ULRICH MODULES AND SPECIAL MODULES OVER 2-DIMENSIONAL RATIONAL SINGULARITIES

KEI-ICHI WATANABE (渡辺敬一) AND KEN-ICHI YOSHIDA (吉田健一)

ABSTRACT. In this talk, we study Ulrich ideals and Ulrich modules with respect to some ideals. As the main result, we classify all Ulrich ideals and Ulrich modules of 2-dimensional Gorenstein rational singularities. Moreover, we prove that the notion of Ulrich modules and that of special modules in 2-dimensional Gorenstein rational singularities.

Key Words: Cohen-Macaulay module, Gorenstein ring, Ulrich ideal, good ideal, Ulrich module, special module, rational singularity, Riemann-Roch theorem, McKay correspondence

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 13H10, 13H15; Secondary 13A30, 14B05, 14C40, 16G50.

本講演は, 講演者の他, 後藤四郎氏 (明治大学), 高橋亮氏 (名古屋大学), 大関一秀氏 (山口大学) との共同研究の報告である ([4], [5]).

1. 背景

この講演を通じて, 特に断らない限り, $(A, \mathfrak{m}, k)$ は可換なネーター局所整域とし, 単位元 1_A を持つとする．また, $\mathfrak{m}$ は A のただ 1 つの極大イデアル, $k = A/\mathfrak{m}$ を剰余体とする．$d = \dim A$ を A の**クルル次元** (Krull dimension) を表すものとする．

さらに, 講演を通じて, M は有限生成 A 加群を表すものとし, $\ell_A(M)$ は M の**長さ** (length), $\mu_A(M) = \ell_A(M/\mathfrak{m}M)$ を M の**極小生成系の個数** (minimal number of generators) $\mathrm{rank}_A(M) = \dim_{Q(A)}(M \otimes_A Q(A))$ を M の**階数** (rank), $e_A(M) = e^0_{\mathfrak{m}}(M)$ を M の極大イデアルに関する**重複度** (multiplicity) を表すものとする．ここで, $Q(A)$ は A の**商体**を表す．一般に, A の $\mathfrak{m}$-準素イデアル I に対して, 十分大きな整数 n を取れば, $\ell_A(A/I^{n+1})$ は n についての多項式となり, 次のように表すことができる：

$$\ell_A(A/I^{n+1}) = e_0\binom{n+d}{d} - e_1\binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + (-1)^d e_d.$$

このとき, $e_0 = e(I)$ を I に関する**重複度**と言う．さらに, A が整域のときには,

$$e^0_I(M) = e(I) \cdot \mathrm{rank}_A(M)$$

により, I に関する M の重複度が計算できる．

本講演の主役である極大 Cohen-Macaulay 加群 (以下, 極大 Cohen-Macaulay 加群と呼ぶ) と Ulrich Cohen-Macaulay 加群の定義から始めよう．

The detailed version of this paper will be submitted for publication elsewhere.

Definition 1. $\mathrm{Ext}_A^i(A/\mathfrak{m}, M) = 0$ $(0 \le \forall i < d = \dim A)$ が成立するとき, M は**極大 Cohen-Macaulay** A **加群**であるという。明確なときは, 極大 Cohen-Macaulay 加群と呼ぶ。

極大 Cohen-Macaulay 加群について, 次の不等式は基本的である.

Lemma 2. *M が極大 Cohen-Macaulay 加群ならば,*

$$\mathrm{rank}_A M \le \mu_A(M) \le e_A(M)$$

が成り立つ.

Definition 3 (Brennan-Herzog-Ulrich [1]). M が極大 Cohen-Macaulay 加群で, 等号 $\mu_A(M) = e_A(M)$ が成立するとき, M は **Ulrich Cohen-Macaulay** A **加群** であるという. 以下では, **Ulrich 加群**と呼ぶ。

次に, special Cohen-Macaulay 加群の定義を思い出そう. その前に有理特異点について少し説明しよう. $(A, \mathfrak{m}, k)$ を２次元の完備局所整閉整域とし, 剰余体 k は標数 0 の代数的閉体と仮定する. ある特異点解消 $\pi\colon X \to \mathrm{Spec}\, A$ が存在して, $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ が成り立つとき, A は**有理特異点**であると言う.

