PREPOJECTIVE ALGEBRAS AND CRYSTAL BASES OF QUANTUM GROUPS

YOSHIHISA SAITO

Abstract. At the end of the last century, Kashiwara and the author ([10]) made a bride between representation theory of quantum groups and one of quivers. More precisely, consider the variety $X(\mathbf{d})$ of representations of a double quiver, with a fixed dimension vector $\mathbf{d}$. It is known that there is a nice Lagrangian subvariety $\Lambda(\mathbf{d})$ of $X(\mathbf{d})$. In a geometric point of view, $\Lambda(\mathbf{d})$ is defines as the variety of zero points of the moment map for the action of a certain reductive group on $X(\mathbf{d})$. Let $\mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})$ be the set of all irreducible components of $\Lambda(\mathbf{d})$. We proved that $\sqcup_{\mathbf{d}}\mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})$ is isomorphic to the "crystal basis" $B(\infty)$ of the negative half of a quantum group. This is one of the main results in [10].

On the other hand, in a representation theoretical point of view, the variety $\Lambda(\mathbf{d})$ is nothing but the variety of nilpotent representations of the corresponding preprojective algebra. Namely, the results of [10] tell us that there is a "nice" correspondence between preprojective algebras and crystal basis of quantum groups. In this note, we try to explain what is the meaning of this correspondence. Adding to that, we also discuss resent progress around this area.

1. Introduction

この小論の目的は，Kashiwara-S [10] を解説することである．この論文は 1997 年に出版されたものであり,「なぜ今さらわざわざ古い話をするのか？」と疑問に思われる方も多いと思う．筆者は Lie 代数や量子群等，いわゆる Lie theoretic な表現論の出身で，論文を書いた当時は多元環の表現論については殆ど何も知らなかった．後になって，実は自分のやっていたことが preprojective algebra という多元環の表現論と密接な関わりがあることを知り，大きな衝撃を受けたことを覚えている．そこで今回はこの事実を逆手に取り，[10] を preprojective algebra の表現論の立場から見直すことによって，その再解釈を行いたい．これが「わざわざ古い話を持ち出す理由」である．

さらに付け加えるなら，近年の Geiss-Leclerc-Schöer による一連の研究（[4]〜[7]）等，このような視点に立った研究が現在でも活発に行われている．今回の研究会でも，例えば Demonet さん，木村さんによる講演などは，その一例ある．

そもそも良い数学というものは，黙っていても勝手にいろいろな分野に結びついていくものである．純粋に多元環の表現論的な興味から考案された preprojective algebra という概念が，量子群の表現論という全く違うコンテクストから自然に現れたということは，preprojective algebra の定義の "正しさ" を物語っているのかも知れない．この機会に，両者の不思議な結びつきに少しでも興味を持って頂ければ幸いに思う[1].

• 謝辞　筆者のような門外漢に講演の機会を与えてくださったオーガナイザーの方々に感謝します．特にプログラム責任者の名古屋大学の伊山修さんには準備の段階から相談に

[1]筆者は以前研究集会「環論とその周辺」で，今回とほぼ同じ内容を，別の側面から紹介させて頂いた [16]．手前ミソだが，こちらも併せて参照して頂ければ幸いである．

乗って頂き，貴重なご意見を頂きました．この場を借りて感謝します．

• 記号に関する注意　この小論では quiver を $\Gamma = (I, \Omega)$ なる記号で表す．ここに I は頂点集合，Ω は矢印の集合である．また頂点 $i \in I$ から頂点 $j \in I$ へ向かう矢印 $\tau \in \Omega$ がある時，$i = \mathrm{out}(\tau)$，$j = \mathrm{in}(\tau)$ と表すことにする．また $\tau \in \Omega$ に対し，向きをひっくり返して得られる新たな矢印を $\overline{\tau}$ で表す．

$$
\begin{array}{ccc}
i \circ & \xrightarrow{\ \tau\ } & \circ\ j \\
\| & & \| \\
\mathrm{out}(\tau) & & \mathrm{in}(\tau)
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{ccc}
i \circ & \xleftarrow{\ \overline{\tau}\ } & \circ\ j \\
\| & & \| \\
\mathrm{in}(\overline{\tau}) & & \mathrm{out}(\overline{\tau})
\end{array}
$$

3 つの頂点 $i, j, k \in I$ と，i から j への矢印 τ，j から k への矢印 σ があったとする．このとき τ と σ を合成して長さ 2 の path が定義されるが，この path は（$\tau\sigma$ ではなく）$\sigma\tau$ と表すことにする．

$$
\underset{i}{\circ} \xrightarrow{\ \tau\ } \underset{j}{\circ} \xrightarrow{\ \sigma\ } \underset{k}{\circ}
\quad \Rightarrow \quad
\underset{i}{\circ} \xrightarrow{\qquad \sigma\tau \qquad} \underset{k}{\circ}
$$

また，algebra A に対して A-module とは常に left module を表すこととし，以後一切断らない．τ と σ の合成を $\sigma\tau$ と表すのは，このためであると言っても良い．

これらの記法は多くの多元環の文献で用いられているものとは異なるので読みにくいかも知れないが，筆者が慣れている記法を用いないと間違い得てしまいそうなので，今回は御容赦願いたい．

2. Varieties of Representations

2.1. Quiver の表現のなす空間.

K を体，$\Gamma = (I, \Omega)$ を有限 quiver とする．このとき，Γ の（有限次元）表現 $\mathbf{V} = (V, B)$ とは，次のようなものである：

- $V = \oplus_{i \in I} V_i$ は有限次元 I-graded vector space,
- $B = (B_\tau)_{\tau \in \Omega}$ は K-linear maps $B_\tau \in \mathrm{Hom}_K(V_{\mathrm{out}(\tau)}, V_{\mathrm{in}(\tau)})$ の組.

与えられた Γ の表現 $\mathbf{V} = (V, B)$ に対し，

$$\underline{\mathrm{dim}}\mathbf{V} := (\dim_K V_i)_{i \in I} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^I$$

を $\mathbf{V}$ の dimension vector と呼ぶ．また，（B を伴わない）単独の I-graded vector space $V = \oplus_{i \in I} V_i$ に対しても，同様に dimension vector $\underline{\mathrm{dim}} V$ を定義する．

2 つの Γ の表現 $\mathbf{V} = (V, B)$ と $\mathbf{V}' = (V', B')$ に対し，$\mathbf{V}$ から $\mathbf{V}'$ への射 (morphism)$\phi = (\phi_i)_{i \in I}$ とは，K-linear maps $\phi_i : V_i \to V_i'$ $(i \in I)$ の組であって，任意の $\tau \in \Omega$ に対して、

$$\phi_{\mathrm{in}(\tau)} B_\tau = B_\tau' \phi_{\mathrm{out}(\tau)} \tag{2.1.1}$$

が成り立つもののことを言う．特に $\varphi = (\varphi_i)_{i \in I}$ が I-graded vector space の同型写像である時，$\mathbf{V}$ と $\mathbf{V}'$ は同型であるという．

$\mathbf{d} = (d_i)_{i\in I} \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}$ を１つ指定すれば，$\underline{\dim}V = \mathbf{d}$ なる I-graded vector space は一意的に定まる[2]．これを $V(\mathbf{d})$ と書くことにし，次の vector space を考えよう：

$$E_\Omega(\mathbf{d}) := \bigoplus_{\tau\in\Omega} \mathrm{Hom}_K(V(\mathbf{d})_{\mathrm{out}(\tau)}, V(\mathbf{d})_{\mathrm{in}(\tau)}).$$

$B \in E_\Omega(\mathbf{d})$ に対し組 $\mathbf{V} = (V(\mathbf{d}), B)$ を考えれば，これは $\underline{\dim}\mathbf{V} = \mathbf{d}$ なる Γ の表現である．逆に $\underline{\dim}\mathbf{V} = \mathbf{d}$ なる Γ の表現は，必ずこの形で書かれる．すなわち，$E_\Omega(\mathbf{d})$ は $\underline{\dim} = \mathbf{d}$ となる Γ の表現を全てかきあつめたものに他ならない．すなわち $E_\Omega(\mathbf{d})$ とは，$\underline{\dim} = \mathbf{d}$ の Γ の表現全体のなす空間（多様体）である．

$E_\Omega(\mathbf{d})$ には群 $G(\mathbf{d}) := \prod_{i\in I} GL(V(\mathbf{d})_i)$ が

$$B = (B_\tau) \mapsto gB = \left(g_{\mathrm{in}(\tau)} B_\tau g^{-1}_{\mathrm{out}(\tau)}\right) \qquad \left(g = (g_i)_{i\in I} \in G(\mathbf{d})\right)$$

