壘

(1920年生)



ホモロジー(同調)代数

丁南庆(52)

南京(東南)大学

朱海燕

浙江工科大学

(2007年学位)

吉林大学

謝邦杰

(1923年
12月8日生)



高等代数簡明教程
(A.A.Albertの訳本:1976)

郭之春

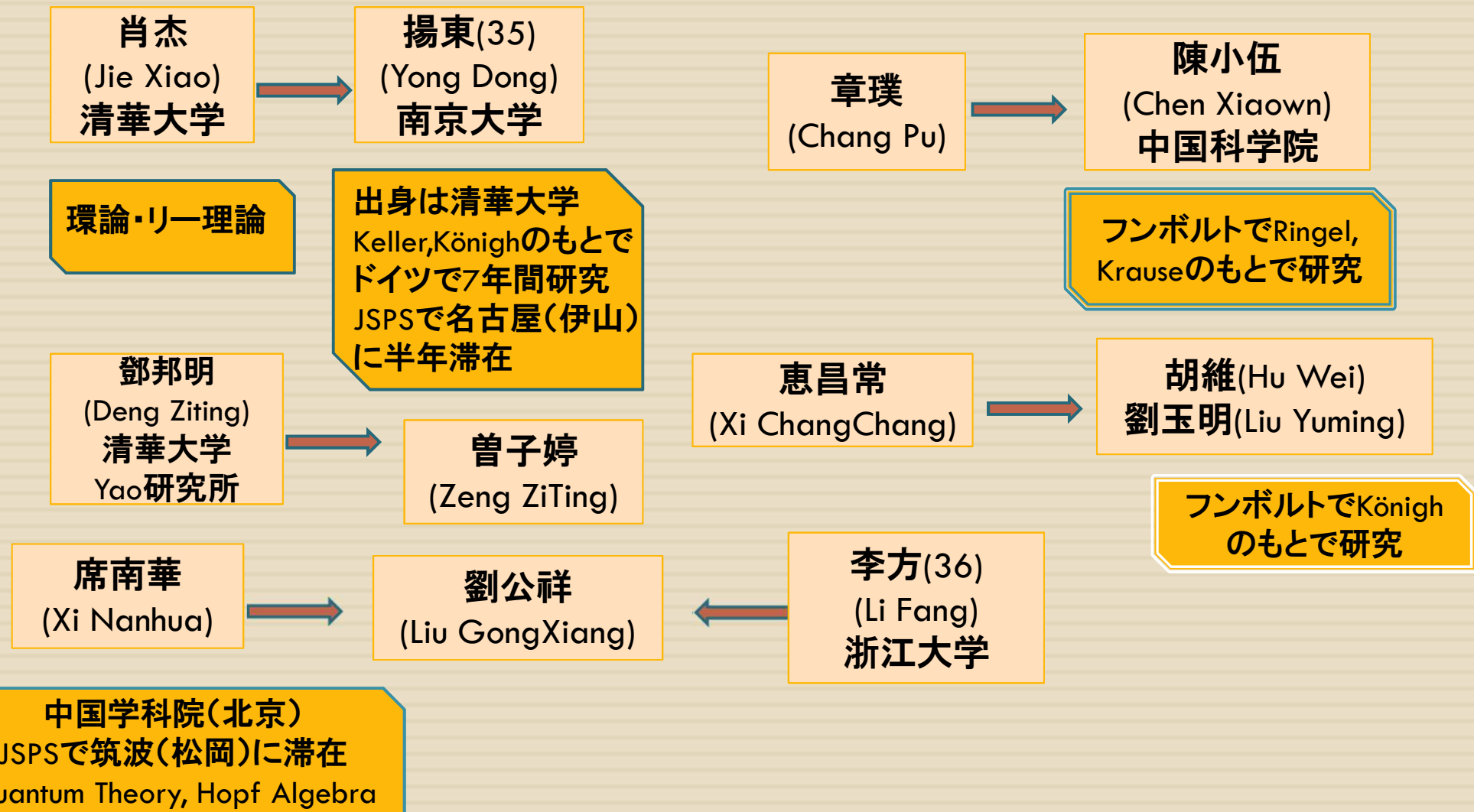
牛鳳文

注: 中央大学を7つの大学に分割、その一つが南京大学、東南大学。
台湾の中央大学は、これを再興した位置付けになっている。

中国の名門大学

- 四川大学
- 厦門大学
- 清華大学、北京(師範)大学
- 南京大学、复旦大学
- 上海交通大学
- 中国科学技術大学

Derived Category 関係の研究者



日中韓環論国際シンポジュームの歩み

第1回 日中環論国際シンポジューム(1991年10月)



参加者：
中国55名
日本18名
ドイツ2名
カナダ3名

Organizers :

中国：劉紹学(北京師範大学)，程福長(広西師範大学)，姚慕生(复旦大学)
日本：太刀川弘幸(筑波大学)，原田学(大阪市立大学)，
丸林英俊(鳴門教育大学)，佐藤眞久(山梨大学)

話題の中心

- 中国 カテゴリー理論、coherent ring、表現論
- 日本 遺伝環、表現論、
- 他国：C.M.Ringel, B.J.Müller, Käsch

報告：学会誌「数学第45巻第1号(1993)」

第2回 日中環論国際シンポジウム(1995年10月)

岡山理科大学御津国際会館



参加者：
中国19名
日本97名
韓国12名
他国11名

Organizers :

中国：劉紹学(北京師範大学)，程福長(広西師範大学)，姚慕生(复旦大学)
日本：横川賢二(岡山理科大学)，中本太一(倉敷芸術科学大学)
丸林英俊(鳴門教育大学)，佐藤真久(山梨大学)

話題の中心

- 中国 カテゴリー理論、coherent ring、表現論
- 日本 遺伝環、群および多元環の表現論、QF環、微分、
- 韓国 Baer rings、Baer modules、near ring