有理特異点の代表的な例は商特異点である. 例えば, 次の環は代表的な例である.

$$k[[s^4, st, y^4]] \cong k[[x, y, z]]/(x^2 + y^4 + z^2).$$
$$k[[s^4, s^3t, s^2t^2, st^3, t^4]].$$

特に, **２次元の Gorenstein 有理特異点**は, **有理二重点** (rational double point) とも呼ばれ, 次のいずれかの方程式 f で定義される超曲面 $A = k[[x, y, z]]/(f)$ であることが知られている (cf. [9], [10]):

$$\begin{array}{ll} (A_n) & z^2 + x^2 + y^{n+1} \ (n \ge 1) \\ (D_n) & z^2 + x^2y + y^{n-1} \ (n \ge 4) \\ (E_6) & z^2 + x^3 + y^4 \\ (E_7) & z^2 + x^3 + xy^3 \\ (E_8) & z^2 + x^3 + y^5. \end{array}$$

さて, ２次元有理特異点上の special Cohen-Macaulay 加群の定義を与えておこう (注意：より一般に定義されているが, ここでは有理特異点に限定する).

Definition 4. A を２次元の有理特異点とし, M を極大 Cohen-Macaulay 加群とする. このとき, M が **special Cohen-Macaulay** A **加群**であるとは, $M^* := \mathrm{Hom}_A(M, A) \cong \mathrm{Syz}_A^1(M)$ が成り立つことと定める. 明らかな場合は, **special 加群**と呼ぶ。

Wunram [14] は２次元巡回商特異点上のすべての special 加群を分類した. また, Iyama-Wemyss [7] はその結果を拡張し, ２次元の商特異点における special 加群を完全に分類し, その Auslander-Reiten グラフを記述した.

先に与えた有理 (商) 特異点の例に対して, 直既約な Ulrich 加群と special 加群を明確にしておこう.

Example 5. $A = k[[s^4, st, t^4]] \cong k[[x, y, z]]/(x^2 + y^4 + z^2)$ の極小な特異点解消の双対グラフは $E_1 - E_2 - E_3$ である. ここで, $E_1^2 = E_2^2 = E_3^2 = -2$, $E_1E_2 = E_2E_3 = 1$, 及び $E_1E_3 = 0$ が成り立つ. McKay 対応により, 我々は E_i $(i = 1, 2, 3)$ に対応する直既約な極大 Cohen-Macaulay 加群 M_i を見出すことができる.

	生成系	階数	$\mu_A(M)$	$e(M)$	
M_0	A	1	1	2	free
M_1	$As+At^3$	1	2	2	Ulrich, special
M_2	As^2+At^2	1	2	2	Ulrich, special
M_3	As^3+At	1	2	2	Ulrich, special

Example 6. $A=k[[s^4,s^3t,s^2t^2,st^3,t^4]]$ とおく. 極小特異点解消 $\pi\colon X\to \operatorname{Spec} A$ の双対グラフは, E_1 のみである. ここで, $E_1^2=-4$ である.

Special McKay 対応 (cf. [14]) により, E_1 に対応する直既約な極大 Cohen-Macaulay A 加群 M_1 が存在する.

	生成系	階数	$\mu_A(M)$	$e(M)$	
M_0	A	1	1	4	free
M_1	$As+At$	1	2	4	special
M_2	$As^2+Ast+At^2$	1	3	4	
M_3	$As^3+As^2t+Ast^2+At^3$	1	4	4	Ulrich

イデアル I に関する Ulrich 加群の概念と Ulrich イデアルの概念を定義しよう.

Definition 7. A を Cohen-Macaulay 局所整域とし, I を $\mathfrak{m}$ 準素イデアルとする. 極大 Cohen-Macaulay A 加群 M が $\ell_A(M/IM)=e_I^0(M)$ と, $M/$ が A/I 自由加群であることをみたすとき, I **に関する Ulrich Cohen-Macaulay** A **加群**, 略して, I **に関する Ulrich 加群**であるという.