で作用する．quiver の表現の射 $\phi = (\phi_i)$ が同型写像であるということは，各 ϕ_i が $GL(V(\mathbf{d})_i)$ の元であることに他ならない．このことと (2.1.1) に注意すれば，

$$\text{２つの}\ \Gamma\ \text{の表現が同型} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c}\text{対応する}\ E_\Omega(\mathbf{d})\ \text{の元が}\\ \text{同じ}\ G(\mathbf{d})\text{-orbit に含まれる}\end{array}$$

となることは明らかであろう．すなわち，次の１対１対応が得られる：

$$\left\{\begin{array}{c}\underline{\dim} = \mathbf{d}\ \text{なる}\\ \Gamma\text{の表現の同型類}\end{array}\right\} \quad \overset{1\,:\,1}{\longleftrightarrow} \quad \{E_\Omega(\mathbf{d})\ \text{の}\ G(\mathbf{d})\text{-orbit}\}$$

よく知られているように，Γ の表現を考えるということは，対応する path algebra $K[\Gamma]$ 上の module を考えるということに他ならない．したがって

$$\left\{\begin{array}{c}\underline{\dim} = \mathbf{d}\ \text{なる}\\ K[\Gamma]\text{-module の同型類}\end{array}\right\} \overset{1\,:\,1}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{c}\underline{\dim} = \mathbf{d}\ \text{なる}\\ \Gamma\text{の表現の同型類}\end{array}\right\} \overset{1\,:\,1}{\longleftrightarrow} \{E_\Omega(\mathbf{d})\ \text{の}\ G(\mathbf{d})\text{-orbit}\}$$

という１対１対応が得られる．その対応は以下の通り：$B = (B_\tau)_{\tau\in\Omega} \in E_\Omega(\mathbf{d})$ が与えられたとする．このとき，I-graded vector space $V(\mathbf{d})$ 上の $K[\Gamma]$-module structure が，$\tau \in K[\Gamma]$ の作用を B_τ で与えることによって，得られる．逆の対応は明らかであろう．

2.2. **Relation 付き quiver の場合.**

前節の議論では $\Gamma = (I, \Omega)$ の表現 $=$ $K[\Gamma]$-modules しか扱うことが出来なかった．これは多元環の表現論としては，いささか適用範囲が狭い．そこで議論を relation 付き quiver の場合に拡張しよう．

$A = K[\Gamma]/J$ なる多元環を考える．ただし J は relations $\rho_1, \cdots, \rho_l$ で生成される両側 ideal とする．V を A-module で $\underline{\dim}V = \mathbf{d}$ なるものとしよう．このとき，A における単位元 1_A の原始ベキ等元分解 $1_A = \sum_{i\in I} e_i$ は，V 上に I-graded vector space の構造を定める．すなわち $V_i := e_iV$ とおくことで，直和分解 $V = \oplus_{i\in I} V_i$ が得られる．$\tau \in \Omega$ の V への作用は，linear map $B_\tau \in \mathrm{Hom}_K(V_{\mathrm{out}(\tau)}, V_{\mathrm{in}(\tau)})$ を定め，こうして Γ の表現 $\mathbf{V} = (V, B)$

[2]本来は「同型を除いて一意的」と言うべきところだが，あまりこだわると記述がややこしくなるばかりなので，今回はこの程度で止めておく．

が得られる．さらに，今の場合には $B=(B_\tau)$ が relations $\rho_1,\cdots,\rho_l$ を満たしていなければならない．各 ρ_j が具体的に

$$\rho_j=\sum a_{k_1,k_2,\cdots,k_j}\tau_{k_1}\tau_{k_2}\cdots\tau_{k_j} \qquad (1\le j\le l, a_{k_1,k_2,\cdots,k_j}\in K)$$

と書かれていたとすれば，$B=(B_\tau)$ は関係式

$$\rho_j(B):=\sum a_{k_1,k_2,\cdots,k_j}B_{\tau_{k_1}}B_{\tau_{k_2}}\cdots B_{\tau_{k_j}}=0 \qquad (1\le j\le l) \tag{2.2.1}$$

を満たさなければならない．言い換えれば，B は

$$\Lambda_A(\mathbf{d}):=\{B\in E_\Omega(\mathbf{d})\mid B\text{ は }(2.2.1)\text{ を満たす}\}$$

なる $E_\Omega(\mathbf{d})$ の部分代数多様体の点を与えている，ということになる．この $\Lambda_A(\mathbf{d})$ を variety of A-modules (of dimension vector $\mathbf{d}$) と呼ぶことにしよう．

ここまでいけば，後の議論は前節と同じである．すなわち，１対１対応

$$\left\{\begin{array}{c}\underline{\dim}=\mathbf{d}\text{ なる}\\ A\text{-module の同型類}\end{array}\right\}\overset{1:1}{\longleftrightarrow}\{\Lambda_A(\mathbf{d})\text{ の }G(\mathbf{d})\text{-orbit}\}$$

が得られるわけである．

以上の話を標語的に言えば，

$$\text{多元環 }A\text{ の表現論}\quad\text{“}=\text{”}\quad\begin{array}{c}\text{代数多様体 }\Lambda_A(\mathbf{d})\text{ 上の}\\ G(\mathbf{d})\text{-orbit の幾何学}\end{array}$$

ということになるだろう．このような議論は体 K がどんなものであっても考えることができるし，そういうことが可能というのが代数幾何の強みでもあるのだが，簡単のために以下 $K=\mathbb{C}$ と仮定しよう．

例えば A が finite representation type であるとしよう．このとき $\Lambda_A(\mathbf{d})$ は必ず有限個の $G(\mathbf{d})$-orbit を持つ．これは商空間 $G(\mathbf{d})\backslash\Lambda_A(\mathbf{d})$ が必ず有限個の点集合になってしまうことを意味し，非常に扱いやすい．もちろん，一般には A は wild になってしまうわけで，こんな話はほとんどの場合成り立たない．それどころか，商空間 $G(\mathbf{d})\backslash\Lambda_A(\mathbf{d})$ は一般には代数多様体の構造を持たず，その扱いは非常に難しい[3]．

ではどうしたらいいのだろうか？ このような場合，表現論の世界では「考える module の範囲を制限する」ということをしばしば行う．与えられた多元環 A に対し，A-module 全体の category を考えるのではなく，その中からうまい subcategory を取り出して，そちらを調べようという考え方である．このことは，対応する幾何の言葉では『空間をうまく制限して，orbit の空間を調べやすくしているということ』と言っても良いだろう．制限と言っても「ここからここまで」というタイプのものではなく，むしろ「スカスカにする」と言った方がいいかも知れない．空間をスカスカにしたとしても，２つの表現が同値であるという概念は全く同様に定義されるので，orbit そのものは意味を持つことになる．

[3]商集合をいつでも考えることが出来るのは明らかである．問題は「どうやって空間の構造（例えば位相や多様体の構造など）を入れるか？」ということで，これをしないと幾何学的に考える意味が無い．

$G(\mathbf{d})\backslash\Lambda_A(\mathbf{d})$ を空間として扱う道具として，stack と呼ばれる概念がある．「空間としてきちんと定式化する」ということにはもちろんそれなりのメリットもあるが，定式化出来たからといって話が簡単になるわけではない．wild な表現論を扱う難しさは，当然対応する stack の空間としての難しさに遺伝することになる．

他方，本小論で紹介したいのは，これとは別の考え方である．上に述べた variety of A-module $\Lambda_A(\mathbf{d})$ は代数多様体であり，これを点集合とみなした場合に比べ，はるかに多くの情報を持っている．例えば $\Lambda_A(\mathbf{d})$ には位相が入っている．このことは実は非常に大きい．位相が入っていることで，$\Lambda_A(\mathbf{d})$ 内の２点（= ２つの表現）に対し，それらが「近い or 遠い」,「つながっている or 離れている」等の議論が可能となる．

$\Lambda_A(\mathbf{d})$ が持っている幾何学的情報のうち，今回は特に

$$\mathrm{Irr}\Lambda_A(\mathbf{d}) := \Lambda_A(\mathbf{d})\ \text{の（代数多様体としての）既約成分の全体の集合}$$

に着目したい．各既約成分は $G(\mathbf{d})$ の作用に関して不変ではあるけれども，単独の orbit にはなっていない．つまり１つの既約成分には同型でないような表現がたくさん（一般には無限個）含まれてしまうわけで，既約成分を考えるということは，通常の表現論で行われている仕分け（= 同値類による分類）よりも．はるかに目の粗いことをやっていることになる．しかし，今考えているのは『A-module の作る代数多様体』なのだから,『その既約成分も A の表現に関する某かの情報を担っているはず』と考えても，そんなに的外れではないのではないだろうか？