- 主な参加者：
- 日本：東屋五郎、河田大、津島行男、永原賢、山形邦夫、
若松隆義、加藤豊紀、倉田吉喜、政池寛三、宮下庸一
- 他国：V.Dlab, B.J.Müller, F.Käsch, E.Enochs, O.Kerner, F.Oystaeyen

「日中韓」への歩み



韓国の参加について話し合い

第1回 日韓環論および表現論国際シンポジウム (1998年10月:大阪市大)

- 「日中韓」の準備的段階として、
日韓で顔合わせのシンポジウム
- 「日本学術振興会日韓科学協力事業」
として採択され実施(研究代表者:佐藤)



第3回日中韓環論国際シンポジウム(1999年6月) 韓国・慶北大学(大邱(テグ))



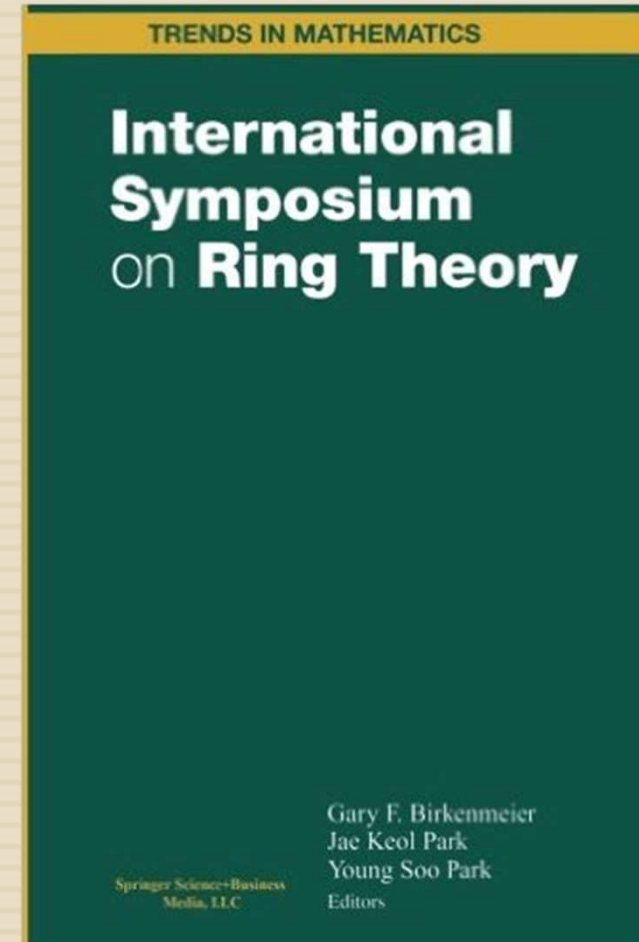
Organizers :

China : Weimin Xue (福建師範大学), 張英伯(北京師範大学)

日本: 横川賢二(岡山理科大学), 大城紀代市(山口大学)

丸林英俊(鳴門教育大学), 佐藤眞久(山梨大学)

韓国 : Jae Keol Park (釜山大学), Jin Yong Kim (慶熙大学),
Young Soo Park (慶熙大学), Seog Hoon Rim(慶熙大学)



話題の中心

- 中国 カテゴリー理論、coherent ring、表現論
- 日本 原田環、微分環、符値環、森田双対等の環論および加群論
- 韓国 Baer rings、Baer modules、near ring(+ Ohio state university)
- **重大事項:** EnochsとJendaによるFlat cover予想の解決の報告

- 主な参加者:
- 日本:花木、平野、伊山、加戸、小林、小松、倉田、倉富、丸林、源、森本、本瀬、長瀬、中島、西田、大城、佐藤、隅山、山形、横川、吉村、吉野、西中、綱島、浜口 (25名)
- 他国:D.Happel, V.Dlab, K.M.Roggenkamp, A.Zimmermann, M.Teply, K.Varadarajan, F.Kasch, F.V.Oystaeyen, O.M.G.Jenda, E.Jesper S.K.Jain, J.W.Fisher, J.Osterburg, M.F.Yousif, S.T.Rizvi, G.K.Birkenmeier,

第4回日中韓環論国際シンポジウム(2004年6月) 中国・南東大学(南京)

参加者:
中国75名
日本17名
韓国 8名
他国11名

□ 2003年のsevere acute respiratory syndrome (SARS)大流行で1年延期

The Fourth China-Japan-Korea International Symposium on Ring Theory
Nanjing, China, June 24 - 28, 2004

Organizers :

China : 丁南庆(南京大学)、陳建龙(南東大学)、
Weimin Xue (福建師範大学)、張英伯(北京師範大学)
日本: 政池寛三(東京学芸大)、大城紀代市(山口大学)
丸林英俊(鳴門教育大学)、佐藤眞久(山梨大学)
韓国 : Jae Keol Park (釜山大学), Jin Yong Kim (慶熙大学),
Young Soo Park (慶熙大学), Seog Hoon Rim (慶熙大学)
Yong Uk Cho (新羅大学)



Advances in Ring Theory

Proceedings of the 4th China-Japan-Korea
International Conference

J. L. Chen
N. Q. Ding
H. Marubayashi
editors



参加者



豫園



豫園



南京長江大橋



中山(孫文)陵



日本からの参加者(一部)と主催者



会場



Efim Zelmanov氏の講演

現在は、南中国師範大学(広州)客員教授

話題の中心

- 中国 ホモロジー代数、表現論、非可換代数幾何
- 日本 原田環、微分環、中山環・QF環、表現論、ホップ代数
- 韓国 古典環論、可換環論関係の発表が出てきた
- 主な参加者:
 - 日本: 政池、平野、加戸、小林、倉富、丸林、久田見、馬場、大城、佐藤、山形、岩永、横川、吉村、大貫、宇原
 - 他国: E.Zelmanov, James Zhang, W.K.Nicholson, R. Wisbauer, R. Martinez-Villa, F.Kasch, L.W.Small, P.Vamos, C. Harjarnavis, A.Facchini, J.Clark, J.Kauts, M.F.Yousif, S.T.Rizvi, G.K.Birkenmeier, S.K.Jain

