A CHARACTERIZATION OF THE CLASS OF HARADA RINGS

KAZUTOSHI KOIKE (小池寿俊)

Abstract. One-sided Harada rings are certain artinian QF-3 rings, which can be regarded as a generalization of QF rings and serial rings (Nakayama rings). It is well-known that every left Harada ring can be represented by a upper staircase factor ring of a block extension of a QF ring. In this paper, we shall give a slightly different construction and characterization of left Harada rings by characterizing the class of left Harada rings.

1. 研究の動機

片側原田環はある種の QF-3 両側アルチン環であり，QF 環や serial 環 (中山環) の一般化と見なすことができる．原田環の性質や構造は，大城を中心として詳しく調べられており，非常に多くの特徴付けが得られている．ここでは次を定義とする．なお，片側原田環であるという性質は森田不変であることが知られているので，基本的 (basic) な場合の定義を与える．

Definition 1. 基本的な両側アルチン環 R が**左原田環**であるとは，次の条件を満たす直交原始べき等元の完全集合 $\{e_{ij} \mid i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n(i)\}$ をもつことをいう．

(1) 任意の $i = 1, \cdots, m$ に対して，$e_{i1}R$ は入射的右 R 加群である．
(2) 任意の $i = 1, \cdots, m,\ j = 1, \cdots, n(i) - 1$ に対して，$J(e_{ij}R_R) \cong e_{i,j+1}R_R$ が成り立つ．

Remark 2. 上の定義は実際には**右余原田環**と呼ばれる環のそれである．余原田環は，原田環と双対的な性質を満たす環であるが，大城によって**左**原田環と**右**余原田環の概念は一致することが示された．そのため，最近では右余原田環の性質に基づいた記述をする場合でも，左原田環と呼ぶことが多い．本論文でも左原田環と呼ぶが，用いるのはほとんどが右余原田環の性質である．

左原田環について次の構造定理が知られている．

Theorem 3 (大城 [1, Chapter 4])**.** すべての基本的左原田環は，ある QF 環のブロック拡大の上階段型剰余環で表される．

ここでブロック拡大について説明しておこう．一般の場合も同様なので簡単な例で述べると，R が基本的半完全環で，2 個から成る直交原始べき等元の完全集合 $\{e_1, e_2\}$ をもつ場合，R は行列表現 (ピアス分解)

$$R = \begin{pmatrix} A & X \\ Y & B \end{pmatrix}$$

The detailed version of this paper will be submitted for publication elsewhere.

をもつ．ただし，$A=e_1Re_1, B=e_2Re_2, X=e_1Re_2, Y=e_2Re_1$ である．ブロック拡大とは，次のような R と森田同値な環 T の部分環 S のことである．

$$S=\begin{pmatrix} A & A & A & X & X \\ J(A) & A & A & X & X \\ J(A) & J(A) & A & X & X \\ Y & Y & Y & B & B \\ Y & Y & Y & J(B) & B \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} A & A & A & X & X \\ A & A & A & X & X \\ A & A & A & X & X \\ Y & Y & Y & B & B \\ Y & Y & Y & B & B \end{pmatrix} = T.$$

ただし，$J(A), J(B)$ は radical 表す．大城はこの S を R のブロック拡大と呼び，$R(3,2)$ で表した．一般のブロック拡大も同様に定義される．なお，ブロック拡大は blow-up とも呼ばれる ([4, Chapter 6])．

このようにブロック拡大は難しいものではないが，一般に記述が少し大変である．また Theorem 3 の上階段型剰余環については，剰余を取るイデアルの記述自体も容易ではなく，左原田環を得るためにどのようなイデアルで割ることが本質的なのかも分かりにくかった．

本論文の目的は，基本的 QF 環を含み，1 個のべき等元を添加したブロック拡大と，ある種の「単純」イデアルによる剰余環 (組成列の長さが 1 だけ小さくなる) を取るという操作が，基本的左原田環全体のクラスを特徴付けることを示し，このような操作を繰り返すことにより，すべての左原田環が構成されることを述べることである．また，この構成方法について quiver による具体例で詳しく説明する．