さらに，我々が興味があるのは特定の dimension vector を持つ module ではなく，module 全体の持つ構造である．したがって，調べるべきは個々の $\mathrm{Irr}\Lambda_A(\mathbf{d})$ ではなく，dimension vector の可能性を全て走らせた

$$\bigsqcup_{\mathbf{d}\in\mathbb{Z}^I_{\geq 0}} \mathrm{Irr}\Lambda_A(\mathbf{d})$$

ということになる．

一般の A に対してこのような考え方がどの程度有効なものなのかは，実は筆者は知らない．しかし A が preprojective algebra の場合には，この考え方は有効である．詳しいことは次節に譲るが，preprojective algebra はごく一部の例外を除いて，ほとんどの場合 wild である．したがって，A-module の同型類全体 =orbit 全体の全体像を把握することは，まず不可能である．それにも関わらず，既約成分全体 $\sqcup_{\mathbf{d}\in\mathbb{Z}^I_{\geq 0}}\mathrm{Irr}\Lambda_A(\mathbf{d})$ には常に “crystal” と呼ばれる特殊な構造が入り，それによって $\sqcup_{\mathbf{d}\in\mathbb{Z}^I_{\geq 0}}\mathrm{Irr}\Lambda_A(\mathbf{d})$ はコントロール可能となるのである．これが，Introduction に述べた「筆者と柏原による共著論文 [10] を preprojective algebra の表現論を用いて再解釈した結果」である．具体的な内容については，次節以降で詳しく述べていく予定である．

さらには，単に全体像が把握出来るだけでなく，本来の問題であった preprojective algebra A の表現論に関する情報もそれなりに引き出すことが出来る．多元環の表現論の立場からすれば，この部分が最も興味がある部分であろうとも思うが，かなりの紙数を必要とするので，今回の小論で解説することはしない．詳しくは Geiss-Leclerc-Schröer による一連の論文 [4],[5],[6],[7] や，Kimura の論文[4][11]，およびそれらの中の参考文献を参照して頂きたい．

3. Preprojective algebras

3.1. **定義と性質**.

以下 $\Gamma = (I, \Omega)$ は loop を持たないと仮定する．さらに $H := \Omega \sqcup \overline{\Omega}$ とし，double quiver $\widetilde{\Gamma} := (I, H)$ を考える．

[4]おそらく本報告集にも解説が掲載されることと思う．

Definition 1. double quiver $\widetilde{\Gamma}$ の path algebra $\mathbb{C}[\widetilde{\Gamma}]$ の中で，$|I| = n$ 個の relations

$$\mu_i := \sum_{\substack{\tau \in H \\ \mathrm{out}(\tau)=i}} \varepsilon(\tau)\overline{\tau}\tau \qquad (i \in I)$$

で生成される両側イデアルを J とする．ただし，$\varepsilon(\tau) = \begin{cases} 1 & (\tau \in \Omega) \\ -1 & (\tau \in \overline{\Omega}) \end{cases}$ である．このとき，

$$P(\Gamma) := \mathbb{C}[\widetilde{\Gamma}]/J$$

を Γ に付随する Preprojective algebra と呼ぶ．また，J を生成する μ_i たちを preprojective relations と呼ぶ.

$P(\Gamma)$ について知られていることを列挙しておく.

Proposition 2.
(1) $P(\Gamma)$ が $\mathbb{C}$ 上の有限次元代数 $\Leftrightarrow$ Γ は *Dynkin quiver*.
(2) $P(\Gamma)$ が *finite representation type* $\Leftrightarrow$ Γ は A_n $(n = 1, 2, 3, 4)$ 型.
(3) $P(\Gamma)$ が *tame representation type* $\Leftrightarrow$ Γ は A_5 *or* D_4 型.

つまり，Γ が上記以外の場合には $P(\Gamma)$ は wild になってしまうわけである.

3.2. **Varieties of nilpotent representations.**

Proposition 2 (1) から，Γ が non-Dynkin の場合は，$P(\Gamma)$ は無限次元になってしまう．この場合には，有限次元表現のなす代数多様体を考えるのではなく，以下に述べる表現のベキ零性を仮定することにする.

Definition 3. $B \in E_{\mathbf{d},\Omega}$ がベキ零 (nilpotent) であるとは，非負整数 N が存在して，長さが N 以上の任意の path σ に対して，$B_\sigma = 0$ なることをいう.

これは module の言葉で言えば「B に対応する有限次元 $P(\Gamma)$-module を V_B とする時，長さが N 以上の任意の path σ に対して，$\sigma V = \{0\}$ が成り立つ」ということになる.
さて，今の場合に考える多様体の定義を与えよう．$\mathbf{d} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^I$ に対して，

$$X(\mathbf{d}) := \bigoplus_{\tau \in H} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V(\mathbf{d})_{\mathrm{out}(\tau)}, V(\mathbf{d})_{\mathrm{in}(\tau)})$$

とし，

$$\Lambda(\mathbf{d}) := \{B \in X(\mathbf{d}) \mid \mu_i(B) = 0 \ (\forall\, i \in I) \text{ かつ } B \text{ は nilpotent}\}$$

なる $X(\mathbf{d})$ の部分代数多様体を考える．これは dimension vector が $\mathbf{d}$ の，nilpotent $P(\Gamma)$-modules 全体のなす代数多様体に他ならない.

Remark 4. (1) Γ が Dynkin quiver の場合には，$B \in E_\Omega(\mathbf{d})$ が $\mu_i(B) = 0$ $(\forall\, i \in I)$ を満たせば，自動的に B は nilpotent となることが知られている ([9])．したがって，この場合には $\Lambda(\mathbf{d})$ は dimension vector $= \mathbf{d}$ の $P(\Gamma)$-module 全体を考えていることになる.
(2) 上では，始めから “preprojective algebra ありき” という立場で代数多様体 $\Lambda(\mathbf{d})$ を導入した．ところが，実は $\Lambda(\mathbf{d})$ は（preprojective algebra を全く知らなくても）quiver の幾何

学だけから自動的に現れる，非常に自然な対象である．別の言い方をすれば『preprojective relations は，もともと幾何が知っているもの』ということになる[5]

$P(\Gamma)$-**nilp** を nilpotent な有限次元 $P(\Gamma)$-module 全体のなす category とする．前節の『表現の同値類 = orbit』の対応を今の場合に書けば，

$$\left\{ \begin{array}{c} \underline{\dim} = \mathbf{d} \text{ なる} \\ P(\Gamma)\text{-}\mathbf{nilp} \text{ の object の同型類} \end{array} \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\Lambda(\mathbf{d}) \text{ の } G(\mathbf{d})\text{-orbit}\}$$

ということになる．

Proposition 2 で述べたように，ごく少数の例外を除いてほぼ全ての場合に $P(\Gamma)$ は wild になってしまう．したがって，"$G(\mathbf{d})$-orbit の幾何" を考えるのは非常に難しい．そこで，前述のように $\Gamma(\mathbf{d})$ の既約成分を考えることにする．すなわち

$$\mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d}) := \Lambda(\mathbf{d}) \text{ の（代数多様体としての）既約成分全体のなす集合}$$

とし，可能な dimension vector を全て走らせたもの

$$\mathbb{B} := \bigsqcup_{\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}} \mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})$$

を考える．『この $\mathbb{B}$ に "crystal" と呼ばれる構造が入り，それによって $\mathbb{B}$ を詳しく調べることが出来るようになる』というのが，[10] の主結果（の一つ）である．

4. A crystal structure on $\mathbb{B}$

4.1. **Root datum.**

crystal を定義するには，その前提として root datum と呼ばれるある種のデータを fix する必要がある．今の場合，それは『dimension vectors が住んでいる lattice $\mathbb{Z}^I$ 上に，quiver から定まる Cartan matrix を使って bilinear form を定める』ということになる．

ところが，この "Cartan matrix" というのがちょっと曲者で，多元環の表現論と Lie theory では，その意味が異なる[6]．ただ，肝心なのは $\mathbb{Z}^I$ 上に定まる bilinear form の方であり，こちらは Cartan matrix の意味をどちらに取ったとしても同じものを定める．したがって問題が無いと言えば無いのだが，何も知らずに文献を読むと誤解を招く恐れがある．そこで本節では，無用の混乱を避けるために両者の違いをはっきりさせておく．

[5] $\Lambda(\mathbf{d})$ の幾何学的な意味は次の通り．一般に，symplectic 多様体 (X, ω) 上に Lie 群 G が symplectic form ω を保つように作用していると，運動量写像 (moment map) と呼ばれる写像 $\mu : X \to \mathrm{Lie}(G)^*$ が定義出来る．ここに $\mathrm{Lie}(G)$ は G の Lie algebra，$\mathrm{Lie}(G)^*$ はその dual space である．これらは symplectic 幾何学と呼ばれる分野の用語である．symplectic 幾何学では moment map による 0 の逆像 $\Lambda := \mu^{-1}(0)$ がしばしば重要な役割を果たす．"運動量" という用語からもわかるように，これらの概念は物理学と非常に関係が深いが，この $\Lambda = \mu^{-1}(0)$ は物理的にも重要な意味を持つことが知られている．