第5回日・中・韓・環論国際シンポジウム(東京)

2007年9月10日(月)ー15日(土)

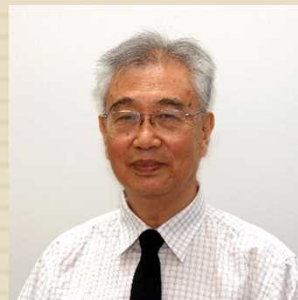
(日本学術振興会 国際研究集会)



CHINA-JAPAN-KOREA



CHINA-JAPAN-KOREA



参加者



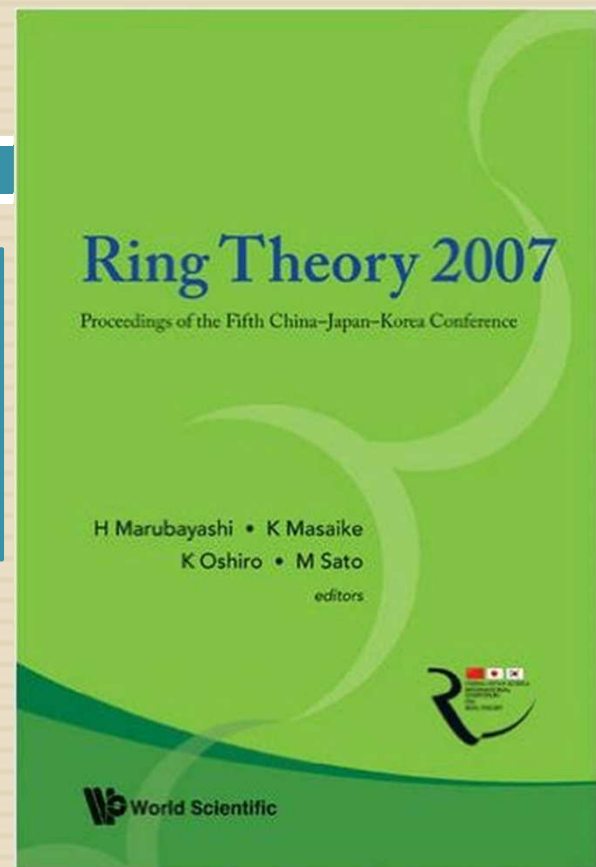
参加者：
中国18名
日本74名
韓国11名
他国28名

Organizers :

China : 丁南庆(南京大学)、陳建龙 (南東大学)、
吳泉水(复旦大学)、張英伯(北京師範大学)

日本: 政池寛三(東京学芸大)、大城紀代市(山口大学)
丸林英俊(鳴門教育大学)、佐藤眞久(山梨大学)

韓国 : Jin Yong Kim (慶熙大学), Yang Lee, Chan Huh(釜山大学)
Young Soo Park (慶熙大学), Seog Hoon Rim(慶熙大学)
Yong Uk Cho(新羅大学), Chan Yong Hong(慶熙大学),



The Fifth China-Japan-Korea International Symposium on Ring Theory, Tokyo, 2007

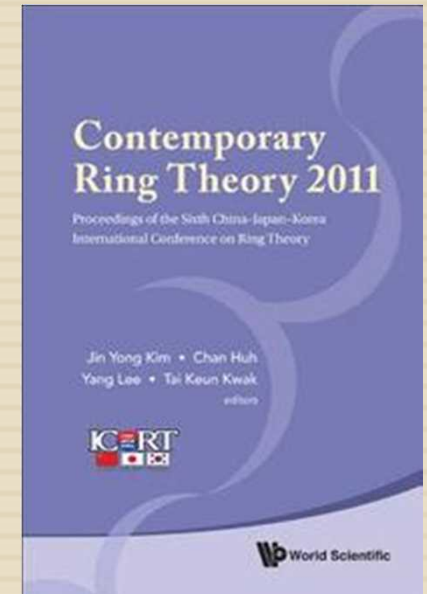
アジアの発展

□ 特徴: アジアの参加国の多様性

台湾、インド、マレーシア、トルコから参加
ここでの参加者では、**derivation**の研究者が目立つ

第6回日中韓環論国際シンポジウム(2011年6月) 韓国・慶熙大学校(水原(スオン)市)

参加者:
中国11名
日本21名
韓国21名
他国29名



Organizers:

China: 丁南庆(南京大学)、陳建龙(南東大学)、
吳泉水(复旦大学)、張英伯(北京師範大学)
日本: 佐藤眞久(山梨大学)、浅芝秀人(静岡大学)
馬場(大阪教育大学)、吉村浩(山口大学)

韓国: Jin Yong Kim (慶熙大学), Yang Lee(釜山大学),

Chan Huh(釜山大学), Junchoel Han(釜山大学),
Tai Keun Kwak(大眞大学),

カルビの発祥地（スオンカルビにて）



解散後宿舎前にて



参加国の多様性

- 特徴: アジアの参加国の多様性がさらに拡大
台湾、インド、マレーシア、トルコ、イラン、
ルーマニア、スロベニア、ブルネイから参加
- アメリカからも11名参加

第7回日中韓環論国際シンポジウム

- 日本人講演者の内容は、本シンポジウムでも発表



若い方の英語力は素晴らしい！！！！

- 大城先生と神田さんが日本の招待講演者

神田さん(初日の座長と最終講演者)

大城先生は、四元数・八元数を用いたフロベニウス多元環の構成についての話題(一般の環ではフロベニウスか未解決)

講演の傾向(中国)