以下，本論文において，R は単位元をもつ半完全環とし，右 R 加群 M に対して，$J(M)$ と $S(M)$ でそれぞれ M の radical と socle を表す．$S_i(M)$ $(i=1,2,\dots)$ で M の i-th socle を表し，$T(M)$ で M の top を表す．すなわち $T(M)=M/J(M)$ とする．$\mathrm{Pi}(R)$ で，固定した R の 1 つの直交原始べき等元の完全集合を表す．

2. 主結果と例

まず主結果を述べる．そのためには，原田環の研究において重要な役割を果たす，ある拡大環 (単位元は共有しない) を定義しておかなければならない．R を基本的半完全環とするとき，$e\in \mathrm{Pi}(R)$ に対して，環 R_e を次の行列環によって定める．

$$R_e=\begin{pmatrix} R & Re \\ J(eR) & eRe \end{pmatrix}.$$

明らかに R_e も基本的半完全環である．$\mathrm{Pi}(R)=\{e_1,\dots,e_i,\dots,e_n\}$，$e=e_i$ のとき，R_e は大城 [1, Chapter 4] の意味の R のブロック拡大 $R(1,\cdots,2,\cdots,1)$ に他ならない．R_e は次の 2 つの原始べき等元をもつ．

$$\tilde{e}=\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \hat{e}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

これらについて，右 R_e 加群として $J(\tilde{e}R_e)\cong \hat{e}R_e$ が成り立っている．後で述べる quiver の形からも，R_e は R に e のコピー $\hat{e}$ を添加した拡大環であると見なすことができる．

次が本論文の主結果である．

Theorem 4. 基本的左原田環全体のクラスを $\mathcal{H}$ とするとき，$\mathcal{H}$ は次の性質を満たす．

(I) $\mathcal{H}$ はすべての基本的 QF 環を含んでいる．
(II) $R\in\mathcal{H}$, $e\in\mathrm{Pi}(R)$ ならば $R_e\in\mathcal{H}$ である．

(III) $R \in \mathcal{H}$ で，$e, f \in \mathrm{Pi}(R)$ が
   (i) eR_R は入射的で $S(eR_R) \cong T(fR_R)$;
   (ii) fR_R は入射的でない
  を満たすならば，$R/S(eR_R) \in \mathcal{H}$ である．
(IV) $R \in \mathcal{H}$ で，$e, g \in \mathrm{Pi}(R)$ が
   (i) eR_R は入射的である;
   (ii) $eR/S(eR_R) \cong J(gR_R)$
  を満たすならば，$R/S(eR_R) \in \mathcal{H}$ である．

逆に，$\mathcal{H}$ は性質 (I)–(IV) を満たす最小の環のクラスである．

Remark 5. (1) $\mathcal{H}$ の最小性より，すべての基本的左原田環は

- 基本的 QF 環を取る
- (II), (III), (IV) の操作を繰り返す

ことによって得られる．性質 (I)–(IV) は左原田環の一種の「公理」と見なすことができる．

(2) 記述を簡単にするため (IV) の表現としたが，R が斜体の場合に適用すると，$\mathcal{H}$ は零環を含んでしまう．$R \in \mathcal{H}$ に斜体でないという条件をつけておけば，$\mathcal{H}$ は零環を含まない．

Theorem 4 の状況を例で説明する前に，R が体上道多元環の剰余環の場合の R_e の quiver の形を述べておく．なお，一般のブロック拡大の quiver 表現については山浦 [5] で求められているが，次のように R_e の方が当然記述は簡単になる．

Proposition 6. K を体，$Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を有限 quiver，I を道多元環 KQ の許容イデアルとし，$R = KQ/I$ とおく．$i \in Q_0$ を固定し，対応する R の原始べき等元を e_i とする．このとき，$\tilde{R} = R_{e_i}$ の quiver $\tilde{Q} = (\tilde{Q}_0, \tilde{Q}_1)$ と許容イデアル $\tilde{I}$ は次のようにして与えられる．

【頂点】$\tilde{Q}$ の頂点は，Q の頂点に i のコピー $\hat{i}$ を付け加えたものである: $\tilde{Q}_0 = Q_0 \cup \{\hat{i}\}$.