話を $\Lambda(\mathbf{d})$ に戻そう．$X(\mathbf{d}) = E_\Omega(\mathbf{d}) \oplus E_{\overline{\Omega}}(\mathbf{d})$ なる分解を 1 つ固定し，$X(\mathbf{d})$ 上の bilinear form ω を $\omega(B, B') := \sum_{\tau \in H} \varepsilon(\tau)\mathrm{tr}(B_{\overline{\tau}} B'_\tau)$ によって定める．このとき，ω は $X(\mathbf{d})$ 上の非退化な skew-symmetric bilinear form (symplectic form) を定める．さらに $G(\mathbf{d})$ の $X(\mathbf{d})$ への作用はこの symplectic form を保つ．そうすると，上に述べた symplectic 幾何学の一般論から moment map $\mu : X(\mathbf{d}) \to \mathrm{Lie}(G(\mathbf{d}))^*$ を考えることが出来る．この setting で μ による 0 の逆像 $\Lambda = \mu^{-1}(0)$ を考えると，丁度 variety of nilpotent representations $\Lambda(\mathbf{d})$ と一致する．

[6] 筆者は多元環に関しては門外漢なので断言してしまうのは危険だが，少なくとも調べた限り (Ringel [13] や Assem et. al. [1] など) では，「違う」と言って良いようである．

○ 多元環 side

本節に限って，しばらく $\Gamma = (I, \Omega)$ は cycle を持たない (acyclic) と仮定する．このとき $\mathbb{C}[\Gamma]$ は有限次元代数となる．$S(i)$ を頂点 $i \in I$ に対応する simple $\mathbb{C}[\Gamma]$-module, $P(i)$ をその projective cover とする．また $I = \{1, 2, \cdots, n\}$ とする．

Definition 5. n 次正方行列 $C_\Gamma = (c_{i,j})_{i,j\in I}$ を次のように定める：

$$c_{i,j} := \dim_{\mathbb{C}[\Gamma]}(P(i), P(j)) \qquad (i, j \in I).$$

この C_Γ を path algebra $\mathbb{C}[\Gamma]$ の Cartan matrix と呼ぶ.

次のことは大事なので，強調しておく.

(i) 一般には Cartan matrix C_Γ は非対称行列である.
(ii) Cartan matrix C_Γ の行列成分 $c_{i,j}$ は常に非負整数である.
(iii) Cartan matrix C_Γ は常に正則行列であり，しかもその逆行列も整係数となる.

筆者のような Lie theory 出身の人間から見ると，これらはどれも「え？」と思ってしまう性質である．上述の通り，誤解の原因は「Cartan matrix の定義が違う」ということにある．(i) と (ii) は定義から明らかなので，(iii) のみ復習しておこう.

Ringel [13] にならって，$\mathbb{Z}^I$ をヨコベクトルの空間と見なす．このとき $\mathbf{s}(i) := \underline{\dim} S(i)$, $\mathbf{p}(i) := \underline{\dim} P(i)$ とすれば,

$$\mathbf{p}(i) = \mathbf{s}(i)\, {}^tC_\Gamma \tag{4.1.1}$$

が成り立つ．$\mathbf{s}(i)$ は，第 i 成分のみ 1 で残りが 0 であるような（ヨコ）ベクトルだから, (4.1.1) は「$\mathbf{p}(i)$ は行列 ${}^tC_\Gamma$ の第 i 行である」と言っていることになる.

$\mathbb{C}[\Gamma]$-**mod** を $\mathbb{C}[\Gamma]$-modules のなす abelian category，$K(\mathbb{C}[\Gamma]) := K(\mathbb{C}[\Gamma]\text{-}\mathbf{mod})$ をその Grothendieck 群とする．このとき，自然な対応

$$K(\mathbb{C}[\Gamma]) \ni [V] \mapsto \underline{\dim} V \in \mathbb{Z}^I$$

は $\mathbb{Z}$-module の同型

$$\Phi_\Gamma : K(\mathbb{C}[\Gamma]) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^I$$

を誘導する．ここに $[V]$ は $\mathbb{C}[\Gamma]$-module V の $K(\mathbb{C}[\Gamma])$ における同値類を表す.

$\mathbb{C}[\Gamma]$ は hereditary だから，各 $S(i)$ は高々長さ 1 の projective resolution を持つ．したがって $K(\mathbb{C}[\Gamma])$ の中で $[S(i)]$ は $[P(j)]$ $(j \in I)$ たちの 1 次結合で書ける．同型 Φ_Γ で話を $\mathbb{Z}^I$ の中に移行すれば，これは整係数 n 次正則行列 P' が存在して,

$$E_n = \begin{pmatrix} \mathbf{s}(1) \\ \mathbf{s}(2) \\ \vdots \\ \mathbf{s}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}(1) \\ \mathbf{p}(2) \\ \vdots \\ \mathbf{p}(n) \end{pmatrix} P' \qquad (E_n \text{は } n \text{ 次単位行列})$$

と書ける，ということに他ならない．(4.1.1) より $P' = {}^tC_\Gamma^{-1}$ であり，(iii) が従う.

C_Γ を用いて $\mathbb{Z}^I$ 上の bilinear form を

$$\langle\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\rangle := \mathbf{x}\left({}^tC_\Gamma^{-1}\right){}^t\mathbf{y} \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^I)$$

で定め，これを Euler form と呼ぶ[7]．上記 (i),(ii),(iii) の帰結として次が従う：

- Euler form $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ は対称ではない．
- Euler form $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ は $\mathbb{Z}$ に値を持ち，しかも常に非退化である．

Euler form は一般の有限次元代数 A に対しても，同様の方法で定義出来る（ただし非退化性には，A に対する某かの制約が必要となる[8]）．V を projective dimension が有限の A-module, W を injective dimension が有限の A-module とすれば，

$$\langle\langle \underline{\dim} V, \underline{\dim} W\rangle\rangle = \sum_{l\geq 0} \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ext}^l_A(V,W)$$

となる．特に $A=\mathbb{C}[\Gamma]$ の場合には，

$$\langle\langle \underline{\dim} V, \underline{\dim} W\rangle\rangle = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[\Gamma]}(V,W) - \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ext}_{\mathbb{C}[\Gamma]}(V,W)$$

となる．さらに V,W を simple module にとると

$$\begin{aligned}\langle\langle \mathbf{s}(i),\mathbf{s}(j)\rangle\rangle &= \delta_{i,j} - \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ext}_{\mathbb{C}[\Gamma]}(S(i),S(j)) \\ &= \begin{cases} 1 & (i=j), \\ -(\Omega \text{ の中で } i \text{ から } j \text{ に向かう arrow の本数}) & (i\neq j) \end{cases}\end{aligned}$$

という，“おなじみの” 式が得られる．

Euler form を対称化して，

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})_{alg} := \frac{1}{2}\mathbf{x}\left(C_\Gamma^{-1} + {}^tC_\Gamma^{-1}\right){}^t\mathbf{y} \qquad (\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{Z}^I)$$

なる $\mathbb{Z}^I$ 上の symmetric bilinear form を考える．$\Gamma=(I,\Omega)$ の arrow をひっくり返して得られる quiver を $\overline{\Gamma} := (I,\overline{\Omega})$ と書こう．このとき，

$$C_{\overline{\Gamma}} = {}^tC_\Gamma$$

であるので，symmetric bilinear form $(\cdot,\cdot)_{alg}$ は，

$$\text{対称行列 } \frac{1}{2}\left({}^tC_{\overline{\Gamma}}^{-1} + {}^tC_\Gamma^{-1}\right) \text{ から定まる symmetric bilinear form}$$

と言って良い．上の計算と併せれば，

$$(\mathbf{s}(i),\mathbf{s}(j))_{alg} = \begin{cases} 1 & (i=j), \\ -(H=\Omega\cup\overline{\Omega} \text{ の中で } i \text{ から } j \text{ に向かう arrow の本数})/2 & (i\neq j) \end{cases}$$

となることは明らかであろう．

○ Lie theory side

以下，quiver $\Gamma=(I,\Omega)$ は cycle を持っても良いけれど loop は持たないこととし，Γ から arrow の向きを無視して得られる有限グラフ Γ_{Dyn} を考える．Γ_{Dyn} を quiver Γ の (underlying) Dynkin diagram と呼ぶ[9]．

[7]普通なら $\langle\cdot,\cdot\rangle$ と書くところだが，今回は $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は別の意味に使いたいので記号を替えた．

[8]例えば A の global dimension が有限であることなど．

[9]“Dynkin” という言葉の使い方も，多元環と Lie theory で異なっている．多元環では $\mathbb{C}[\Gamma]$ が有限表現型を持つ場合を “Dynkin case”，そうでないときを “non-Dynkin case” と呼ぶが，Lie theory では $\mathbb{C}[\Gamma]$ が有限表現型を持つかどうかに関わらず，グラフ Γ_{Dyn} のことを “Dynkin diagram” と呼ぶ．ただし，この言い

Definition 6. $n \times n$ 行列 $A(\Gamma_{Dyn}) = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ を次のように定める：

$$a_{i,j} := \begin{cases} 2 & (i=j), \\ -(\Gamma_{Dyn} \text{ の中で } i \text{ と } j \text{ を結ぶ辺の本数}) & (i \neq j). \end{cases}$$

この $A(\Gamma_{Dyn}) = (a_{i,j})$ を（Dynkin diagram Γ_{Dyn} に付随する）Cartan matrix と呼ぶ[10].