□ 中国

- 伝統的な環論
- 表現論(北京師範大学系統)

□ Derived Category の話題が多くなった

□ Gorenstein Projective(定義は後出)に関する話題が中心

- 歴史的には、ホモロジー代数やCoherent ringの研究の流れをくんでいる
- Ringel談: 最初は重要と思わなかった。例を聞いても、射影加群という返答であった。しかし、いろいろな状況ではどうか調べてみるようにアドバイスしていくうちに、次第に重要性が見えてきた。ポイントは、導来圏と違い加群内部の構造として記述し捉えられることができる点で大きなメリットがある。
- 関連講演: Gillespie, Estrade(sheafとrecollmentとの関連), lacof(可換), Christensen(可換)等の欧米招待者、Gao等の中国の一般講演者(可換・非可換をあまり意識していない様子)

講演の傾向

□ 韓国

- 伝統的な環論
- 今回の特徴: 可換環論の研究者が4名参加
(伝統的な可換環論であるが、Christensen等の仕事に関心があり、中国の研究者と交流している。)

□ 他のアジア諸国(インド、トルコ等)

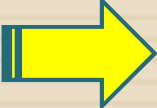
- **Derivation**の講演が多かった

特別講演

- Zheng Pu(章璞) Infinite ladders of triangulated categories

Recollmentを高さ1のladderと考え、これを積み重ねてladderを作り、

Recollmentを拡張して考察 (後に、Gorenstein projective との関連で説明)

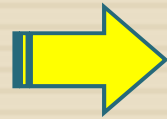
- C.M.Ringel The submodules of length 2: a first encounter of representation theory and algebraic geometry  静岡

- Gorenstein Projectiveiv **に関する特別講演**(後に解説)

- ◆ J. Gillespie AC-injective chain complexes
- ◆ S. Estrada Gorenstein flat and Gorenstein injective sheaves
- ◆ A. Iacob Gorenstein projective precover

特別講演

- L. Guo On Integro-differential algebras



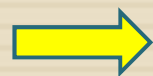
もう一つのテーマ(微分環)

- Fang Li (Canada Tronto)

Homological Dimension of simple modules over semiperfect rings

広州師範大系の研究者 → ホモロジー代数と環論

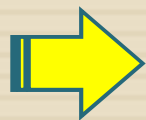
- B.G. Kang(韓国、可換環) Krull Dimensiion of Power series over nonSFT domains (Dedekind domain で無いようなPrüfer domain などのnonSFT環上の1変数べき級数環のクルル次元の決定)



J.T.Arnold(1982)の研究の流れ

特別講演

- S. Liu (Canada, Sherbrooke) Homological dimensions of simple modules over semiperfect rings



no loop 予想 : $\text{gl.dim } R < \infty \rightarrow \text{Ext}_R^1(S, S) = 0$

strong no loop 予想 : $\text{Ext}_R^1(S, S) \neq 0 \rightarrow \text{pd}(S) = \infty$

主結果: strong no loop 予想を代数閉体上で証明

佐藤: カルタン行列問題に関連してこれを解説(全体講演へ組み込み)

- L.W. Christensen Tate homology far beyond group algebras  群環で定義された Tate (コ)ホモロジーの拡張
(後に詳細に説明)
 - Iwanaga Gorenstein ring の特徴付け
 - Goto の定理の拡張
 - Gorenstein Projective の特徴付け

Gorenstein Projective(flat) modules の定義

- R -加群 M が **Gorenstein Projective module** とは、ある射影加群の完全列

$$P^* : \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow P_{-1} \rightarrow \cdots$$

があり、 $M = \text{Ker}(P_1 \rightarrow P_0)$ で、任意の射影加群 Q に対し、 $\text{Hom}_R(P^*, Q)$ が完全列になっているような加群をいう。

- R -加群 M が **Gorenstein flat module** とは、ある平坦加群の完全列

$$F_* : \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow F_{-1} \rightarrow \cdots$$

があり、 $M = \text{Ker}(F_0 \rightarrow F_{-1})$ で、任意の入射加群 E に対し、 $F_* \otimes_R E$ が完全列になっているような加群をいう。

Gorenstein Injective 加群は、Gorenstein Projective 加群の双対として定義される。

Gorenstein projective 加群全体は、 $GP(R) = \{M \in \text{mod-}R \mid \text{Ext}_R^i(M, R) = 0, i > 0\}$

群環上のTate (コ)ホモロジー

$$\begin{aligned} ((M, \partial) \cap H) &= (M, \partial) \cap \hat{H} \\ &= (M, \partial) \cap \hat{H} \end{aligned}$$

TATE (CO)HOMOLOGY OVER GROUP ALGEBRAS

$R = kG$, k a field, G a finite group

Take a projective resolution

$$\cdots \rightarrow P_m \rightarrow P_{m-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow k \rightarrow 0$$

and an injective resolution

$$0 \rightarrow k \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \cdots \rightarrow I^m \rightarrow I^{m+1} \rightarrow \cdots$$

Splice them together to get an acyclic complex

$$T = \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow P_{-1} \rightarrow P_{-2} \rightarrow \cdots$$

DEFINITION (TATE 1952)

$$\hat{H}^*(G, M) = H^*(\text{Hom}_R(T, M))$$

$$\hat{H}_*(G, N) = H_*(T \otimes_R N)$$

W.Chirstensen氏
の講演より

Tate (コ)ホモロジーの拡張の歴史

Auslander-Gorenstein
= Iwanaga-Gorenstein +
 $j(M) = \min\{i \mid \text{Ext}_R^i(M, R) \neq 0\}$
に関する条件

Auslander -Regular
= Auslander Gorenstein
+ 大局次元有限

BEYOND GROUP ALGEBRAS

- 1 Generalizations of Tate's construction (Gorenstein rings)
- 2 An application
- 3 Stable cohomology (Associative rings)
- 4 Stable homology (Associative rings)
- 5 An application