【矢】

- target が i でないような Q の矢はそのまま $\tilde{Q}$ の矢とする．
- target が i であるような Q の矢 $\alpha : j \to i$ は，target を $\hat{i}$ に変えた $\hat{\alpha} : j \to \hat{i}$ を $\tilde{Q}$ の矢とする．
- $\tilde{Q}$ は $\hat{i}$ から i への特別な矢 $\omega : \hat{i} \to i$ をもつ．(i への矢，$\hat{i}$ からの矢はこれのみである．)

$$\tilde{Q}_1 = \{\alpha \mid \alpha \in Q_1, t(\alpha) \neq i\} \cup \{\hat{\alpha} \mid \alpha \in Q_1, t(\alpha) = i\} \cup \{\omega\}.$$

【関係式 (許容イデアルの生成元)】target を i とする Q の矢 $\alpha : j \to i$ に対して，$\tilde{Q}$ の矢 $\hat{\alpha} : j \to \hat{i}$ と $\omega : \hat{i} \to i$ を合成した $\tilde{Q}$ の道 $\omega\hat{\alpha} : j \to i$ を α と名付ける．Q の関係式 (I の生成元) はそのまま $\tilde{Q}$ の関係式 ($\tilde{I}$ の生成元) であると見なす．ただし，target が i であるような Q の関係式 $\sum_l \alpha_l p_l$ ($\alpha_l : j_l \to i$ は Q の矢，$p_l : k \to j_l$ は Q の道) については，$\sum_l \hat{\alpha}_l p_l$ を $\tilde{Q}$ の関係式とする．

それでは Theorem 4 の状況を詳述しよう．

Example 7. (1) K を体とし，A を quiver と関係式

$$Q_A : 1 \underset{\gamma}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\delta}{\overset{\beta}{\leftleftarrows\!\!\!\!\!\!\rightarrow}} 3, \quad \{\delta\alpha,\ \gamma\beta,\ \alpha\gamma - \beta\delta\}.$$

で定義される QF 多元環とする．定義より (Theorem 4 (I) より) A は左原田環である．e_i $(i = 1, 2, 3)$ を頂点 i に対応する原始べき等元とする．単純加群 $T(e_iR)$ を “i” で表せば，直既約射影的右 A 加群の Loewy 列は次のようになる．

$$A_A = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \oplus \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & 2 & \end{array} \oplus \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 3 \end{array}.$$

(2) A に原始べき等元 e_3 を添加した環 $B = A_{e_3}$ を考える．Theorem 4 (II) は，B は左原田環であることを主張している．Proposition 6 より B の quiver と関係式は次の通りとなる．

$$Q_B : \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "\alpha"] & 2 \arrow[l, bend left, "\gamma"] \arrow[dr, bend right, "\hat{\delta}"'] & 3 \arrow[l, bend right, "\beta"'] \\ & & \hat{3} \arrow[u, "\omega"'] \end{tikzcd}, \quad \{\hat{\delta}\alpha,\ \gamma\beta,\ \alpha\gamma - \beta\delta\}.$$

ただし δ は道 $\delta = \omega\hat{\delta}$ である．直既約射影的右 B 加群を Loewy 列で表すと次のようになる．($\boxed{\boxed{}}$ と $\boxed{}$ は後の C や D でイデアルとして割る部分．)

$$B_B = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \oplus \begin{array}{ccc} & 2 & \\ & & 3 \\ 1 & & \\ & & \hat{3} \\ & 2 & \end{array} \oplus \begin{array}{c} 3 \\ \hat{3} \\ 2 \\ 3 \\ \boxed{\boxed{\hat{3}}} \end{array} \oplus \begin{array}{c} \hat{3} \\ 2 \\ 3 \\ \boxed{\hat{3}} \end{array}.$$

$\hat{e_3} = e_{\hat{3}}$ を頂点 $\hat{3}$ に対応する原始べき等元とすると，e_iB $(i = 1, 2, 3)$ は入射的，$J(e_3B) \cong e_{\hat{3}}B$ で，確かに B は左原田環の定義を満たしている．

(3) 左原田環 B について，e_3B は入射的，$S(e_3B) \cong T(e_{\hat{3}}B)$ で，$Be_{\hat{3}}$ は入射的ではないので，Theorem 4 (III) より，剰余環 $C = B/S(e_3B)$ は再び左原田環 (実際には QF) になる．C の quiver は B の quiver と同じであり，関係式は $\omega\hat{\delta}\beta\omega$ を追加したものである．直既約射影的右 C 加群は，B_B のそれを $\boxed{\boxed{}}$ の部分で割ったものである．

