GEIGLE-LENZING PROJECTIVE SPACES AND d-CANONICAL ALGEBRAS

OSAMU IYAMA

Abstract. Following [4], we introduced Geigle-Lenzing projective spaces and d-canonical algebras.

重み付き射影直線は, 1987 年に Geigle-Lenzing [3] によって導入されたものであり, 射影直線 $\mathbb{P}^1$ を recollement により拡大したものであり, また $\mathbb{P}^1$ 上の特別な整環から与えられる [10, Appendix A]. 重み付き射影直線は, Ringel [11] が 1984 年に導入した標準多元環と導来圏同値であり, 今日では箙の道多元環とともに, 多元環の表現論における基本的対象となっている．本稿では, 重み付き射影直線と標準多元環の高次元化である *Geigle-Lenzing* **射影空間**と d-**標準多元環**を導入して基本的な性質を調べ, 応用として高次元 Auslander-Reiten 理論において基本的な d-**無限表現型多元環**が得られることを観察する．詳細は論文 [4][7] を参照されたい.

Remark 1. Geigle-Lenzing の導入した重み付き射影直線や, その一般化である Geigle-Lenzing 射影空間は, 後述する特別な完全交叉環 R から構成される．一方, 非標準的に次数付けされた多項式環 S に付随する Proj$S$ を重み付き射影空間とよぶことがあるが, 両者は一般には異なるものである.

以下, 基礎体を k とする．射影空間 $\mathbb{P}^d$ の斉次座標環を $k[T_0,\dots,T_d]$ とし, 各 $1 \le i \le n$ に対して, $\mathbb{P}^d$ 内の超平面 $L_1,\dots,L_n$ が一次式

$$\ell_i = \sum_{j=0}^{d} \lambda_{ij} T_j \in k[T_0,\dots,T_d].$$

で定義されるとする．正整数の組 $(p_1,\dots,p_n)$ に対し, 可換 k-代数 R を

$$R := k[T_0,\dots,T_d,X_1,\dots,X_n]/(X_i^{p_i} - \ell_i \mid 1 \le i \le n)$$

と定める．次に, $\vec{x}_i$ $(1 \le i \le n)$ と $\vec{c}$ で生成される自由アーベル群 $\langle \vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n,\vec{c}\rangle$ の剰余群

$$\mathbb{L} := \langle \vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n,\vec{c}\rangle / \langle p_i\vec{x}_i - \vec{c} \mid 1 \le i \le n\rangle$$

を考える．$\deg X_i := \vec{x}_i$, $\deg T_j := \vec{c}$ とおくことにより, R は $\mathbb{L}$-次数付き k-代数となる．R の基本的な性質を挙げる.

- R は Krull 次元 $d+1$ の完全交叉環である.
- R の a-**不変量**（*Gorenstein* **パラメータ**）は

$$\vec{\omega} := (n-d-1)\vec{c} - \sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i \in \mathbb{L}$$

The detailed version of this paper will be submitted for publication elsewhere.

で与えられる．つまり $\mathbb{L}$-次数付き R-加群としての同型 $\mathrm{Ext}_R^{d+1}(k, R(\vec{\omega})) \simeq R$ が存在する．

以下, 本文を通して $L_1, \ldots, L_n$ が一般の位置にあると仮定する．$\mathbb{L}$-次数付き有限生成 R-加群の圏を $\mathsf{mod}^{\mathbb{L}} R$ で表し, 有限次元加群からなる充満部分圏を $\mathsf{mod}_0^{\mathbb{L}} R$ で表わす．$\mathsf{mod}_0^{\mathbb{L}} R$ は $\mathsf{mod}^{\mathbb{L}} R$ の Serre 部分圏となっており, 商圏

$$\mathsf{coh}\, \mathbb{X} := \mathsf{mod}^{\mathbb{L}} R / \mathsf{mod}_0^{\mathbb{L}} R$$

はアーベル圏となる．これを *Geigle-Lenzing* **射影空間** $\mathbb{X}$ 上の**連接層**の圏と呼ぶ．$d = 1$ の場合が, Geigle-Lenzing の導入した重み付き射影直線に他ならない．

$\mathsf{coh}\, \mathbb{X}$ の基本的な性質を挙げる．

- $\mathsf{coh}\, \mathbb{X}$ は大域次元 d のアーベル圏である．
- （*Serre* **双対性**）関手的同型 $\mathrm{Ext}_{\mathbb{X}}^d(X, Y) \simeq D\,\mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(Y, X(\vec{\omega}))$ $(X, Y \in \mathsf{coh}\, \mathbb{X})$ が存在する．

Geigle-Lenzing 射影空間の持つ重要な性質として, 傾対象の存在が挙げられる．まず傾対象の定義を復習する．

Definition 2. 三角圏 $\mathcal{T}$ の対象 $M \in \mathcal{T}$ が**傾対象**であるとは, 任意の整数 $i \neq 0$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(M, M[i]) = 0$ が成立し, さらに M を含む $\mathcal{T}$ の最小の thick 部分圏（=直和因子で閉じた三角部分圏）が $\mathcal{T}$ となることである．