$\hat{H}^*$ Tate cohomology generalizes to

- QF-rings (Nakayama, 1957–58)
- Commutative Gorenstein local rings (Buchweitz, 1986)
- Iwanaga–Gorenstein rings (Avramov–Martsinkovsky, 2002)

$\hat{H}_*$ Tate homology generalizes to

- Iwanaga–Gorenstein rings (Iacob, 2007)

SETUP

... modules are left modules

Id R = Krull dim $R < \infty$

両側ネータ
各 id R が有限

Tate (co)homology の最終的定義

DEFINITION

A complete resolution of an R° -module M is a diagram

$$T \xrightarrow{\tau} P \xrightarrow{\pi} M$$

- π is a projective resolution
- τ_i is an isomorphism for $i \gg 0$
- T is a complex of projective R° -modules with

$$H(T) = 0 = H(\text{Hom}_{R^\circ}(T, Q))$$

for every projective R° -module Q

DEFINITION

$$\widehat{\text{Ext}}_R^*(M, N) = H^*(\text{Hom}_R(T, N))$$

$$\widehat{\text{Tor}}_*^R(M, N') = H_*(T \otimes_R N')$$

定義 (Stable cohomology) と主定理1

STABLE COHOMOLOGY

R -modules M, N

Projective resolutions $P \rightarrow M, Q \rightarrow N$

$$\overline{\mathrm{Hom}}_R(X, Y)_n = \coprod \mathrm{Hom}_R(X_i, Y_{i+n})$$

$$0 \longrightarrow \overline{\mathrm{Hom}}_R(P, Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, Q) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Hom}}_R(P, Q) \longrightarrow 0$$

DEFINITION (P. VOGEL (1980s) AND GOICHOT, 1992)

$$\widetilde{\mathrm{Ext}}_R^*(M, N) = H^*(\widetilde{\mathrm{Hom}}_R(P, Q))$$

THEOREM (CORNICK AND KROPHOLLER, 1997)

Whenever $\widehat{\mathrm{Ext}}_R^*(M, -)$ is defined

$$\widetilde{\mathrm{Ext}}_R^*(M, -) \cong \widehat{\mathrm{Ext}}_R^*(M, -)$$

定義 (Stable homology) 群環での基本定理

STABLE HOMOLOGY

R^0 -module M , R -module N

Projective resolution $P \rightarrow M$, injective resolution $N \rightarrow I$

$$0 \rightarrow P \otimes_R I \rightarrow P \bar{\otimes}_R I \rightarrow P \tilde{\otimes}_R I \rightarrow 0$$

$$(X \bar{\otimes}_R Y)_n = \prod_{i \in \mathbb{Z}} X_i \otimes_R Y_{n-i}.$$

DEFINITION (P. VOGEL (1980s) AND GOICHOT, 1992)

$$\widetilde{\mathrm{Tor}}_*^R(M, N) = H_*(P \tilde{\otimes}_R I)$$

THEOREM (GOICHOT, 1992)

For a finite group G

$$\widetilde{\mathrm{Tor}}_*^{kG}(k, -) \cong \widehat{\mathrm{Tor}}_*^{kG}(k, -) \cong \widehat{H}_*(G, -)$$

主定理2 (設定: 片側ネータ環上の有限性加群)

(特に、Gorenstein projective 加群は Gorenstein flat 加群)

A GENERALIZATION OF TATE HOMOLOGY

THEOREM

If $\widehat{\mathrm{Tor}}_*^R(M, -)$ is defined, then the following are equivalent

- $\widetilde{\mathrm{Tor}}_*^R(M, -) \cong \widehat{\mathrm{Tor}}_*^R(M, -)$
- Every Gorenstein projective R° -module is Gorenstein flat

THEOREM

Let R be noetherian and M be a finitely generated R° -module.

If $\widehat{\mathrm{Tor}}_*^R(M, -)$ is defined, then

$$\widetilde{\mathrm{Tor}}_*^R(M, -) \cong \widehat{\mathrm{Tor}}_*^R(M, -)$$

SETUP

- R now noetherian (on either side)
- Modules are finitely generated

主定理3

(Iwanaga Gorenstein 環の特徴付)

Iwanaga Gorenstein 環では
Buchweitz等から次が言える

$$\underline{\mathrm{GP}}(R) \cong D^b(\mathrm{mod}\text{-}R)/K^b(\mathrm{proj}\text{-}R)$$



黄氏(南京大学)
加群の部分カテゴリーで上記
が成立する十分条件を考察

DETECTION OF THE GORENSTEIN PROPERTY

THEOREM

Let R be an Artin algebra or commutative. The following conditions are equivalent.

- R is Iwanaga–Gorenstein.
- For all R° -modules M and all R -modules N ,

$$\widetilde{\mathrm{Tor}}_i^R(M, N) \cong \widetilde{\mathrm{Tor}}_i^{R^\circ}(N, M)$$

Stable homology also detects commutative Gorenstein rings in a different, and perhaps surprising, way.

THEOREM

Let R be commutative. The following conditions are equivalent.

- (i) The local ring $R_{\mathfrak{p}}$ is Gorenstein for every prime ideal $\mathfrak{p}$ in R .
- (ii) For every R -module M one has $\widetilde{\mathrm{Tor}}_*^R(M, R) = 0$.

証明で必要とした定理

The proof showcases one way in which to extract π_0 from the stable homology, or rather, vanishing of stable homology.