(4) 左原田環 C について，e_3C は入射的で，$e_{\hat{3}}C/S(e_{\hat{3}}C) \cong J(e_3C)$ であるから，Theorem 4 (IV) より，剰余環 $D = C/S(e_{\hat{3}}C) = B/(S(e_3B) \oplus S(e_{\hat{3}}B))$ も左原田環となる．D の quiver も B の quiver と同じであり，関係式は $\omega\hat{\delta}\beta\omega$ と $\hat{\delta}\beta\omega$ を追加したものである．直既約射影的右 D 加群は，B_B のそれを $\boxed{\boxed{}}$ と $\boxed{}$ の部分で割ったものである．

Remark 8. 本論とは直接関係ないが，Example 7 の左原田環 C の大局次元は 6 に等しい．筆者は [3] において，大局次元が 3 以下の左原田環は serial となることを示し (Theorem 2.1)，6 以上の任意の偶数 $2n$ に対して $\mathrm{gl.dim}\, R = 2n$ となる serial でない左原田環の例を構成した (Example 2.2)．大局次元が 6 である serial でない左原田環が C であり，8 以上のものは，Example 7 のように，C を元にべき等元を 1 個付け加えて剰余環を取ることによって帰納的に構成した (Remark 2.1 参照)．

なお，大局次元が有限で serial でないものは，筆者はこの例しか得ていない．大局次元が 4 や 5 であるような serial でない左原田環が存在するかどうかは，まだ分かっていない．

3. 性質 (III), (IV)

それでは，Theorem 4 の前半部分の証明について述べよう．性質 (I) は自明である．性質 (II) は左原田環のブロック拡大の左原田性の特別な場合であり，一般的な形で，例えば大城 [1, Theorem 4.2.2] で述べられている．また，比較的簡単に確かめることができる．したがって，性質 (III), (IV) が問題になる．

R を片側アルチン環，$e \in \mathrm{Pi}(R)$ で eR_R は入射的であるとする．このとき，$S(eR) \cong T(fR)$, $S(Rf) \cong T(Re)$ となるような $f \in \mathrm{Pi}(R)$ が存在し，${}_RRf$ は入射的である．このような (eR, Rf) は ***i*-pair** と呼ばれる．また $S(eR) = S(Rf)$ であるからこれは両側イデアルで，左右いずれの加群としても単純である．

なお，i-pair の概念は原田環の研究においても非常に重要な役割を果たす．以下でも，R が左原田環の場合に剰余環 $\bar{R}$ における直既約射影的右 $\bar{R}$ 加群 $\bar{g}\bar{R}$ の入射性を述べるが，実際には i-pair を用いて証明する．

Theorem 4 の (III), (IV) は，R が左原田環の場合の剰余環 $\bar{R} = R/S(eR)$ の左原田性を扱っている．次の Lemma は eR が入射的であるという条件のみで成り立つ．

Lemma 9. R を基本的左原田環とし，eR_R は入射的 $(e \in \mathrm{Pi}(R))$ であるとする．剰余環 $\bar{R} = R/S(eR)$ について，次が成り立つ．

(1) $gR \cong J(hR)$ $(g, h \in \mathrm{Pi}(R))$ のとき，
  (a) $h \neq e$ であれば，$\bar{g}\bar{R} \cong J(\bar{h}\bar{R})$ である．
  (b) $h = e$ であれば，$\bar{g}\bar{R}_{\bar{R}}$ は入射的である．

(2) gR_R が入射的 $(g \in \mathrm{Pi}(R))$ のとき，$g \neq e$ であれば，$\bar{g}\bar{R}_{\bar{R}}$ も入射的である．

一般に，基本的アルチン R が左原田環であるためには，任意の $g \in \mathrm{Pi}(R)$ に対して，gR が入射的であるか，ある $h \in \mathrm{Pi}(R)$ に対して $gR \cong J(hR)$ であることが必要十分であるから，この Lemma より，eR が入射的のとき，剰余環 $\bar{R} = R/S(eR)$ はかなり左原田環に近いことが分かる．したがって，剰余環 $\bar{R}$ において $\bar{e}\bar{R}$ が入射的または $\bar{e}\bar{R} \cong J(\bar{g}\bar{R})$ $(g \in \mathrm{Pi}(R))$ となるかどうかが問題となる．Theorem 4 (IV) は後者となる場合なので，性質 (IV) も分かった．