Definition 8. パラメーター系で生成されないイデアルが, I のある**極小還元** (minimal reduction) Q に対して $I^2=QI$b をみたし, I/I^2 が A/I-自由加群ならば, **Ulrich イデアル**と言う.

Ulrich イデアルの代表的な例を与えておこう.

Example 9. (1) ([11])A が Cohen-Macaulay 局所整域で, **極小重複度** (minimal multiplicity) を持つとき, $\mathfrak{m}$ は Ulrich イデアルになる.

(2) $A=k[[x_1,\dots,x_n]]/(x_1^{a_1}+\cdots+x_n^{a_n})$ のとき, もし $a_1=2b$ が偶数ならば, $I_b=(x_1^b,x_2,\dots,x_n)$ は Ulrich イデアルになる. $k[[x,y,z]]/(x^3+y^3+z^3)$ も Ulrich イデアルを持つが, この形にはなっていない (後述未解決問題参照 Watanabe-Yoshida:No.1).

Ulrich イデアル上の Ulrich 加群の理論は, 重複度 2 の超曲面の (極大イデアルに関する) Ulrich 加群の理論を拡張したものと考えることができる. その視点でみたとき, 次の 2 つの結果はごく自然なものである ([1] 参照).

Theorem 10. $(A,\mathfrak{m},k)$ を *Cohen-Macaulay* 局所整域とする. $i\ge d$ に対して, I が *Ulrich* イデアルならば, $\operatorname{Syz}_A^i(A/I)$ は I に関する *Ulrich* 加群である. $d=\dim A\ge 1$ のときは, 逆も正しい.

Theorem 11. M は I に関する *Ulrich* 加群と仮定する. このとき, $M^\vee=\operatorname{Hom}_A(M,K_A)$ が *Ulrich* 加群であることと, A/I が *Gorenstein* であることとは同値である.

Gorenstein 局所環において, Ulrich イデアルは興味深い特徴付けを持つ. イデアル I が **good イデアル**であるとは, $I^2=QI$ をみたす極小還元 Q が存在して, $I^2=QI$ であり, $2\cdot\ell_A(A/I)=e_I^0(A)$ が成り立つときを言う.

Proposition 12. A は *Gorenstein* 局所環とする. このとき, 次は同値である.

(1) I は *Ulrich* イデアルである.
(2) I *is good* イデアルで, かつ, A/I は *Gorenstein* である.
(3) I *is* $\mu_A(I) = d+1$ をみたす *good* イデアルである.

本講演において焦点となっている 2 次元有理二重点において, good イデアルの概念は次に述べるように幾何的な特徴付けを持つ.

Theorem 13 (Goto-Iai-Watanabe [3]). $(A, \mathfrak{m}, k)$ を 2 次元有理二重点とするとき, $\mathfrak{m}$-準素イデアル I に対して, 次の条件は同値である :

(1) I は *good* イデアルである.
(2) I は整閉イデアルで, 極小特異点解消 $\pi\colon X \to \operatorname{Spec} A$ 上で表現される. すなわち, X 上の反ネフ因子 Z が存在して, $I\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X(-Z)$ は可逆で, $I = H^0(X, \mathcal{O}_X(-Z))$ が成り立つ.

代表的な例は極大イデアルである. 2 次元有理特異点において, 極大イデアルは good イデアルであるが, 実際, 極大イデアルは基本因子 $Z_0 = \sum_i n_i E_i$ で表現される整閉イデアルである.