（Lie theoretic な）Cartan matrix $A(\Gamma_{Dyn})$ の性質を列挙しておこう.

(i)’ Cartan matrix $A(\Gamma_{Dyn})$ は常に対称行列である.

(ii)’ Cartan matrix $A(\Gamma_{Dyn})$ の行列成分 $a_{i,j}$ は常に整数であるが，非負であるとは限らない（対角成分は常に 2 だが，非対角成分は必ず非正）.

(iii)’ Cartan matrix $A(\Gamma_{Dyn})$ は正則行列とは限らない[11].

多元環 side の Cartan matrix C_Γ の性質 (i)∼(iii) と比較すれば，両者の違いを理解して頂けると思う．つまり，全く違うものを同じ名前で呼んでいるわけである[12]．ただし，両者の間に全く関係が無いわけではない.

$A = A(\Gamma_{Dyn})$ に対し，$\mathbb{Z}^I$ 上の bilinear form を

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{Lie} := \mathbf{x} A^t \mathbf{y} \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^I)$$

で定める．$A(\Gamma_{Dyn})$ は対称行列だから，これは symmetric bilinear form である．さらに $A(\Gamma_{Dyn})$ の定義から，次は明らかであろう：

$$(\mathbf{s}(i), \mathbf{s}(j))_{Lie} = \begin{cases} 2 & (i=j), \\ -(\Gamma_{Dyn} \text{ の中で } i \text{ と } j \text{ を結ぶ辺の本数}) & (i \neq j) \end{cases}$$

「$H = \Omega \cup \overline{\Omega}$ の中で i から j に向かう arrow の本数」と「Γ_{Dyn} の中で i と j を結ぶ辺の本数」は等しいので,

$$(\mathbf{s}(i), \mathbf{s}(j))_{Lie} = 2(\mathbf{s}(i), \mathbf{s}(j))_{alg}$$

となり，定数倍の差しかない．この関係を Cartan matrix の言葉で書き直せば,

$$A(\Gamma_{Dyn}) = 2 \cdot \frac{1}{2}\left({}^tC_{\overline{\Gamma}}^{-1} + {}^tC_{\Gamma}^{-1}\right)$$

ということになる．2 つの Cartan matrix はこの関係で結ばれているわけである.

以下，このノートでは $\mathbb{Z}^I$ 上の symmetric bilinear form として $(\cdot,\cdot)_{Lie}$ を採用することとし，簡単のために添字を省略して $(\cdot,\cdot)$ と書く[13].

Remark 7. Lie theory では，与えられた Cartan matrix $A(\Gamma_{Dyn})$ に対して Lie algebra を構成する．こうして出来る Lie algebra は Kac-Moody Lie algebra と呼ばれるものの一部

方は正確ではない．Lie theory で “Dynkin diagram” と呼んでいるものは，実はもっと広い概念で，今の方法で得られる Γ_{Dyn} は Dynkin diagram の中で symmetric と呼ばれる特別な場合になっている.

[10] この定義だと，loop さえ無ければ，Γ に cycle があっても何の問題もない.

[11] 例えば Γ が extended Dynkin（Lie theory では affine 型という）の場合には，$A(\Gamma_{Dyn})$ は corank 1 になる.

[12] 手前ミソになってしまうし，多元環の方々にケンカを売るつもりも毛頭無いのだが，歴史的には Lie theoretic な定義の方が先であると思う.

[13] 「たかが 2 倍の差じゃないか」と思われるかもしれないが，Lie theoretic にはこの “2” に大きな意味があって，ちょっと譲れない．申し訳ないが，この点は御容赦頂きたい.

(symmetric Kac-Moody Lie algebra）になっている[14]．出来上がる Lie algebra は一般には無限次元になるが，これが有限次元になることと，Γ_{Dyn} が A, D, E 型（多元環でいうところの Dynkin case）になることは同値になる．

Definition 8. $\Gamma = (I, \Omega)$ を loop のない有限 quiver とする．$(\mathbb{Z}^I) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^I$ とその基底 $\{\mathbf{s}(i) | i \in I\}$, およびその上の bilinear form $(\cdot, \cdot)$ の組 $\left(\mathbb{Q}^I, \{\mathbf{s}(i)\}, (\cdot, \cdot)\right)$ を Dynkin diagram Γ_{Dyn} に付随する root datum と呼ぶ．ただし，$(\cdot, \cdot)$ は上で構成した $\mathbb{Z}^I$ 上の bilinear form を自明な方法で $\mathbb{Q}^I$ 上に拡大したものである．

Remark 9. この定義は，Lie theory における通常の root datum の定義とは異なっているので，注意が必要．あくまで『このノートだけのもの』と思っておいて頂きたい[15]．Lie theory における root datum が別の形の定義を採用する理由の１つには『Cartan matrix が symmetric でない場合も扱いたい』というものがある．他方，我々の場合には話を quiver から出発させているので，Cartan matrix は symmetric なものしか出てこない．Cartan matrix が symmetric な場合に限定すれば，この定義でも差し支えない．

4.2. Crystal の定義（暫定版）.

そもそも「crystal とは何か？」がはっきりしないと話を始めづらいので，まず最初に crystal の定義を与えてしまうことにする．定義だけ見ても「意味不明」に思えるに違いないが，とりあえずは “そんな感じのもの” という程度に認識して頂ければ十分である．

前節のように root datum $\left(\mathbb{Q}^I, \{\mathbf{s}(i)\}, (\cdot, \cdot)\right)$ を fix しよう．基底 $\{\mathbf{s}(i)\}$ で張られる $\mathbf{Q}^I$ の $\mathbb{Z}$-submodule を

$$Q := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\mathbf{s}(i)$$

と書き，これを root lattice と呼ぶ．もちろん $Q \cong \mathbb{Z}^I$ である．さらに次を満たす P を１つ固定する:

(a) P は $\mathbf{Q}^I$ の rank $n = |I|$ の $\mathbb{Z}$-submodule である．

(b) $(\mathbf{z}, Q) \subset \mathbb{Z}$ for every $\mathbf{z} \in P$.

(c) $\mathbf{s}(i) \in P$ for every $i \in I$.

(c) から，常に $Q \subset P$ であることに注意されたい．

Remark 10. (1) bilinear form $(\cdot, \cdot)$ が非退化である場合（例えば Γ が A, D, E の場合）には，上記 (a), (b), (c) を満たすものの中で一番大きなものが canonical に存在するので，これを P とおくことにする．すなわち，

$$P := \{\mathbf{z} \in \mathbb{Q}^I \mid (\mathbf{z}, Q) \subset \mathbb{Z}\}$$

と定める．これは lattice（格子）の理論で言うところの,（Q の）dual lattice と呼ばれるものに他ならない．

一方，$(\cdot, \cdot)$ が退化している場合（例えば Γ が extended Dynkin の場合）に上のように定義をすると，P が $\mathbb{Z}$ 上有限生成でなくなってしまい (a) を満たさない．この場合には canonical な P の choice というのは存在せず，不定性がある．「１つ固定する」と言ってい

[14] symmetric と呼ばれるのは，$A(\Gamma_{Dyn})$ が必ず対称行列になるからである．一般の場合の Kac-Moody Lie algebra は，対称とは限らない Cartan matrix から出発して構成される．