例えば, 環 B に対し有限生成射影 B-加群の有界ホモトピー圏 $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\, B)$ は傾対象を持つ．逆に, 三角圏 $\mathcal{T}$ が傾対象 T を持つとき, 若干の仮定の下（代数的かつ idempotent complete）で, $\mathcal{T}$ は $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\, \mathrm{End}_{\mathcal{T}}(T))$ と三角同値になる．

$\vec{x}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ と $\vec{c}$ で生成される $\mathbb{L}$ の部分モノイドを, $\mathbb{L}_+$ で表わす．$\vec{x} - \vec{y} \in \mathbb{L}_+$ であるときに $\vec{x} \geq \vec{y}$ と表わすことにより, $\mathbb{L}$ は半順序集合となる．今,

$$[0, d\vec{c}] := \{\vec{x} \in \mathbb{L} \mid 0 \leq \vec{x} \leq d\vec{c}\}$$

とおく．

Theorem 3. (a) $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{coh}\, \mathbb{X})$ は傾対象 $T := \bigoplus_{\vec{x} \in [0, d\vec{c}]} R(\vec{x})$ を持つ．

(b) T の自己準同型環 $A := \mathrm{End}_{\mathbb{X}}(T)$ に対し, 三角圏同値 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{coh}\, \mathbb{X}) \simeq \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod} A)$ が存在する．

A を d-**標準多元環**と呼ぶ．$n = 0$ の場合は Beilinson [2] による古典的な結果であり, この場合の A を *Beilinson* **多元環**と呼ぶ．$d = 1$ の場合が Geigle-Lenzing [3] によるものであり, この場合の A が Ringel [11] によって導入された標準多元環である．$n \leq d + 1$ の場合は Baer [1] によって知られており, 最近 $n = d + 2$ の場合が Ishii-Ueda [6] によって与えられた．

d-標準多元環の箙 (quiver) 表示を与えるために, 一般性を失うことなく以下を仮定する:

- $n \geq d + 1$.
- 各 $1 \leq i \leq d + 1$ に対して $\ell_i = T_{i-1}$.

このとき, R は以下で表示される:

$$R = k[X_1, \ldots, X_n] / (X_i^{p_i} - \ell_i(X_1^{p_1}, \ldots, X_{d+1}^{p_{d+1}}) \mid d + 2 \leq i \leq n)$$

Theorem 4. d-標準多元環 A は以下の箙と関係式で表示される:

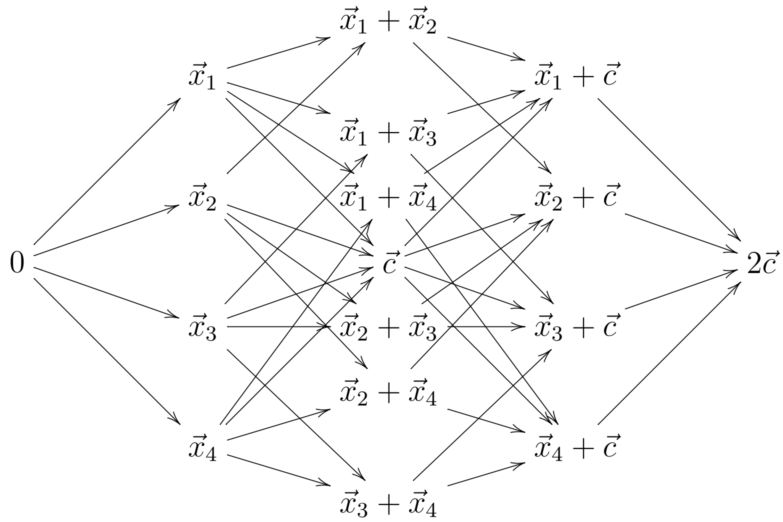
(i) 点は $Q_0 := [0, d\vec{c}]$.

(ii) 矢は $Q_1 := \{x_i : \vec{x} \to \vec{x} + \vec{x}_i \mid 1 \le i \le n, \quad \vec{x}, \vec{x} + \vec{x}_i \in [0, d\vec{c}]\}$.

(iii) 関係式は以下の 2 種類:

- $x_i x_j - x_j x_i : \vec{x} \to \vec{x} + \vec{x}_i + \vec{x}_j$ $(1 \le i < j \le n,\ \vec{x}, \vec{x} + \vec{x}_i + \vec{x}_j \in [0, d\vec{c}])$.
- $x_i^{p_i} - \sum_{j=1}^{d+1} \lambda_{i,j-1} x_j^{p_j} : \vec{x} \to \vec{x} + \vec{c}$ $(d+2 \le i \le n,\ \vec{x}, \vec{x} + \vec{c} \in [0, d\vec{c}])$.

例えば $d = 2$, $n = 4$, $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 2$ の場合に, 箙 Q は以下で与えられる.