Example 14. $A = k[[x,y,z]]/(x^2+y^4+z^2)$ を (A_3) 型の有理二重点とする. このとき, 基本因子は $Z_0 = E_1 + E_2 + E_3$ である. $Z = a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3$ が反ネフ因子であるための条件を計算してみよう. $E_1^2 = E_2^2 = E_3^2 = -2$, $E_1E_2 = E_2E_3 = 1$ 及び $E_1E_3 = 0$ を用いて計算すると,

$$\begin{cases} ZE_1 &= -2a_1 + a_2 & \leq 0 \\ ZE_2 &= a_1 - 2a_2 + a_3 & \leq 0 \\ ZE_3 &= a_2 - 2a_3 & \leq 0 \end{cases}$$

を得る. ゆえに, ベクトル $[a_1, a_2, a_3]$ と $a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3$ を同一視するとき, 反ネフ因子は $[1,1,1]$, $[1,2,1]$, $[1,2,2]$, $[1,2,3]$, $[2,2,1]$ 及び $[3,2,1]$ で張られる錘の格子点に対応する. なお, 後で見るように最初の 2 つのベクトルが Ulrich イデアルに対応する.

次に, 2 次元有理特異点上の special Cohen-Macaulay 加群の概念を一般化しよう. 以下, しばらく A は 2 次元の有理特異点とする.

Definition 15. A を 2 次元の有理特異点, I を $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする. 極大 Cohen-Macaulay 加群 M が, special であり, M/IM が A/I 上自由であるとき, M は I **に関して special Cohen-Macaulay 加群**, 略して, I **に関して special 加群**であるという.

また, Ulrich イデアルに対応するものとして, special イデアルの概念を次のように定義する.

Definition 16. $\mathfrak{m}$-準素イデアル I が good であり, さらに, I に関する special Cohen-Macaulay 加群が少なくとも 1 つ存在するならば, **special イデアル**であると言う.

基本的な問題は,

$$\boxed{\text{Ulrich 加群 (Special) Cohen-Macaulay 加群及び Ulrich (special) イデアルを分類せよ.}}$$

である. 以下, 2 次元有理二重点上の Ulrich 加群と Ulrich イデアルの分類定理を中心に紹介しよう.

2. 2次元有理二重点の Ulrich イデアルと Ulrich 加群

以下, この節では, A は2次元の有理二重点とし, $\pi\colon X \to \operatorname{Spec} A$ をその極小特異点解消とする. 最初に, 各有理二重点における Ulrich イデアルの分類方法を説明しよう.

Lemma 17. *I が Ulrich イデアルであるための必要十分条件は, $\mu(I) = 3$ であり, X 上のある反ネフ因子 Z が存在して, $I = H^0(X, \mathcal{O}_X(-Z))$ が good イデアルになることである.*

この補題を用いれば, 任意の Ulrich イデアルを決定することは難しくない. (A_3) 型の有理二重点 $A = k[[x,y,z]]/(x^2 + y^4 + z^2)$ の場合に説明しよう. まず, 基本因子は $Z_0 = E_1 + E_2 + E_3$ である. また, $Z = a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3$ を反ネフ因子とすれば,

$$\begin{cases} ZE_1 & = -2a_1 + a_2 \leq 0, \\ ZE_2 & = a_1 - 2a_2 + a_3 \leq 0, \\ ZE_3 & = a_2 - 2a_3 \leq 0. \end{cases}$$

が成り立つことをすでにみた. 一方, $\mu(I) = 3$ という条件は, $ZZ_0 = -2$, すなわち, $(Z - Z_0)Z_0 = 0$ は

$$Z_0E_i \neq 0 \Longrightarrow a_i = n_i = 1$$

に翻訳される. この例では, $Z_0E_1 = Z_0E_3 = -1$, $Z_0E_2 = 0$ だから, $a_1 = a_3 = 1$ を得る. このとき, 上の連立不等式から, $a_2 = 1$ または $a_2 = 2$ を得る. 言い換えると, Ulrich イデアルに対応する反ネフ因子は,

$$Z_0 = E_1 + E_2 + E_3, \quad Z_1 = E_1 + 2E_2 + E_3$$

の2つである.

次に, Ulrich イデアルに関する Ulrich 加群を分類しよう. (その後, イデアル I に関する Ulrich 加群があれば, I は Ulrich イデアルであることを示すことで Ulrich 加群の完全な分類が完成する.)

基本的な道具は次の定理である.