[15] これが定義だと思って Lie theory の文献を見ると，おそらく混乱する．

るのは，このためである．
(2) P は，Lie theory で weight lattice と呼ばれているもの．

随分準備に時間が掛かってしまったが，以下 crystal の定義（暫定版）を与えよう[16]．

Definition 11. 集合 $\mathcal{B}$ と写像たち

$$\mathrm{wt} : \mathcal{B} \to P, \quad \varepsilon_i : \mathcal{B} \to \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}, \quad \varphi_i : \mathcal{B} \to \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\},$$
$$\widetilde{e}_i : \mathcal{B} \to \mathcal{B} \sqcup \{0\}, \quad \widetilde{f}_i : \mathcal{B} \to \mathcal{B} \sqcup \{0\} \qquad (i \in I)$$

が以下の公理を満たすとき，組 $\big(\mathcal{B}; \mathrm{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \widetilde{e}_i, \widetilde{f}_i\big)$ を root datum $\big(\mathbb{Q}^I, \{\mathbf{s}(i)\}, (\cdot,\cdot)\big)$ に付随する crystal と呼ぶ．

(C1) 任意の $i \in I$, $b \in \mathcal{B}$ に対し，

$$\varphi_i(b) = \varepsilon_i(b) + (\mathbf{s}(i), \mathrm{wt}(b)).$$

(C2) $b \in \mathcal{B}$ かつ $\widetilde{e}_i b \in \mathcal{B}$ ならば，

$$\mathrm{wt}(\widetilde{e}_i b) = \mathrm{wt}(b) + \mathbf{s}(i), \quad \varepsilon_i(\widetilde{e}_i b) = \varepsilon_i(b) - 1, \quad \varphi_i(\widetilde{e}_i b) = \varphi_i(b) + 1.$$

(C2)' $b \in \mathcal{B}$ かつ $\widetilde{f}_i b \in \mathcal{B}$ ならば，

$$\mathrm{wt}(\widetilde{f}_i b) = \mathrm{wt}(b) - \mathbf{s}(i), \quad \varepsilon_i(\widetilde{f}_i b) = \varepsilon_i(b) + 1, \quad \varphi_i(\widetilde{f}_i b) = \varphi_i(b) - 1.$$

(C3) $b, b' \in \mathcal{B}$ に対して，

$$b' = \widetilde{e}_i b \quad \Leftrightarrow \quad b = \widetilde{f}_i b'.$$

(C4) $b \in \mathcal{B}$ に対して，$\varphi_i(b) = -\infty$ ならば，

$$\widetilde{e}_i b = \widetilde{f}_i b = 0.$$

少し説明が必要だろう．写像の定義に現れる "$-\infty$" や "0" は，それぞれ「$\mathbb{Z}$ に含まれない extra な元」,「$\mathcal{B}$ に含まれない extra な元」と言っているだけで，基本的にそれ以上の意味はない．ただし，$-\infty$ に関しては，$\mathbb{Z}$ の元との "加法" が

$$(-\infty) + a = a + (-\infty) = -\infty \qquad (a \in \mathbb{Z})$$

によって定まっているものとする[17]．このことから，例えば次が従う：

$$\varphi_i(b) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_i(b) = -\infty.$$

実際，$b \in \mathcal{B}$ に対して，$\mathrm{wt}(b) \in P$ なのであった．よって $(\mathbf{s}(i), \mathrm{wt}(b)) \in \mathbb{Z}$ である．そうすると，公理 (C1) と "加法" の定義によって，$\varphi_i(b) = -\infty$ と $\varepsilon_i(b) = -\infty$ は同値であることが従う．

正確には crystal というのは組 $\big(\mathcal{B}; \mathrm{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \widetilde{e}_i, \widetilde{f}_i\big)$ のことであるのだが，いちいち書くと大変なので，以後写像を省略して「crystal $\mathcal{B}$」のように書くことにする．

crystal を考えるとき，その構造を図示したもの（crystal graph）を考えると便利である．

[16]"暫定版" と言っているのは，root datum の与え方が（全ての話を quiver から出発させているために）通常のものとは異なってしまっているからである．root datum 以外の部分はこれで良い．

[17] 1 年生の微積分でこんなことをやったら先生に怒られそうだが，ナイーブには「$-\infty$ という数がある」と思っているわけである．

Definition 12. $\mathcal{B}$ を crystal とする．このとき $\mathcal{B}$ を頂点集合とする色付き有向グラフを以下のルールで定め，これを $\mathcal{B}$ の crystal graph と呼ぶ．
<u>ルール</u>：$b' = \widetilde{f}_i b$ であるとき，b から b' に向かって $i \in I$ で色付けされた矢印を引く．

$$b \xrightarrow{\ i\ } b'$$

Example 13. Γ を A_n 型の quiver とし（orientation はどうでも良い），$\omega_1 \in P$ を

$$(\omega_1, \mathbf{s}(i)) = \delta_{1,i}$$

で定める．また $n+1$ 個の元からなる集合

$$\mathcal{B}(\omega_1) := \{b_0, b_1, \cdots, b_n\}$$

に対して，写像 $\mathrm{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \widetilde{e}_i, \widetilde{f}_i$ を次のように定める．

$$\mathrm{wt}(b_k) := \omega_1 - \sum_{i=1}^{k} \mathbf{s}(i) \quad (0 \leq k \leq n),$$

$$\varepsilon_i(b_k) := \begin{cases} 1 & (i = k), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases} \qquad \varphi_i(b_k) := \begin{cases} 1 & (i = k+1), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

$$\widetilde{e}_i b_k := \begin{cases} b_{k-1} & (i = k), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases} \qquad \widetilde{f}_i b_k := \begin{cases} b_{k+1} & (i = k+1), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

このとき $\mathcal{B}(\omega_1)$ は crystal である．その crystal graph は以下のようになる．

$$b_0 \xrightarrow{\ 1\ } b_1 \xrightarrow{\ 2\ } b_2 \xrightarrow{\ 3\ } \cdots \xrightarrow{\ n\ } b_n$$

この $\mathcal{B}(\omega_1)$ は「A_n 型量子群の vector 表現の crystal basis」というもので，crystal の理論では基本的である．ただし，その意味を述べようとすると量子群の表現論が必要になってしまうので，詳しい説明は割愛する．

Example 14. Γ を loop がない勝手な quiver とする．また $j \in I$ を 1 つ固定する．$\mathbb{Z}$ でパラメトライズされる集合

$$\mathcal{B}_j := \{b_j(k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

に対して，写像 $\mathrm{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \widetilde{e}_i, \widetilde{f}_i$ を次のように定める．

$$\mathrm{wt}(b_j(k)) := k\mathbf{s}(j) \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\varepsilon_i(b_j(k)) := \begin{cases} -k & (i = j), \\ -\infty & (i \neq j), \end{cases} \qquad \varphi_i(b_j(k)) := \begin{cases} k & (i = j), \\ -\infty & (i \neq j), \end{cases}$$

$$\widetilde{e}_i b_j(k) := \begin{cases} b_j(k+1) & (i = j), \\ 0 & (i \neq j), \end{cases} \qquad \widetilde{f}_i b_j(k) := \begin{cases} b_j(k-1) & (i = j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

このとき $\mathcal{B}_j$ は crystal となる．その crystal graph は以下のようになる．

$$\cdots \xrightarrow{\ j\ } \underset{b_j(k-1)}{\circ} \xrightarrow{\ j\ } \underset{b_j(k)}{\circ} \xrightarrow{\ j\ } \underset{b_j(k+1)}{\circ} \xrightarrow{\ j\ } \underset{b_j(k+2)}{\circ} \xrightarrow{\ j\ } \cdots$$

Example 15. Γ を loop がない勝手な quiver とし，$\lambda \in P$ を固定する．１点からなる集合

$$\mathcal{T}_\lambda := \{t_\lambda\}$$

写像 $\mathrm{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \widetilde{e}_i, \widetilde{f}_i$ を次のように定める．

$$\mathrm{wt}(t_\lambda) := \lambda, \quad \varepsilon_i(t_\lambda) = \varphi_i(t_\lambda) := -\infty, \quad \widetilde{e}_i t_\lambda = \widetilde{f}_i t_\lambda := 0 \quad (\forall\, i \in I).$$

このとき $\mathcal{T}_\lambda$ は crystal である．crystal graph は１点のみからなるグラフ（矢印無し）になる．

4.3. $\mathbb{B}$ の場合.

