# $\tau$-TILTING THEORY

OSAMU IYAMA

ABSTRACT. In this short note, we discuss background of $\tau$-tilting theory which was introduced in [2].

Brenner-Butler [5] によって導入された**傾加群** (tilting module) の概念は, 今日では表現論において欠かせないものとなっている. 傾加群は, 森田理論の基本概念である**射影生成元** (progenerator) の一般化であり, また, Rickard による導来圏の森田理論 [14] における基本概念である**傾複体** (tilting complex) の特別な場合でもある. 今日では傾理論は, 群（有限群, 代数群）の表現論や代数幾何学, ミラー対称性予想をはじめとして, 様々な数学で用いられており, 環論の持つ普遍性を示す一例となっている.

傾加群に対して, 近年盛んに研究されている事柄の一つとして, **変異** (mutation) が挙げられる. 一般に変異とは, 特別な性質を持つ与えられた対象から, 同様の性質を持つ新しい対象を構成する操作のことである. **例外列** (exceptional sequence) の変異 [7] と**団傾対象** (cluster tilting object) の変異 [6, 10] の 2 種類が広く知られているが, いずれもある種の三角圏の構造を解析するものであり, 特に後者は高次元 Auslander-Reiten 理論 [9] や団代数 (cluster algebra) の圏論化 [12] にも応用される重要なものである.

傾加群に対する同様の操作である**傾変異** (tilting mutation) は, Riedtmann-Schofield [15], Happel-Unger [8] らによって研究されてきた[1]. 傾変異とは「基本的傾加群が与えられたときに, 一つの直既約な直和因子を入れ替えことによって, 新たな基本的傾加群を得る」操作であり, 傾変異理論とは, 加群圏の特徴的な部分（＝傾加群）を調べることによって, 加群圏全体の構造を理解しようとするものである. クイバーの**鏡映** (reflection) や Auslander-Platzeck-Reiten 傾加群, 有限群のモジュラー表現論における奥山, Rickard による傾複体などは, 全て傾変異の特別な場合である.

傾変異の注意点は,「直和因子の選び方によっては, 傾変異をすることが出来ない」点であり, これが他の変異操作と比較した場合に不十分な点である. これを解消するためには, 扱う対象の範囲を傾加群から少し広げることにより, 変異がいつでも可能となるようにすること（傾変異の「**完備化**」）が標準的であり, 以下の 3 種類が研究されている.

(a) **準傾複体** (silting complex)
(b) 団傾対象 (cluster tilting object)
(c) **台 $\tau$ 傾加群** (support $\tau$-tilting module)

(a) は, 上で述べた Rickard の傾複体を一般化した概念であり, 導来圏の対象となっている. 詳細は相原氏との共著 [3] を参照されたい. (a) の欠点は, 導来圏はもとの加群圏よりもはるかに巨大であるため, 加群圏の構造解析のためには, 大部分の準傾複体は不要となる点である. より加群圏に近い圏の中で変異を行える方が, 完備化と呼ばれるに相応しい.

上でも述べた (b) は, この点を改善したものである. 団傾対象は, **団圏** (cluster category) と呼ばれる三角圏の対象であり, 団圏は加群圏を「少しだけ拡張して」構成されたもので

The detailed version of this paper has been submitted for publication elsewhere.

[1]彼らは変異という用語を用いていないのだが, 今日では変異と呼ぶ方が自然である.

あるため, 導来圏よりもはるかに加群圏に近い. 反面, 団圏を構成するためには DG 多元環が必要であるため, 取り扱いは必ずしも容易ではない. そのため, 傾変異のより扱いやすい拡張を与えることは, 重要な課題であった.

[2] で導入された (c) は, これらの要望に答えるものである. 台 $\tau$ 傾加群は, 特別な加群として定義されるものであり, 加群圏以外の圏を扱う必要が一切無い.

以下, 簡単に定義を与える. $A$ を体 $K$ 上の有限次元多元環とする. Auslander-Reiten 移動を $\tau$ で表わす. 有限生成 $A$ 加群 $M$ が $\tau$ **リジッド** ($\tau$-rigid) であるとは, $\mathrm{Hom}_A(M, \tau M) = 0$ が成立することである. $\tau$ リジッド加群は Auslander-Smalø[4] によって, 80 年代に研究された概念であるが, 不思議なことに今日までほとんど忘れられており, 特別な呼称さえ与えられていなかった. 論文 [2] では, リジッド加群（$\mathrm{Ext}^1_A(M, M) = 0$ を満たす加群）の類似物である点に着目して, $\tau$ リジッド加群という名称を導入した.

$\tau$ リジッド加群 $M$ が $\tau$ **傾加群** ($\tau$-tilting module) であるとは, 等式 $|M| = |A|$ が成立することである. ここで $|M|$ は, $M$ の非同型な直既約直和因子の個数を表わす. 傾加群は $\tau$ 傾加群であるが, 一般に $\tau$ 傾加群は傾加群よりもはるかにたくさん存在する.