Lemma 10. R を基本的左原田環とし，eR_R は入射的で $S(eR) \cong T(fR)$，fR_R は入射的でなく $fR \cong J(gR)$ $(e, f, g \in \mathrm{Pi}(R))$ であるとする．剰余環 $\bar{R} = R/S(eR)$ について，次が成り立つ．

(1) ${}_RRg$ が入射的でないとき，$\bar{e}\bar{R}_{\bar{R}}$ は入射的である．

(2) ${}_RRg$ が入射的のとき，$S(hR) \cong T(gR)$ $(h \in \mathrm{Pi}(R))$ とする．$h_1 = h, h_2, \ldots, h_n \in \mathrm{Pi}(R)$ を，$J(h_iR) \cong h_{i+1}R$ $(i = 1, \ldots, n-1)$，$J(h_{n+1}R)$ は射影的でない，であるようなものとすれば，$\bar{e}\bar{R} \cong J(\bar{h_n}\bar{R})$ が成り立つ．

したがって，Theorem 4 (III) の仮定の下では，$\bar{e}\bar{R}$ は左原田環の条件を満たす射影的右 $\bar{R}$ 加群になるので，(III) も言える．なお，Lemma 9 に比べると Lemma 10 の証明は容易ではなく，いくつかの準備を必要とする．

Theorem 4 (III), (IV) を繰り返し適用すると次が分かる．後で用いるようにこの結果は有用であり，基本的左原田環の剰余環がいつ再び左原田環になるかを示している．

Theorem 11. R を基本的左原田環とし，$e_1, \ldots, e_n, f \in \mathrm{Pi}(R)$ は次を満たすとする．

(1) e_1R は入射的で，$S(e_1R) \cong T(fR)$，

(2) $J(e_iR) \cong e_{i+1}R \quad (i = 1, \ldots, n-1)$．

もし fR が入射的でなければ，R/K_i $(i = 1, \cdots, n)$ も左原田環である．ただし，

$$K_i = S(e_1R) \oplus \cdots \oplus S(e_nR)$$

とする．

Remark 12. R が基本的左原田環のとき，Theorem 11 の設定で，必ずしも fR が入射的でなくても，

$$S(e_1R_R) \oplus \cdots \oplus S(e_nR_R) = S_i({}_RRf)$$

であることが知られている．

4. $\mathcal{H}$ の最小性

$\mathcal{H}$ の最小性については，次の 2 つの Lemma から従う．

Lemma 13 ([2, Proposition 2.15])**.** R を基本的左原田環，fR $(f \in \mathrm{Pi}(R))$ は入射的でないとする．このとき，$(1-f)R(1-f)$ は左原田環となる．

Lemma 14 ([2, Lemma 2.6 and Lemma 2.7])**.** R を基本的原田環，$fR \cong J(eR)$ $(e, f \in \mathrm{Pi}(R))$ とする．$R' = (1-f)R(1-f)$，$\tilde{R} = R'_e$ とおく．

(1) Re が入射的でないとき，$R \cong \tilde{R}$ である．
(2) Re が入射的のとき，ある $i \geq 1$ が存在して $R \cong \tilde{R}/K_i$ である．ただし，$K_i = S_i(\tilde{R}\hat{e})$ は Theorem 11 の通りとする．

左原田環の構造において，これらの Lemma は非常に重要である．Lemma 13 は，与えられた左原田環が QF 環でなければ，右入射的でない直既約射影的加群に対応する原始べき等元を取り除いて「縮小」したものも，再び左原田環であることを示している．Lemma 14 は，それにある原始べき等元を添加すれば，元の左原田環が「復元」できることを示している．これらを用いれば Theorem 4 における $\mathcal{H}$ の最小性が示せるが，その前にこれらの Lemma を例で述べよう．