FACT (GOTO, 1982)

The following are equivalent

- $R_{\mathfrak{p}}$ is Gorenstein for every prime ideal
- Every R -module M has a complete resolution $T \rightarrow P \rightarrow M$

FACT (FOXBY, UNPUBLISHED 2010)

The following are equivalent

- M has a complete resolution
- $M \cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(M, R), R)$ in the derived category

PROOF

(i) $\implies$ (ii): Let M be an R -module, by Goto's result it has a complete resolution $T \rightarrow P \rightarrow M$, so one has

$$\widetilde{\mathrm{Tor}}_*^R(M, R) \cong \widehat{\mathrm{Tor}}_*^R(M, R) = H(T \otimes_R R) \cong H(T) = 0$$

Contravariant finite カテゴリー approximation

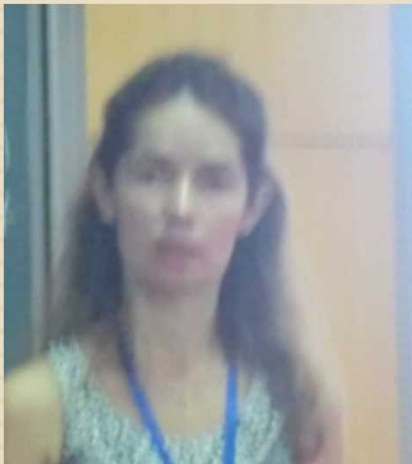
- Projective cover, Injective hull 等を近似と捉える考え
Pre-cover, cover という概念に拡張

$\mathcal{C}$ を $R\text{-mod}$ の部分カテゴリーとして、 **$\mathcal{C}$ -precover** とは
任意の加群 M に対して、 $f: G \rightarrow M$ があり $\text{Hom}_R(N, f)$ が全射となるもの

$\mathcal{C}$ -cover とは、更に、 $\varphi: G \rightarrow G$ で $\varphi f = f'$ となる φ は自己同型である、
という条件を満たすもの

代表例: Flat cover の存在 (E. Enochs, 2001)

Pre-coverの存在 (Estrada他の共同研究)



Alina Iacob(USA)

手法

GP(R) とこれに直交するもののペアが hereditary cotorsion theoryを成している (separated という条件)

定義を言っていない？

□ クルル次元有限な可換ネータ環では
GP(R)は separated pre-covering である

□ Gorenstein Projective の単純な例

$$\cdots \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \cdots$$

(写像は2倍するもの)

□ Gorenstein flat 加群は、GP-次元有限

□ Gorenstein Projective 加群は、Gorenstein flat

□ これらの結論を満たす環は、右coherent環かつ n-perfect環である。ただし、逆は不成立

声が小さいのにマイクを使わなくても大丈夫と言って使わなかった
何が大丈夫なのか？ とにかく、良く聞き取れなかった。
黒板の字が小さくて、老眼の身には辛かった。

Cotorsion pair(theory)

$(\mathcal{X}[1], \mathcal{Y}[1])$ での torsion theory

Gillespie氏の
スライドより

Definition of Complete Cotorsion Pair.

Let $\mathcal{A}$ be an abelian category, such as $R\text{-Mod}$ or $\text{Ch}(R)$.

- A pair of classes $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ of objects in $\mathcal{A}$ is a **cotorsion pair** if the following conditions hold:
 - $X \in \mathcal{X}$ iff $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, Y) = 0$ for all $Y \in \mathcal{Y}$.
 - $Y \in \mathcal{Y}$ iff $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, Y) = 0$ for all $X \in \mathcal{X}$.
- We say the cotorsion pair is **complete** if for any $A \in \mathcal{A}$ there exist short exact sequences $Y \rightarrow X \rightarrow A$ with $X \in \mathcal{X}$ and $Y \in \mathcal{Y}$, and $A \rightarrow Y' \rightarrow X'$ with $X' \in \mathcal{X}$ and $Y' \in \mathcal{Y}$.
- We say the cotorsion pair is **hereditary** if each of the following hold:
 - ① For any s.e.s. $A \rightarrow X' \rightarrow X$, if $X, X' \in \mathcal{X}$ then also $A \in \mathcal{X}$.
 - ② For any s.e.s. $Y \rightarrow Y' \rightarrow B$, if $Y, Y' \in \mathcal{Y}$ then also $B \in \mathcal{Y}$.

代数幾何的考察 (Christensenとの共同研究)



S.Estrada(Spain)

- Gorenstein性をScheme上で考察する道具($\text{Qcoh}(X)$ の局所的な概念)として、Ascent-Decent properties(**AD**)を導入
(Zalisky local(**Z-L**)条件の一般化として定義)
- Gorenstein flat sheaves と Gorenstein projective sheaves の**AD条件を満たす性質を考察**
- **もとにある結果:**
 - Krause: 2015
X を Noetherian semi-separated scheme とすると、 $\text{GI}(R)$ とこれに直交するもののペアが $\text{Qcoh}(X)$ で complete hereditary cotorsion theory を成している
 - Hartshorne 1966
P: injective である条件は、Z-L 条件を満たす
 - Gorenstein projective である条件は、Z-L 条件を満たす

ADとN-totally complex

- 条件Pが **acsent**: flat-epiである環準同形 $\varphi: R \rightarrow S$ に対し、 R -加群 M が $M \in P_R$ なら $M \otimes_R S \in P_S$
- 条件Pが **desent**: flatな環準同形 $\varphi: R \rightarrow S$ に対し、 R -加群 M が $M \otimes_R S \in P_S$ なら $M \in P_R$
- R -加群の複体 $\mathbf{F}$ が **N-totally acyclic** とは、
Acyclicな平坦加群の複体で、任意の入射加群 E で
 $E \otimes_R \mathbf{F}$ も **acyclic** になっているもの
- N-totally acyclic 複体全体を $N_{tot}(\text{FLAT}(X))$ とおく。
- 定理 : N-totally acyclicはAD

主結果

- スキーム X が quasi-compact かつ semi-separated なら
各 $M \in Q\text{coh}(X)$ は Gorenstein flat pre-cover を持つ
- アフィンスキーム X に対し、
 - $K_{tot}(\text{FLAT}(X)) \hookleftarrow K(\text{FLAT}(X))$ は right adjoint を持つ
 - R が coherent かつ N-perfect なら各加群は Gorenstein projective cover を持つ
(Iacobの結果の逆が成立する場合となる)

