WEAKLY SECTIONAL PATHS AND BYPASSES IN THE AUSLANDER-REITEN QUIVER

TAKAHIKO FURUYA

Abstract. We show that if a weakly sectional path in the Auslander-Reiten quiver of an artin algebra is a bypass, then it is precisely a sectional path.

1. 序 (準備)

本論文を通じて、K を可換アルティン環とし、A を K 上のアルティン多元環とする ([1])。$\operatorname{mod} A$ で有限生成右 A-加群の成す圏を表し、$\tau = D\mathrm{Tr}$ および $\tau^- = \mathrm{Tr}D$ で $\operatorname{mod} A$ におけるアウスランダー・ライテン移動を表す。また $\varGamma_A$ で A のアウスランダー・ライテンクイバーを表す。

以降、任意の直既約加群 X $(\in \operatorname{mod} A)$ に対して、X を含む同型類を再び X で記す。$\varOmega = X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_0$ $(n \geq 1)$ を $\varGamma_A$ における道とする。このとき整数 i $(1 \leq i \leq n-1)$ が $\varOmega$ のフックであるとは、$\tau X_{i-1} = X_{i+1}$ となるときを言う。また $\varOmega$ が sectional path であるとは、$\varOmega$ がフックを持たないとき、つまり、任意の j $(1 \leq j \leq n-1)$ に対して $\tau X_{j-1} \neq X_{j+1}$ となるときを言う。さらに $\varOmega$ が pre-sectional path であるとは、i $(1 \leq i \leq n-1)$ がフックならば $\tau X_{i-1} = X_{i+1}$ であるときを言う ([7])。明らかに sectional path は pre-sectional path である。

本論文の目的は、以下に述べる bypass の性質を調べる事である。

Definition 1 ([2, 3])**.** $X \to Y$ を $\varGamma_A$ における矢とし、$n \geq 2$ を整数とする。このとき $\varGamma_A$ の道 $X = X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_n = Y$ が矢 $X \to Y$ の bypass であるとは、$X_1 \neq Y$ かつ $X_{n-1} \neq X$ であるときを言う。また、bypass が sectional path であるとき、その bypass を sectional bypass と呼ぶ。

Remark 2. bypass は [3] で最初に導入された道であるが、文献 [2] にある定義と [3] にある定義はわずかに異なる。本論文では [2] における定義を採用している。

Remark 3. 以下の事が示されている:

(1) $\varGamma_A$ の oriented cycle を含まない成分における矢の bypass は sectional bypass である ([3])。
(2) A が有限表現型のとき、$\varGamma_A$ は sectional bypass を持たない ([3])。
(3) $\varGamma_A$ が sectional bypass を持つとき、$\varGamma_A$ の sectional bypass を持つ左または右安定成分が存在する ([2])。

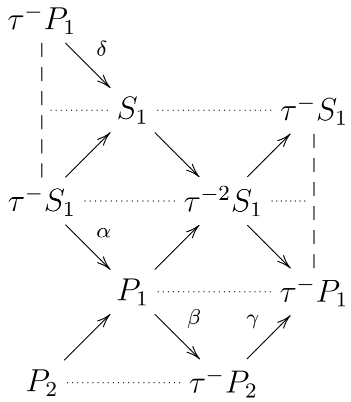
次に、sectional ではない bypass および sectional bypass の例をそれぞれ挙げておく:

Example 4. (1) K を代数閉体とし、$\varGamma$ を次のクイバーとする:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "a"] \arrow[r, "b"] & 2 \end{tikzcd}$$

The detailed version of this paper will be submitted for publication elsewhere.

$I = \langle a^2 \rangle$ を道多元環 $K\Gamma$ のイデアルとする。$A := K\Gamma/I$ と置く。そうすると A は有限表現型であり、Γ_A は oriented cycle を持つ次の translation クイバーである ([2, 3])。

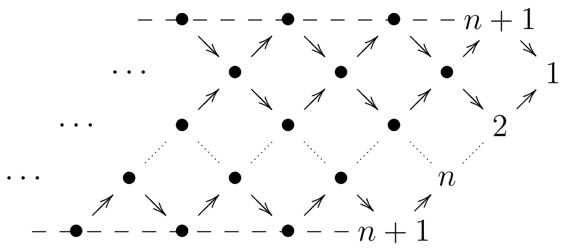


このとき、道 $\alpha\beta\gamma\delta$ は矢 $\tau^- S_1 \to S_1$ の sectional ではない bypass である。

(2) K を代数閉体とし、$n \geq 2$ を整数とする。Γ を次の $\widetilde{\mathbb{A}}_n$ 型のクイバーとする:

$$\begin{tikzcd}
 & 3 \arrow[r] & 4 & \cdots & n-1 \arrow[dr] & \\
2 \arrow[ur] & & & & & n \arrow[dl] \\
 & 1 \arrow[ul] \arrow[rrr] & & & n+1 &
\end{tikzcd}$$