Theorem 18 (**Kato's Riemann Roch** e.g. [13])**.** *A を2次元有理特異点とする. $I = H_0(X, \mathcal{O}_X(-Z))$ を $\pi\colon X \to \operatorname{Spec} A$ 上で表現される整閉イデアルとすると,*

$$\ell_A(A/I) = -\frac{Z^2 + KZ}{2}$$

が成り立つ. ここで, K は X 上の標準因子である. また, 極大 CM 加群 M に対して,

$$\ell_A(M/IM) = \operatorname{rank}_A M \cdot \ell_A(A/I) + c(\widetilde{M})Z.$$

が成り立つ. ここで, $\widetilde{M} = \pi^* M/torsion$ は M の引き戻しで定義される層であり, $c(\widetilde{M})$ はその第1 Chern 類を表す.

Remark 19. A を2次元有理特異点とする. $\{E_i\}_{i=1}^r$ を極小特異点解消に現れる例外因子全体とするとき, 標準因子 $K = \sum_{i=1}^r k_iE_i$ は, 方程式

$$0 = p_a(E_i) = \frac{E_i^2 + KE_i}{2} + 1 = 0 \quad (i = 1, \ldots, r)$$

で定まる.

Theorem 20 (McKay correspndence). X を極小な特異点解消とし, $\{E_i\}$ を例外因子全体とする. このとき, 各 E_i に対して, 直既約な極大 *Cohen-Macaulay* 加群 M_i が同型を除いて一意的に存在して, 次を満たす:

(1) $c(\widetilde{M_i})E_j = \delta_{ij}$. (クロネッカーのデルタ)
(2) $\mathrm{rank}_A M_i = n_i$, ここに, $Z_0 = \sum_i n_i E_i$ は基本因子を与える.

先に, Ulrich イデアルに対応する因子を決定した, (A_3) 型の有理二重点

$$A = k[[x, y, z]]/(x^2 + y^4 + z^2)$$

に対して, 各 Ulrich イデアルに関する Ulrich 加群をすべて決定しよう. I に関する Ulrich 加群の直和や直和因子も同じ性質を持つから, 直既約なものに限って調べればよい.

• Z_0 に対応する Ulrich 加群

$Z_0 = E_1 + E_2 + E_3$ に対応する good イデアルは極大イデアルである. M_1, M_2, M_3 が極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する Ulrich 加群であることは既に確認している.

• Z_1 に対応する Ulrich 加群

$Z_1 = E_1 + 2E_2 + E_3$ に対応する Ulrich イデアル $I = H^0(X, \mathcal{O}_X(-Z_1))$ に関する Ulrich 加群を決定すれば十分である. なお, 以下の計算において I の生成系を具体的に決定する必要性はないが, 具体的には, $I = (x, y^2, z)$ である. 実際, Kato の Riemann-Roch 定理から, $\ell_A(A/I) = 2$ であることが分かる. 一方, (x, y^2, z) がこの条件をみたす Ulrich イデアルであることが定義により確認できるので, $I = (x, y^2, z)$ であることが結論される.

まず, Kato の Riemann-Roch 定理から,

$$\ell_A(M_i/IM_i) = \ell_A(A/I)\cdot \mathrm{rank}_A M_i + c(\widetilde{M_i})Z = \ell_A(A/I)\cdot n_i + a_i$$

を得る. 他方, I が good イデアルであることに注意すると,

$$e_I^0(M_i) = e(I)\cdot \mathrm{rank}_A(M_i) = 2\cdot \ell_A(A/I)\cdot n_i$$

を得る. ゆえに, もし M_i が I に関する Ulrich 加群ならば,

$$(*) \qquad a_i = \ell_A(A/I)\cdot n_i = \ell_A(A/I)$$

を得る。逆に, 条件 (*) が成り立てば, $\ell_A(M_i/IM_i) = e_I^0(M_i)$ が成立する. また, M_i は (極大イデアルに関する) Ulrich 加群だから,

$$\mu_A(M_i) = e_{\mathfrak{m}}^0(M_i) = e(\mathfrak{m})\cdot \mathrm{rank}_A(M_i) = 2n_i$$