問い:

- (1) $D_{tot}(\text{FLAT}(X)) \hookleftarrow D(\text{FLAT}(X))$ は right adjoint を持つか
- (2) $D_{tot}(\text{FLAT}(X)) \rightrightarrows D(\text{FLAT}(X)) \cong D_G(X)$ は recollement か

Gorenstein Scheme

- アフィン quasi-compact semi-separated スキーム X に対し、 X が Gorenstein Scheme であるとは、
各 $M \in X$ で $Q_X(M)$ が Gorenstein

定理: Gorenstein Scheme に関して次は同値である。

- (1) M が Gorenstein Injective
- (2) ある X の開アフィン被覆 μ があり、
任意の $\vartheta \in \mu$ に対し、 $M(\vartheta)$ は Gorenstein injective $Q_X(\vartheta)$ -加群である。

Abosulte Clean(AC)-Injective module



J. Gillespie(USA)

Gorenstein Projective 等
に現れるrecollment を
ACの概念で整理

Historical Background and Motivation

- 2005: Krause shows that for a Noetherian ring R , we have a recollement of compactly generated triangulated categories

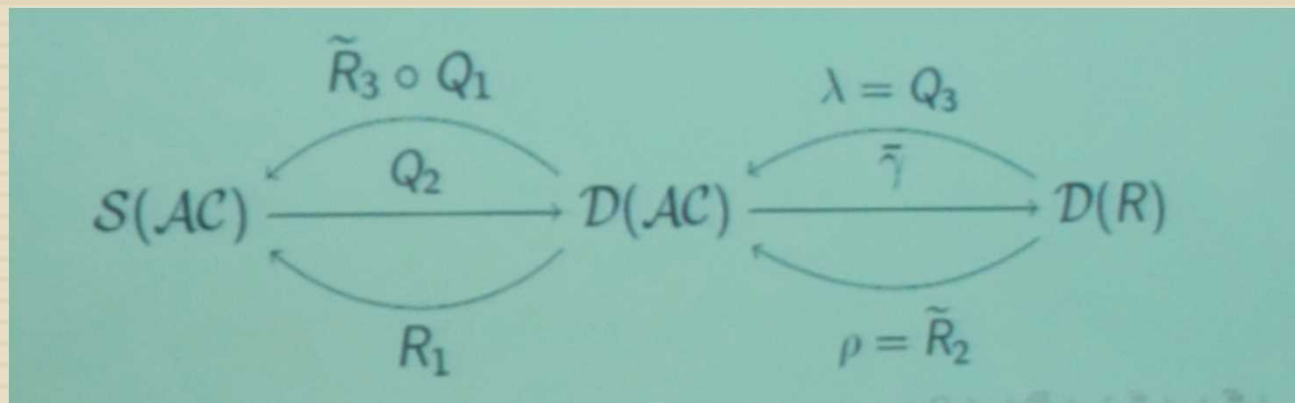
$$K_{ex}(Inj) \hookrightarrow K(Inj) \rightarrow \mathcal{D}(R).$$

- 2012: Using abelian model categories, Becker shows that the recollement holds for any ring R .
- 2014: Again using abelian model categories, Stovicek shows that $K(Inj)$ is compactly generated for any coherent ring R .

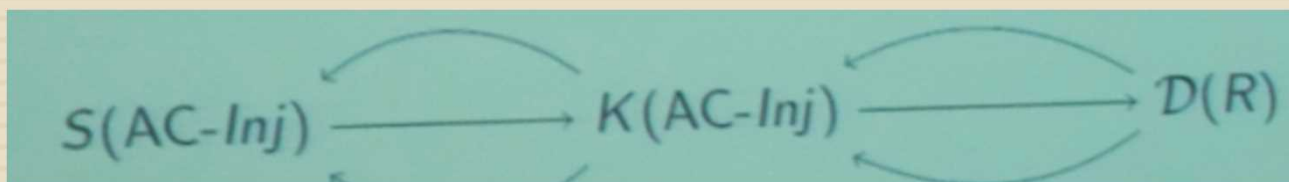
What can we say for an arbitrary ring R ?

主結果

Recollment of compactly generated triangulated category



Abelian model structure
の理論と cotosion theory の
理論から考察



利用する道具:

Cotosion pair

$$\mathcal{M}_2 = (\perp \tilde{AC}, \mathcal{V}_2, \text{ex} \tilde{AC})$$

$$\mathcal{M}_3 = (\perp \tilde{AC}, \mathcal{E}, \text{dg} \tilde{AC})$$

Gorenstein Projective 考察周辺

- Gillespie: FP_∞ -projective
- D. Bennis: infinitely presented module
- J. Trlifaj: strongly finitely presented
- Gao: super finitely presented module