$\mathbb{B} = \bigsqcup \mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})$ 上に $\big(\mathbb{Q}^I, \{\mathbf{s}(i)\}, (\cdot,\cdot)\big)$ root datum とする crystal の構造を定めよう．

○ wt の定義：$\Lambda \in \mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})$ に対し，

$$\mathrm{wt}(\Lambda) := -\mathbf{d}.$$

○ ε_i の定義：$B \in \Lambda(\mathbf{d})$ に対して，$\varepsilon_i(B) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を次のように定める：

$$\varepsilon_i(B) := \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Coker}\left(\bigoplus_{\tau\in H;\mathrm{in}(\tau)=i} V(\mathbf{d})_{\mathrm{out}(\tau)} \xrightarrow{\oplus B_\tau} V(\mathbf{d})_i\right).$$

$B = (B_\tau)_{\tau\in H} \in \Lambda(\mathbf{d})$ によって，I-graded vector space $V(\mathbf{d})$ を $P(\Gamma)$-module とみなすことが出来ることに注意しよう．このとき，上で与えた $\varepsilon_i(B)$ は，頂点 $i \in I$ に関する $P(\Gamma)$-module $V(\mathbf{d})$ の top (i-th top) の次元に他ならない．

さらに $\Lambda \in \mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})$ に対して，Λ の generic な点 $B \in \Lambda$ を取り，

$$\varepsilon_i(\Lambda) := \varepsilon_i(B)$$

と定義する．

○ φ_i の定義：wt と ε_i が決まると，公理 (C1) によって φ_i は自動的に定まる：

$$\varphi_i(\Lambda) := \varepsilon_i(\Lambda) + (\mathbf{s}(i), \mathrm{wt}(\Lambda)).$$

○ $\widetilde{e}_i$ の定義：まず

$$\big(\mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})\big)_{i,p} := \big\{\Lambda \in \mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d}) \mid \varepsilon_i(\Lambda) = p\big\}$$

とおく．このとき $\mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})$ は $\big(\mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})\big)_{i,p}$ たちの有限個 disjoint union に分かれる：

$$\mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d}) = \big(\mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})\big)_{i,0} \sqcup \big(\mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})\big)_{i,1} \sqcup \big(\mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})\big)_{i,2} \sqcup \cdots \sqcup \big(\mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})\big)_{i,\dim_{\mathbb{C}} V(\mathbf{d})_i}.$$

もちろん，$\big(\mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})\big)_{i,p}$ $(0 \leq p \leq \dim_{\mathbb{C}} V(\mathbf{d})_i)$ は空集合になり得ることを注意しておく．

さて，$\Lambda \in \big(\mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})\big)_{i,l}$ とし，Λ の中から generic な点 B を取ろう．このとき，

$$l = \varepsilon_i(B) = P(\Gamma)\text{-module } V(\mathbf{d}) \text{ の } i\text{-th top の次元}$$

なのであった．したがって

$V(\mathbf{d})$ の $P(\Gamma)$-submodule V'' が存在して，$V(\mathbf{d})/V'' \cong S(i)^{\oplus l}$ (i-th top of $V(\mathbf{d})$)

となる．すなわち，V'' は i-th radical ということになる．

I-graded vector space としては，$V'' \cong V(\mathbf{d}'')$ である．ただし $\mathbf{d}'' := \mathbf{d} - l\mathbf{s}(i)$ とした．上で述べたことは,『I-graded vector space $V(\mathbf{d}'')$ 上に $P(\Gamma)$-module structure を定めて，

$$0 \to V(\mathbf{d}'') \xrightarrow{\phi''} V(\mathbf{d}) \xrightarrow{\phi'} S(i)^{\oplus l} \to 0 \tag{4.3.1}$$

が $P(\Gamma)$-module の完全列となるように出来る』ということに他ならない．

$P(\Gamma)$-module $V(\mathbf{d}'')$ に対応する $\Lambda(\mathbf{d}'')$ の元を B'' と書こう．こうして対応

$$\Lambda(\mathbf{d}) \ni B \to B'' \in \Lambda(\mathbf{d}'')$$

が得られる．繰り返しになるが，この対応の意味するところは，ナイーブには

『$V(\mathbf{d})$ に対して，その i-th radical を取れ』

ということである．

ただし，対応 $B \to B''$ は写像にはなっていない．実際，$V'' \cong V(\mathbf{d}'')$ は i-th radical だから，それは同型を除いて一意的に定まる．しかし，$V(\mathbf{d}'')$ 上の $P(\Gamma)$-module structure を定める $B'' \in \Lambda(\mathbf{d}'')$ の選び方には不定性があり，一意的には決まらない．

そこで，もう少しまじめに考えてみよう．まず (4.3.1) を単なる I-graded vector space の完全列と思うことにする．$V(\mathbf{d})$ 上に $P(\Gamma)$-module structure を定めるということは，$B \in \Lambda(\mathbf{d})$ を決めることに他ならないので，これを１つ指定しよう．

同様に，$V(\mathbf{d}'')$ 上に $P(\Gamma)$-module structure を定めるためには，$B'' \in \Lambda(\mathbf{d}'')$ を指定すれば良いわけだが，いい加減に取ってしまうと $\phi'' : V(\mathbf{d}'') \to V(\mathbf{d})$ が $P(\Gamma)$-module の射にならない．$P(\Gamma)$-module の射になるためには，$\mathrm{Im}\phi''$ が B-stable になっていることが必要十分である[18]．このとき，商空間 $V(\mathbf{d})/V(\mathbf{d}'') \cong S(i)^{\oplus l}$ には自然に $P(\Gamma)$-module の構造が入る．すなわち，これだけデータを与えておけば，$\phi' : V(\mathbf{d}) \to S(i)^{\oplus l}$ は自動的に $P(\Gamma)$-module の射になる．

話を整理しよう．まずデータとして組 (B, ϕ', ϕ'') であって，$B \in \Lambda(\mathbf{d})$ かつ $\mathrm{Im}\phi''$ が B-stable となっているようなものを取る．このような組 (B, ϕ', ϕ'') の全体を $\Lambda(\mathbf{d}; \mathbf{d}'')$ と書こう．$\Lambda(\mathbf{d}; \mathbf{d}'')$ から $\Lambda(\mathbf{d})$，$\Lambda(\mathbf{d}'')$ にはそれぞれ

$$q_1 : \Lambda(\mathbf{d}; \mathbf{d}'') \ni (B, \phi', \phi'') \mapsto B \in \Lambda(\mathbf{d}), \quad q_2 : \Lambda(\mathbf{d}; \mathbf{d}'') \ni (B, \phi', \phi'') \mapsto B'' \in \Lambda(\mathbf{d}'')$$

なる写像が定義される．こうして図式

$$\Lambda(\mathbf{d}'') \xleftarrow{q_2} \Lambda(\mathbf{d}; \mathbf{d}'') \xrightarrow{q_1} \Lambda(\mathbf{d}) \tag{4.3.2}$$

が得られる．q_1, q_2 は単射ではなく，したがって対応 $B \to B''$ は写像ではない．

このとき次が成り立つ．

Proposition 16 (Kashiwara-S [10])**.** 図式 (4.3.2) は，全単射

$$\big(\mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})\big)_{i,l} \xrightarrow{\sim} \big(\mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d}'')\big)_{i,0}$$

---

[18] ϕ'' は I-graded vector space の射だったので，$\mathrm{Im}\phi''$ は $V(\mathbf{d})$ の I-graded vector subspace である．すなわち $\mathrm{Im}\phi'' = \oplus_{i \in I}\big(\mathrm{Im}\phi''\big)_i$ なる分解を持っている．任意の $\tau \in H$ に対して，

$$B_\tau\big(\mathrm{Im}\phi''\big)_{\mathrm{out}(\tau)} \subset \big(\mathrm{Im}\phi''\big)_{\mathrm{in}(\tau)}$$

となるとき，$\mathrm{Im}\phi''$ は B-stable であるという．

を誘導する．

つまり,『与えられた $P(\Gamma)$-module に対して，その i-th radical を取れ』という写像は, $B \to B''$ という意味では well-defined にならないが，既約成分間の対応という意味では well-defined であり，しかも全単射を与える，というわけである．

証明は q_1, q_2 の幾何学的な性質によっており，自明ではない．詳しくは原論文 ([10]) を参照されたい．

上の全単射を

$$\widetilde{e}_i^{max} : \big(\mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})\big)_{i,l} \xrightarrow{\sim} \big(\mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d}'')\big)_{i,0}$$

と書こう．この記法は，あたかも『$\widetilde{e}_i$ なる写像がある』ことを想定しているかのように読めるが，実際その通りで，写像 $\widetilde{e}_i$ は以下のように定義される：

$$\widetilde{e}_i : \begin{cases} \big(\Lambda(\mathbf{d})\big)_{i,l} \xrightarrow{\widetilde{e}_i^{max}} \big(\Lambda(\mathbf{d} - l\mathbf{s}(i))\big)_{i,0} \xrightarrow{(\widetilde{e}_i^{max})^{-1}} \big(\Lambda(\mathbf{d} - \mathbf{s}(i))\big)_{i,l-1} & \text{if } l > 0, \\ \big(\Lambda(\mathbf{d})\big)_{i,0} \longrightarrow \{0\} & \text{if } l = 0. \end{cases}$$