いま B を有限次元多元環とし, 大域次元が有限であると仮定する. 中山関手

$$\nu := - \otimes_B (DB) : \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}B) \to \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}B)$$

に対して $\nu_d := \nu \circ [-d]$ とおく. 次の概念は高次元 Auslander-Reiten 理論で基本的である.

Definition 5. [5] B が d-**無限表現型**であるとは, B の大域次元が d であり, かつ $\nu_d^{-i}(B) \in \mathsf{mod}B$ が任意の $i \ge 0$ に対して成立することである.

k が代数的閉体の場合, 1-無限表現型多元環とは, 非 Dynkin 型箙の道多元環に他ならない. d-無限表現型多元環は, d-**有限表現型**と呼ばれる多元環とともに, 大域次元 d の多元環の中で表現論的観点からもっとも基本的なクラスと考えられる.

d-標準多元環の次の性質は基本的である.

Theorem 6. 一般性を失うことなく $p_i \ge 2$ $(1 \le i \le n)$ であると仮定する. このとき

$$\mathrm{gl.dim}\, A = \begin{cases} d & (n \le d+1), \\ 2d & (n > d+1). \end{cases}$$

さらに $n \le d+1$ ならば, A は d-無限表現型である.

$n \le d+1$ の場合は, より詳しく [5] で $\widetilde{A}$ **型**と呼ばれる d-無限表現型多元環となっている.

いま R の a-不変量 $\vec{\omega}$ に対して,

$$\deg \vec{\omega} := n - d - 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}$$

とおき, その符号によって Geigle-Lenzing 射影空間を以下の 3 通りに分類する.

$\deg \vec{\omega}$	< 0	$= 0$	> 0
$\mathbb{X}$	d-Fano	d-Calabi-Yau	d-anti-Fano

$d = 1$ の場合, これらは重み付き射影直線の domestic, tubular, wild の 3 つのタイプに相当する.

Geigle-Lenzing 射影空間の d-Fano 性は, d-標準多元環の Minamoto [8][9] の意味での d-Fano 性と同値である:

Proposition 7. *Geigle-Lenzing* 射影空間 $\mathbb{X}$ が *d-Fano* であることと, d-標準多元環 A が *d-Fano* 多元環であることは同値.

Geigle-Lenzing 射影空間のうち, d-Fano であるものはより基本的であると考えられる. 実際 $d = 1$ の場合, domestic 型の重み付き射影直線は, 拡大ディンキン型箙の道多元環と導来圏同値である. このことから Theorem 6 後半の一般化として, 次が自然に期待される.

Conjecture $\mathbb{X}$ が d-Fano ならば, ある d-無限表現型多元環と導来圏同値である.

この予想に対する部分的な回答として, 以下が成立する.

Theorem 8. $n = d + 2$ かつ $p_1 = p_2 = 2$ ならば, $\mathbb{X}$ はある d-無限表現型多元環と導来圏同値である.

証明は, R の Cohen-Macaulay 表現を調べることからはじまる. 詳細は割愛する.

References

[1] D. Baer, *Tilting sheaves in representation theory of algebras*, Manuscripta Math. 60 (1988), no. 3, 323–347.

[2] A. A. Beĭlinson, *Coherent sheaves on $\mathbf{P}^n$ and problems in linear algebra*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 12 (1978), no. 3, 68–69.

[3] W. Geigle, H. Lenzing, *A class of weighted projective curves arising in representation theory of finite-dimensional algebras*, Singularities, representation of algebras, and vector bundles (Lambrecht, 1985), 265–297, Lecture Notes in Math., 1273, Springer, Berlin, 1987.

[4] M. Herschend, O. Iyama, H. Minamoto, S. Oppermann, *Geigle-Lenzing projective spaces and d-canonical algebras*, in preparation.

[5] M. Herschend, O. Iyama, S. Oppermann, *n-Representation infinite algebras*, Adv. Math. 252 (2014), 292–342.

[6] A. Ishii, K. Ueda, *A note on derived categories of Fermat varieties. Derived categories in algebraic geometry*, 103–110, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zurich, 2012.

[7] O. Iyama, B. Lerner, *Tilting bundles on orders on $\mathbf{P}^d$*, arXiv:1306.5867.

[8] H. Minamoto, *Ampleness of two-sided tilting complexes*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2012, no. 1, 67–101.

[9] H. Minamoto, I. Mori, *The structure of AS-Gorenstein algebras*, Adv. Math. 226 (2011), no. 5, 4061–4095.

[10] I. Reiten, M. Van den Bergh, *Grothendieck groups and tilting objects*, Algebr. Represent. Theory 4 (2001), no. 1, 1–23.

[11] C. M. Ringel, *Tame algebras and integral quadratic forms*, Lecture Notes in Mathematics, 1099. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

Graduate School of Mathematics
Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya 464-8602 JAPAN
E-mail address: iyama@math.nagoya-u.ac.jp