$A := K\Gamma$ とする。そうすると、Γ_A の前入射成分は次のような左安定成分となる。



この成分には、無限に sectional bypass が存在している。例えば道 $n+1 \to n \to \cdots \to 2 \to 1$ は矢 $n+1 \to 1$ の sectional bypass である。

上記の Remark 3 で述べたように、すでに sectional bypass に関するいくつかの事実が示されている。ここでは、bypass が sectional path の一般化である weakly sectional path ([4]) である場合を考察する。

2. Weakly sectional bypass

主結果を述べる前に、weakly sectional path の定義を述べておく。Γ_A の矢 $X \to Y$ に対して、その付値を (d_{XY}, d'_{XY}) で表す。(つまり、d_{XY} は Y に対する右概分裂写像の定義域を直既分解したときに現れる X の個数、d'_{XY} は X に対する左概分裂写像の値域を直既分解したときに現れる Y の個数。) Γ_A の道 $\Omega = X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_0$ $(n \geq 1)$ に対して、集合 J_Ω を

$$J_\Omega := \{1 \leq j \leq n-1 \mid \ j \text{ は } \Omega \text{ のフックで、} \ d_{X_{j+1}X_j} = 1 \text{ を満たす} \}$$

で定める。明らかに、Ω が pre-sectional path になる必要十分条件は $J_\Omega = \emptyset$ である。

Definition 5 ([6])**.** n を正の整数とし、$\Omega = X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_0$ を Γ_A の道とする。Ω が weakly sectional path とは、ある $\operatorname{mod} A$ における直既約加群の集合 $\{M_j\}_{j \in J_\Omega}$ が存在して、次の条件が成立するときを言う。

(1) $j-2 \notin J_\Omega$ である任意の $j \in J_\Omega$ に対して、$X_j \oplus M_j \oplus \tau X_{j-2}$ は X_{j-1} の右概分裂写像の定義域における直和因子。(ここで $1 \in J_\Omega$ のとき、τX_{-1} を $\operatorname{mod} A$ における直既約加群とする。)

(2) $j-2 \in J_\Omega$ である任意の $j \in J_\Omega$ に対して、$X_j \oplus M_j \oplus \tau X_{j-2} \oplus \tau M_{j-2}$ は X_{j-1} の右概分裂写像の定義域における直和因子。

(3) $j-2 \in J_\Omega$ である任意の $0 \leq j \leq n$ に対して、$X_j \oplus \tau X_{j-2} \oplus \tau M_{j-2}$ は X_{j-1} の右概分裂写像の定義域における直和因子。

Remark 6. (1) 明らかに pre-sectional path は weakly sectional path である。

(2) [4, 6] において、weakly sectional path の性質がいくつか述べられているが、特に任意の weakly sectional path は oriented cycle ではないことが示されている。

(3) [4, 6] では無限の長さの weakly sectional path が定義されている。また、上記の定義における集合 $\{M_j\}_{j \in J_\Omega}$ を Ω の support と呼んでいる。

本論文の主結果は次の通りである:

Theorem 7 ([5])**.** *weakly sectional path が bypass のとき、それは sectional path である。(すなわち weakly sectional bypass は sectional path である。)*

pre-sectional path は weakly sectional path なので、直ちに次を得る:

Corollary 8. *pre-sectional path が bypass のとき、それは sectional path である。*

References

[1] M. Auslander, I. Reiten and S. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge studies in advanced mathematics **36**, Cambridge University Press, 1995.

[2] E. R. Alvares, C. Chaio and S. Trepode, *Auslander-Reiten components with sectional bypasses*, Comm. Algebra **37** (2009), 2213–2224.

[3] W. Crawley-Boevey, D. Happel and C. M. Ringel, *A bypass of an arrow is sectional*, Arch. Math. **58** (1992), 525–528.

[4] T. Furuya, *Weakly sectional paths and the degrees of irreducible maps*, preprint.

[5] T. Furuya, *Weakly sectional paths and bypasses in the Auslander-Reiten quiver*, preprint.

[6] T. Furuya, *Weakly sectional paths and the shapes of Auslander-Reiten quivers,* Proceedings of the 43th Symposium on Ring Theory and Representation Theory, (2011), 11–14.

[7] S. Liu, *Degrees of irreducible maps and the shapes of Auslander-Reiten quivers*, J. London Math. Soc. **45** (1992), 32–54.

Department of Mathematics
Tokyo University of Science
1-3, Kagurazaka, Shinjuku-ku, Tokyo, JAPAN
E-mail address: furuya@ma.kagu.tus.ac.jp