であり,

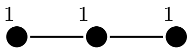
$$\mu_A(M_i)\ell_A(A/I) = 2n_i\cdot \ell_A(A/I) = \ell_A(M_i/IM_i)$$

が成り立つから, M_i/IM_i は自由 A/I-加群である. 従って, M_i が I に関して Ulrich 加群であるためには (*) が成り立てばよい. $\ell_A(A/I) = \frac{-Z_1^2}{2} = 2$ なので, この条件をみたす i は $i = 2$ に限る. 言い換えると, M_2 のみが I に関する Ulrich 加群である.

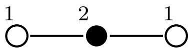
従って, $\mathfrak{m}$ に関する Ulrich 加群は, M_1, M_2, M_3 の有限直和であり, $I = (x, y^2, z)$ に関する Ulrich 加群は, M_2 の直和である.

以上の議論を次のように図示することができる.

(A_3) $f = x^2 + y^4 + z^2$

$Z_0 =$ 

$\mathfrak{m} = I_0 = (x, y, z)$

$Z_1 =$ 

$I_1 = (x, y^2, z)$

上記と同様の議論により, 与えられた有理二重点の Ulrich イデアルに関する Ulrich イデアルを完全に決定することができる.

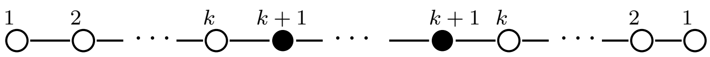
Ulrich 加群の分類を完成するには, Ulrich イデアル以外のイデアル I に関する Ulrich 加群を分類しなければならないが, 次の定理により, 2 次元有理二重点の場合はその心配はない.

Theorem 21. *A を 2 次元の有理二重点とし, I を $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする. このとき, 次の条件は同値である.*

(1) *I に関する Ulrich 加群が存在する.*
(2) *I は Ulrich イデアルである.*

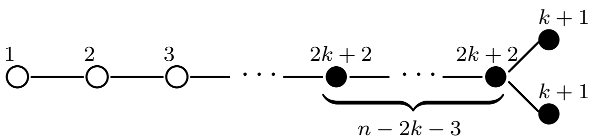
以上により, 2 次元有理二重点上の Ulrich 加群を完全に分類できることが分かった. 以下では, 先に述べた (A_3) の場合を参考にして, 各有理二重点の場合の Ulrich イデアルとそれに関する Ulrich 加群の表 (一部省略) をあげておく.

Ulrich ideals in RDP of type (A_n) $f = x^2 + y^{n+1} + z^2$ $(n = 2m)$

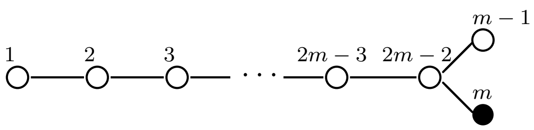
$Z_k =$ 

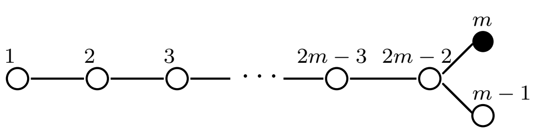
$(k = 0, 1, \cdots, m-1)$

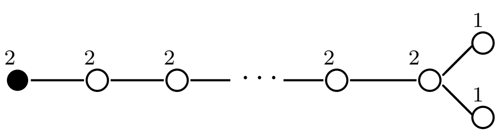
Ulrich ideals in RDP of type (D_n) $f = x^2y + y^{n-1} + z^2$ $(n = 2m \geq 4)$