傾変異の完備化を与えるためには, 台 $\tau$ 傾加群の概念が必要となる. $A$ のある巾等元 $e$ に対する剰余環 $A/(e)$ 上の $\tau$ 傾加群を, **台 $\tau$ 傾加群** (support $\tau$-tilting module) と呼ぶ. 以下, 台 $\tau$ 傾加群に関する諸性質を箇条書きする. 詳細は [2] を参照されたい.

- Bongartz 完備化の存在.
- 台 $\tau$ 傾加群に関する, 変異の一意的可能性.
- 台 $\tau$ 傾加群に関する, 変異クイバーと Hasse クイバーの一致.
- 台 $\tau$ 傾加群と, 関手的有限なねじれ部分圏の一対一対応.
- 台 $\tau$ 傾加群と, 2 項準傾複体の一対一対応.
- $A$ が 2-Calabi-Yau 三角圏 $\mathsf{C}$ に付随する 2-Calabi-Yau 傾斜多元環の場合, 台 $\tau$ 傾加群と, $\mathsf{C}$ の団傾対象の一対一対応.

台 $\tau$ 傾加群に関する最近の結果は, [1, 11, 13, 16] 等を参照されたい.

最後に, $A$ がクイバー $1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$ と関係式 $ab = 0$ で与えられる場合, 台 $\tau$ 傾加群の Hasse クイバーを図示する.

$$
\begin{tikzcd}
\substack{1\\2}\ \substack{2\\3}\ 3 \arrow[rr] \arrow[drr] \arrow[dd] & & \substack{1\\2}\ \substack{2\\3}\ 2 \arrow[r] \arrow[drr] & \substack{1\\2}\ 2 \arrow[dd] \arrow[drr] & & \\
& & \substack{2\\3}\ 3 \arrow[rr] \arrow[ddd] & & \substack{2\\3}\ 2 \arrow[r] & 2 \arrow[ddd] \\
\substack{1\\2}\ 1\ 3 \arrow[rrr] \arrow[dr] & & & \substack{1\\2}\ 1 \arrow[dr] & & \\
& 1\ 3 \arrow[rrr] \arrow[dr] & & & 1 \arrow[dr] & \\
& & 3 \arrow[rrr] & & & 0
\end{tikzcd}
$$

## References


[1] T. Adachi, *$\tau$-tilting modules over Nakayama algebras*, in preparation.

[2] T. Adachi, O. Iyama, I. Reiten, *$\tau$-tilting theory*, arXiv:1210.1036.

[3] T. Aihara, O. Iyama, *Silting mutation in triangulated categories*, J. Lond. Math. Soc. 85 (2012), no. 3, 633–668.

[4] M. Auslander, S. O. Smalø, *Almost split sequences in subcategories*, J. Algebra 69 (1981) 426–454. Addendum; J. Algebra 71 (1981), 592–594.

[5] S. Brenner, M. C. R. Butler, *Generalizations of the Bernšteĭn Gel'fand Ponomarev reflection functors.* Representation theory, II , pp. 103–169, Lecture Notes in Math., 832, Springer, Berlin-New York, 1980.

[6] A. B. Buan, R. Marsh, M. Reineke, I. Reiten, G. Todorov, *Tilting theory and cluster combinatorics*, Adv. Math. 204 (2006), no. 2, 572–618.

[7] A. L. Gorodentsev, A. N. Rudakov, *Exceptional vector bundles on projective spaces*, Duke Math. J. 54 (1987), no. 1, 115–130.

[8] D. Happel, L. Unger, *On a partial order of tilting modules.* Algebr. Represent. Theory 8 (2005), no. 2, 147–156.

[9] O. Iyama, *Higher-dimensional Auslander-Reiten theory on maximal orthogonal subcategories*, Adv. Math. 210 (2007), no. 1, 22–50.

[10] O. Iyama and Y. Yoshino, *Mutations in triangulated categories and rigid Cohen-Macaulay modules*, Inv. Math. 172 (2008), 117–168.

[11] G. Jasso, *Reduction of $\tau$-tilting modules and torsion classes*, in preparation.

[12] B. Keller, *Cluster algebras, quiver representations and triangulated categories. Triangulated categories*, 76–160, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 375, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.

[13] Y. Mizuno, *Classifying $\tau$-tilting modules over preprojective algebras of Dynkin type*, in preparation.

[14] J. Rickard, *Morita theory for derived categories*, J. London Math. Soc. (2) 39 (1989), no. 3, 436–456.

[15] C. Riedtmann, A. Schofield, *On a simplicial complex associated with tilting modules*, Comment. Math. Helv. 66 (1991), no. 1, 70–78.

[16] X. Zhang, *$\tau$-rigid modules for algebras with radical square zero*, arXiv:1211.5622.



Graduate School of Mathematics
Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya, 404-8602, JAPAN

*E-mail address*: iyama@math.nagoya-u.ac.jp