同じ概念だが、違う立場で議論している。

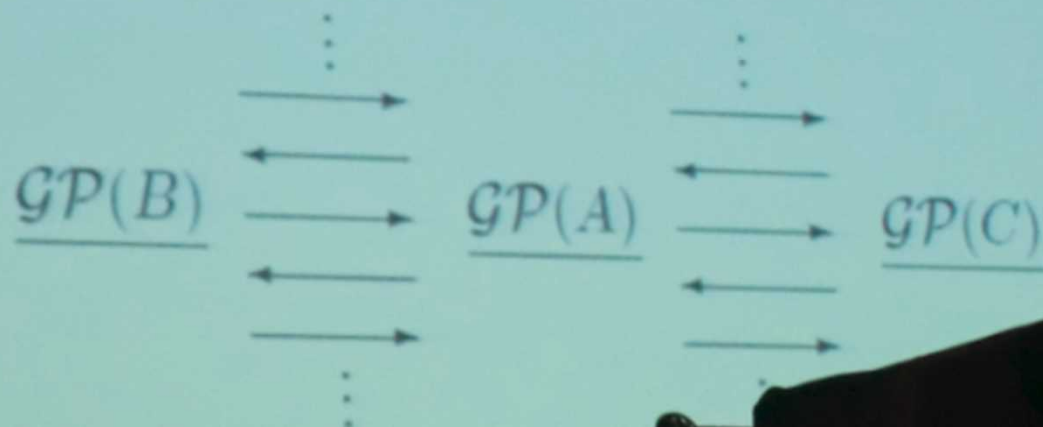
Gao氏の結果: 可換環 R で $G\text{-gl}(R) < \infty$ のとき
 R が G -hereditary (射影加群の部分加群が gorenstein projective)
 $\longleftrightarrow R$ の各イデアルが Gorenstein projective

(疑問: 可換という仮定は不要では?)

Zhang Pu 氏の考察

Lemma. A : a Gorenstein algebra. Then $\underline{\mathcal{GP}}(A)$ has AR triangles, and hence has a Serre functors.

Theorem. Let B and C be Gorenstein algebras and ${}_C M_B$ a C - B -bimodule, such that $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ M & C \end{pmatrix}$ is Gorenstein. Then $\exists$ a two-sided infinite ladder



On Homological properties and (m,n) -cluster tilting in n -abelian categories



Deren Luo(中国雲南大学)

- n -cluster tilting subcategoryの抽象化としてG.Jasso氏が定義した n -abelian categoryにextension groupやderived functor, tilting theory等の概念が自然に定義されることを示した



これを用いて、 n -cluster tilting subcategoryが持つ圏論的性質を明らかにし、その結果、 n -abelian categoryの定義の妥当性を明らかにしている(神田氏評)

n -abelian category

n -abelian categories

Definition(Jasso2014)

An n -abelian category is an additive category $\mathcal{A}$ which satisfies:

- A0. The category $\mathcal{A}$ is idempotent complete.
- A1. Every morphism in $\mathcal{A}$ has an n -kernel and an n -cokernel.
- A2. For every monomorphism $f^0: X^0 \rightarrow X^1$ in $\mathcal{A}$ $\exists$ an n -exact sequence: $X^0 \xrightarrow{f^0} X^1 \xrightarrow{f^1} \dots \xrightarrow{f^{n-1}} X^n \xrightarrow{f^n} X^{n+1}$.
- A2^{op}. For every epimorphism $f^n: X^n \rightarrow X^{n+1}$ in $\mathcal{A}$ $\exists$ an n -exact sequence: $X^0 \xrightarrow{f^0} X^1 \xrightarrow{f^1} \dots \xrightarrow{f^{n-1}} X^n \xrightarrow{f^n} X^{n+1}$.

- 1-abelian categories $\Leftrightarrow$ abelian categories ($n \geq 1$).
- An category is both m -abelian, n -abelian ($m \neq n$) $\Leftrightarrow$ semisimple.

n -abelian category での Tilting の定義

Cluster tilting subcategories of n -abelian categories

(m, n) -cluster tilting subcategories

Definition

Let $\mathcal{A}$ be an n -abelian category and $\mathcal{D}$ a generating-cogenerating full subcategory of $\mathcal{A}$. $\mathcal{D}$ is called an (m, n) -cluster tilting subcategory of $\mathcal{A}$ if $\mathcal{D}$ is functorially finite in $\mathcal{A}$ and

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \{X \in \mathcal{A} \mid \forall i \in \{1, \dots, m-1\} \ n\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, \mathcal{D}) = 0\} \\ &= \{X \in \mathcal{A} \mid \forall i \in \{1, \dots, m-1\} \ n\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(\mathcal{D}, X) = 0\}.\end{aligned}$$

- Note that $\mathcal{A}$ itself is the unique $(1, n)$ -cluster-tilting subcategory of $\mathcal{A}$.

Theorem

An (m, n) -cluster-tilting subcategory of small n -abelian category is an mn -abelian category.

Genove, APR 2017 On Homological properties and (m, n) -cluster Hangzhou, July 2015 27 / 29

微分環に関する興味ある講演



Li Guo(USA)

□ Integro-differential algebras

微分から発生した differential algebra と
積分から発生した Rota-Baxter algebra
を合わせた理論

道具の一つ Gröbner-Shirshov basis が印象的(小松先生評)

この話題に関する他の講演

(2) Yuqun Chen (South China Normal Univ., P. R. China)

Gröbner-Shirshov bases for extensions of associative and Lie algebras

(3) Yu Li (Huizhou Univ., P. R. China)

Linear bases for free Lie algebras and pre-Lie algebras

(4) Qiuhui Mo (Huizhou Univ., P. R. China)

Gröbner-Shirshov bases and embeddings of algebras

歴史と発展

- この概念は [4] において非結合代数の研究に用いられた手法が始まりで、可換多項式環に関する [3] や非可換自由代数に関する [1], [2] を経て様々な代数系に拡張されています。

- Guo 氏は「線形作用素を加味した自由代数」なるものを構成して、そこに Gröbner-Shirshov basis を導入しています。(小松先生解説)

- [1] G. M. Bergman: The diamond lemma for ring theory, Adv. in Math. 29 (1978), 178--218.

- [2] L. A. Bokut: Imbeddings into simple associative algebras,, Algebra i Logika, 15 (1976), 117--142.

- [3] B. Buchberger: Ein Algorithmus zum Auffinden der Basiselemente des Restklassenringes nach einem nulldimensionalen Polynomideal, Ph. D. thesis, University of Innsbruck (1965)

- [4] A. I. Zukov: Reduced systems of defining relations in non-associative algebras, Mat. Sbornik N. S. 27(69) (1950), 267--280.