$Z_k =$ 

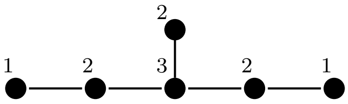
$(k = 0, 1, \dots, m-2)$

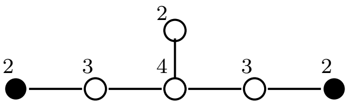
$Z_{m-1} =$ 

$Z_m =$ 

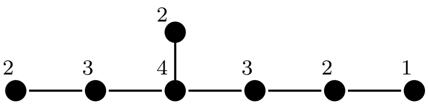
$Z_{m+1} =$ 

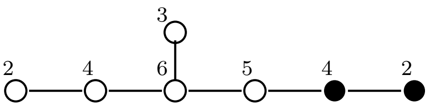
Ulrich ideals in RDP of type (E_6) $f = x^3 + y^4 + z^2$

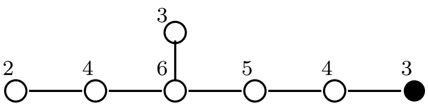
$Z_0 =$ 

$Z_1 =$ 

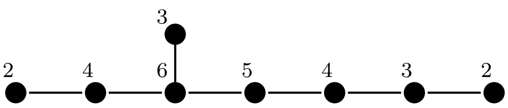
Ulrich ideals in RDP of type (E_7) $f = x^3 + xy^3 + z^2$

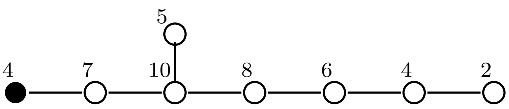
$Z_0 =$ 

$Z_1 =$ 

$Z_2 =$ 

Ulrich ideals in RDP of type (E_8) $x^3 + y^5 + z^2$

$Z_0 =$ 

$Z_1 =$ 

一方, イデアル論的な計算により具体的な Ulrich イデアルを見つけ, 個数を比較することにより, 次の定理のような Ulrich イデアルの完全リストを得る.

Theorem 22. 2次元有理二重点における *Ulrich* イデアルは次の表で与えられる：

(A_n) $\{(x,y,z),(x,y^2,z),\ldots,(x,y^m,z)\}$ *if* $n=2m$;
$\{(x,y,z),(x,y^2,z),\ldots,(x,y^{m+1},z)\}$ *if* $n=2m+1$.

(D_n) $\{(x,y,z),(x,y^2,z),\ldots,(x,y^{m-1},z),$
$(x+\sqrt{-1}y^{m-1},y^m,z),(x-\sqrt{-1}y^{m-1},y^m,z),(x^2,y,z)\}$
if $n=2m$;
$\{(x,y,z),(x,y^2,z),\ldots,(x,y^m,z),(x^2,y,z)\}$
if $n=2m+1$.

(E_6) $\{(x,y,z),(x,y^2,z)\}$.

(E_7) $\{(x,y,z),(x,y^2,z),(x,y^3,z)\}$.

(E_8) $\{(x,y,z),(x,y^2,z)\}$.

3. 有理二重点上の Special Cohen-Macaulay 加群

有理二重点において, 「イデアル I に関する Ulrich Cohen-Macaulay 加群」は, 実は, 「M/IM が自由 A/I 加群である」ことに過ぎないことが分かる.

Theorem 23. *A を2次元有理二重点とし, I をパラメーターイデアルでない, $\mathfrak{m}$ 準素イデアルとする. このとき, 極大 Cohen-Macaulay 加群 M に関して, 次の条件は同値である.*

(1) *M は I に関して, Ulrich 加群である.*
(2) *M は I に関して, special 加群である.*
(3) *M は自由加群を直和因子に持たず, M/IM は自由 A/I-加群である.*

このとき, I は Ulrich イデアルで, $M^*=\mathrm{Hom}_A(M,A)$ も I に関する Ulrich 加群である.

4. non Gorenstein 有理特異点における Ulrich (special) イデアルの例

Example 24. G を $g=\begin{pmatrix}\varepsilon_7 & \\ & \varepsilon_7^3\end{pmatrix}$ で定義された巡回群として, $A=k[[s^7,s^4t,st^2,t^7]]=k[[x,y]]^G$ とおく.

このとき, 極小特異点解消の双対グラフは, $E_1-E_2-E_3$ (ただし, $E_1^2=-3$, $E_2^2=E_3^2=-2$) の形をしている.