Example 15. R を許容列 $(4, 4, 3)$ をもつ serial 環とし，e_1, e_2, e_3 を対応する直交原始べき等元とする．このとき e_1R と e_2R は入射的で，$J(e_2R) \cong e_3R$ である．R は左原田環であるから Lemma 13 が適用できるので，$R' = (1-e_3)R(1-e_3)$ は左原田環 (実際には serial 環) である．$\tilde{R} = R'_{e_2}$ とおけば，Theorem 4 (II) より左原田環 (serial 環) である．Lemma 14 は，

$$R \cong \tilde{R}/(S(e_2\tilde{R}) \oplus S(\hat{e}_2\tilde{R}))$$

として，R は $R' = (1-e)R(1-e)$ から復元できることを示している．直既約射影的右加群を図示すると，次の通りである．

$$R_R = \begin{array}[t]{c}1\\2\\3\\1\end{array} \oplus \begin{array}[t]{c}2\\3\\1\\2\end{array} \oplus \begin{array}[t]{c}3\\1\\2\end{array}, \quad R'_{R'} = \begin{array}[t]{c}1\\2\\1\end{array} \oplus \begin{array}[t]{c}2\\1\\2\end{array}, \quad \tilde{R}_{\tilde{R}} = \begin{array}[t]{c}1\\2\\\hat{2}\\1\end{array} \oplus \begin{array}[t]{c}2\\\hat{2}\\1\\2\\\boxed{\hat{2}}\end{array} \oplus \begin{array}[t]{c}\hat{2}\\1\\2\\\boxed{\hat{2}}\end{array}.$$

実際，$\tilde{R}$ において $\square$ の部分で割って $\hat{2}$ と 3 を同一視すれば，R に一致する．

それでは Theorem 4 における $\mathcal{H}$ の最小性の証明を与えよう．

Proof (Theorem 4 における $\mathcal{H}$ の最小性)．$\mathcal{H}'$ を Theorem 4 の性質 (I)–(IV) を満たす環のクラスとする．$\mathcal{H} \subset \mathcal{H}'$ を示せばよい．$R \in \mathcal{H}$ とする．$R \in \mathcal{H}'$ を直交原始べき等元の完全集合に含まれる元の個数 $\#\,\mathrm{Pi}(R)$ に関する帰納法で示す．R が QF であれば，性質 (I) より $R \in \mathcal{H}'$ であるから，R は QF でないと仮定する．

R は QF でないから，$e, f \in \mathrm{Pi}(R)$ で $fR \cong J(eR)$ となるものが存在する．$R' = (1-f)R(1-f)$ とおくと，Lemma 13 より R' は左原田環である．したがって帰納法の仮定より $R' \in \mathcal{H}'$ である．よって $\tilde{R} = R'_e$ とおけば，性質 (II) より $\tilde{R} \in \mathcal{H}'$ である．

Re が入射的でないとき，Lemma 14(1) より $R \cong \tilde{R} \in \mathcal{H}'$ を得る．Re が入射的のとき，Lemma 14(2) より $R \cong \tilde{R}/K_i$ $(i \geq 1)$ である．したがって，Theorem 11 (これは性質 (III), (IV) を繰り返し用いて得られている) より，$R \cong \tilde{R}/K_i \in \mathcal{H}'$ が分かる．

最後に Theorem 4 の一つの応用について述べる．[2] において，筆者はすべての左原田環は**概自己双対性** (almost self-duality) と呼ばれる自己双対性 (self-duality) の一般化をもつことを示した．そこでの証明は，左原田環に関する Lemma 13, 14 を示すことと，概自己双対性のいくつかの性質を示すことによって与えたが，Theorem 4 の観点からは次のように述べることができる．

Example 16 ([2, Theorem 3.2])．概自己双対性をもつ基本的アルチン環のクラス $\mathcal{A}$ は，Theorem 4 の性質 (I)–(IV) を満たす．したがって Theorem 4 の $\mathcal{H}$ の最小性より，$\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$ である．すなわち，すべての (基本的) 左原田環は概自己双対性をもつ．

References

[1] Y. Baba and K. Oshiro. *Classical Artinian rings and related topics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2009.
[2] K. Koike. Almost self-duality and Harada rings. *J. Algebra*, 254(2):336–361, 2002.
[3] K. Koike. Global dimension of harada rings and serial rings. *J. Algebra Appl.*, to appear.
[4] G. Puninski. *Serial rings*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.
[5] K. Yamaura. Quivers with relations of Harada algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138(1):47–59, 2010.

Okinawa National College of Technology
905 Henoko, Nago City
Okinawa 905-2192, JAPAN
E-mail address: koike@okinawa-ct.ac.jp