$M_a=(s^it^j\,|\,i+3j\equiv a \pmod 7)$ $(a=0,1,\ldots,6)$ とおくと, $\{M_a\}_{i=0}^6$ は A 上の直既約な極大 Cohen-Macaulay 加群の全体であり, M_a が special (resp. Ulrich) になるのは, $a=1,2,3$ (resp. $a=4,5,6$) の場合である.

一方, special cycles は $Z_0=E_1+E_2+E_3$ と $Z_1=E_1+2E_2+E_3$ である. $I_0=\mathfrak{m}$ に対する直既約な special 加群は M_1, M_2 と M_3 であるが, $I_1=H^0(X,\mathcal{O}_X(-Z_1))$ に対する直既約な special 加群は M_2 のみである.

一方, Ulrich イデアルは $\mathfrak{m}$ のみであることが分かるが, **「Ulrich 加群」は完全に決められていない.**

最後に, 未解決問題をあげておく.

(1) どんな局所環が Ulrich イデアルを持つか? (Ulrich イデアルを持つ Gorenstein 整域は完全交叉であるか?)

(2) 単純超曲面特異点上の Ulrich イデアルを分類せよ. (２次元から来るもので決まるか?)

(3) ２次元単純楕円特異点上の Ulrich イデアルを分類せよ.

(4) ２次元 non Gorenstein 有理特異点上のあるイデアルに関する Ulrich 加群を完全に分類せよ.

References

[1] J. Brennan, J. Herzog, and B. Ulrich, *Maximally generated Cohen-Macaulay modules*, Math. Scand. **61**, (1987), 181–203.

[2] W. Bruns and J. Herzog, Cohen-Macaulay rings, revised edition, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 39, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[3] S. Goto, S. Iai, and K.-i. Watanabe, *Good ideals in Gorenstein local rings*, Trans. Amer. Math. Soc., **353** (2000), 2309–2346.

[4] S.Goto, K.Ozeki, R.Takahashi, K.-i.Watanabe, and K.Yoshida, *Ulrich ideals and modules*, in preparation.

[5] ——— *Ulrich modules vs special modules over* 2*-dimensional rational singularities*, in preparation.

[6] J. Herzog and M. Kühl, *Maximal Cohen-Macaulay modules over Gorenstein rings and Bourbaki-sequences*, Commutative algebra and combinatorics (Kyoto, 1985), 65–92, Adv. Stud. Pure Math., **11**, North-Holland, Amsterdam, 1987.

[7] O. Iyama and M. Wemyss, *The classification of special Cohen-Macaulay modules*, Math. Z. **265** (2010), 41–83.

[8] J. Herzog and E. Kunz, Der kanonische Modul eines Cohen–Macaulay–Rings, Lecture Notes in Mathematics 238, Springer–Verlag, 1971.

[9] J. Lipman, *Rational singularities, with applications to algebraic surfaces and unique factorization*, Publ. Math. IHES **36** (1969), 195–279.

[10] ——— *Desingularization of two-dimensional schemes*, Ann. of Math. **107** (1978), 151–207.

[11] J. Sally, *Cohen–Macaulay local rings of maximal embedding dimension*, J. Algebra, **56** (1979), 168–183.

[12] B. Ulrich, *Gorenstein rings and modules with high numbers of generators*, Math. Z. **188** (1984), 23–32.

[13] K.-i.Watanabe and K.Yoshida, *Hilbert-Kunz multiplicity, McKay correspondence and good ideals in two-dimensional rational singularities*, manuscripta math. **104** (2001), 275–294.

[14] Jürgen Wunram, *Reflexive Modules on Quotient Surface Singularities*, Math. Ann. **279** (1998), 583–598.

[15] Y. Yoshino, Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings, London Mathematical Society Lecture Note Series, 146, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

Department of Mathematics
College of Humanities and Sciences
Nihon University
Setagaya-ku, Tokyo 156-8550 JAPAN

E-mail address: watanabe@math.chs.nihon-u.ac.jp
E-mail address: yoshida@math.chs.nihon-u.ac.jp