これまでの説明から $\widetilde{e}_i$ の “意味” は明らかであろう．つまり，$\widetilde{e}_i$ とは

『与えられた $P(\Gamma)$-module の i-th top を generic に１次元削れ』

という操作に他ならない[19]．特に２行目は『i-th top が０次元のとき（$l = 0$ のとき）は１次元削ることは出来ないから，その場合には行き先を０にせよ』 というわけである．

$\mathbb{B} = \bigsqcup_{\mathbf{d} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^I} \mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})$ であったことを思い出そう．各 component 毎に定義された $\widetilde{e}_i$ たちを束ねて,

$$\widetilde{e}_i : \mathbb{B} \to \mathbb{B} \sqcup \{0\}$$

が well-defined に定まるのは，言うまでもない．

○ <u>$\widetilde{f}_i$ の定義</u>：これも前出の $\widetilde{e}_i^{max}$ を使って構成する：

$$\widetilde{f}_i : \big(\Lambda(\mathbf{d})\big)_{i,l} \xrightarrow{\widetilde{e}_i^{max}} \big(\Lambda(\mathbf{d} - l\mathbf{s}(i))\big)_{i,0} \xrightarrow{(\widetilde{e}_i^{max})^{-1}} \big(\Lambda(\mathbf{d} + \mathbf{s}(i))\big)_{i,l+1}.$$

今度の場合は l が０になるかどうかの場合わけは必要ない．$\widetilde{f}_i$ の “意味” は,

『与えられた $P(\Gamma)$-module の i-th top を generic に１次元増やせ』

ということなので，l の値に関わらず操作を行うことが出来るからである．

したがって，今度の場合は『$\widetilde{f}_i$ を施せない』ということはなく，全てを束ねて得られる写像は

$$\widetilde{f}_i : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$$

となる．

[19]「だったら面倒なことはせずに，最初から『与えられた $P(\Gamma)$-module の i-th top を generic に１次元削る』ということを $\widetilde{e}_i$ の定義にすればいいんじゃないか？」と思われるかもしれない．確かにその通りなのであるが，このことを幾何的にちゃんと言おうとすると，全単射

$$\big(\mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})\big)_{i,l} \xrightarrow{\sim} \big(\mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d} - \mathbf{s}(i))\big)_{i,l-1}$$

の存在を示さなければならない．結論としてはもちろん正しいのだけれど，少なくとも我々は $\big(\mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d}'')\big)_{i,0}$ を経由する方法しか，その証明を知らない．

以上で，必要な写像が全て定義出来た．このとき主張は以下の通り．

Proposition 17 ([10])**.** 組 $\left(\mathbb{B}; \mathrm{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \widetilde{e}_i, \widetilde{f}_i\right)$ は，*root datum* $\left(\mathbb{Q}^I, \{\mathbf{s}(i)\}, (\cdot,\cdot)\right)$ に付随する *crystal* である．

Proof. 公理 (C1)〜(C4) を確かめれば良いが，定義から (C1)〜(C3) は明らかである．また (C4) についても，$\varphi_i(\Lambda) = -\infty$ となる $\Lambda \in \mathbb{B}$ は存在しないので，OK. □

4.4. **その特徴付け.**

前節で $\mathbb{B} = \bigsqcup_{\mathbf{d}\in\mathbb{Z}^I_{\geq 0}} \mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})$ 上に crystal structure が入ること，およびその preprojective algebra の表現論的な意味を説明した.「定義に現れる各写像が，ちゃんと意味を持っている」ということについては，多少は納得してもらえたのではないかと思う．ただし，

Q：crystal structure が入ったからといって，何がうれしいのか？

という問いに対しては，何も答えてはいない．

この問いを preprojective algebra の表現論だけから説明するのは非常に難しいのだが，crystal の一般論の立場からは次のように説明される．

Theorem 18 (Kashiwara-S [10])**.** *crystal* として $\mathbb{B}$ は $B(\infty)$ と同型である[20].

ここに $B(\infty)$ とは，“量子群のベキ零部分の crystal basis” と呼ばれる crystal で，その構造が非常によく調べられているものである．このノートでは「量子群の表現論に関する事実は一切使わない」ことにしているので，“量子群のベキ零部分の crystal basis” が何か？ということには触れないが，強調しておきたいのは『Theorem 18 が上の問いに対する１つの解答を与えている』ということである．すなわち，

A：crystal の一般論で知られている結果を用いることによって，preprojective algebra の nilpotent な表現全体のなす variety の構造を調べることが出来る

ということである．これさえ頭に留めて頂ければ，このノートを書いた意味は半分以上達成されていると言って良い．

Γ が Dynkin case の場合（特に A 型の場合）については，5 節に詳しい解説を書いたので，そちらを参照して頂きたい．

4.5. **Another crystal structure on $\mathbb{B}$.**

4.3 節で導入した crystal structure は，多元環の立場で言えば “表現の top をいじる” という操作によって実現されたものであった．多元環の表現論においては,「top でうまくいく」話というのは「socle でもうまくいく」ことが多い．では今の場合はどうか？というと，実は OK で，top と socle の役割を入れ替えても $\mathbb{B}$ 上に crystal structure を定義することが出来る．ただし，こうして定義される $\mathbb{B}$ 上の crystal structure は，4.3 節で導入したものとは別物であることに注意されたい．

具体的に書いていこう．まず wt は 4.3 節と共通に取る．次に ε_i だが，これは 4.3 節とは違うものを考えるので，区別のために右上に $*$ を付けて ε_i^* と書くことにしよう．

[20]「crystal の同型」を定義していないのでこの主張は意味をなさないけれども，感じはわかって頂けると思う．

$B \in \Lambda(\mathbf{d})$ に対して，

$$\varepsilon_i^*(B) := \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ker}\left(V(\mathbf{d})_i \xrightarrow{\oplus B_\tau} \bigoplus_{\tau \in H; \mathrm{out}(\tau)=i} V(\mathbf{d})_{\mathrm{in}(\tau)} \right)$$

とおく．これは対応する $P(\Gamma)$-module の i-th socle の次元に他ならない．

そこで，$\Lambda \in \mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})$ に対して Λ の generic な点 $B \in \Lambda$ を取り，

$$\varepsilon_i^*(\Lambda) := \varepsilon_i^*(B)$$

と定義する．また

$$\varphi_i^*(\Lambda) := \varepsilon_i^*(\Lambda) + (\mathbf{s}(i), \mathrm{wt}(\Lambda))$$

と定める．

4.3 節では $\varepsilon_i = i$-th top の次元で $\mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})$ を分割したが，今度は $\varepsilon_i^* = i$-th socle の次元を使って同じことをやる．

$$\mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d}) = \bigsqcup_{p \geq 0} \big(\mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})\big)_i^p, \quad \text{where } \big(\mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})\big)_i^p := \big\{\Lambda \in \mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d}) \mid \varepsilon_i^*(\Lambda) = p\big\}.$$

そこで，4.3 節と同様のアイデアで全単射

$$(\widetilde{e}_i^*)^{max} : \big(\mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})\big)_i^l \xrightarrow{\sim} \big(\mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d}')\big)_i^0$$

を構成する．ただし $\mathbf{d}' := \mathbf{d} - l\mathbf{s}(i)$ である[21]．やり方はほぼ同じなので繰り返さないがちょっとだけ注意をしておくと，今回は top と socle の役割を取り替えているので，(4.3.1) に当たる図式は map の向きが反対になる：

$$0 \to S(i)^{\oplus l} \xrightarrow{\phi''} V(\mathbf{d}) \xrightarrow{\phi'} V(\mathbf{d}') \to 0. \tag{4.5.1}$$

この図式を元に (4.3.2) に相当する図式を考えることが出来て，それが全単射 $(\widetilde{e}_i^*)^{max}$ を誘導する，というストーリーになっている．$(\widetilde{e}_i^*)^{max}$ の意味は『i-th cosocle を取れ』ということである．

全単射 $(\widetilde{e}_i^*)^{max}$ を用いて，写像

$$\widetilde{e}_i^* : \mathbb{B} \to \mathbb{B} \sqcup \{0\}, \qquad \widetilde{f}_i^* : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$$

を同様の方法で定める．このとき主張は以下の通り．

Theorem 19 ([10]). (1) 組 $\big(\mathbb{B}; \mathrm{wt}, \varepsilon_i^*, \varphi_i^*, \widetilde{e}_i^*, \widetilde{f}_i^*\big)$ は，*root datum* $\big(\mathbb{Q}^I, \{\mathbf{s}(i)\}, (\cdot,\cdot)\big)$ に付随する *crystal* である．

(2) *crystal* として $\big(\mathbb{B}; \mathrm{wt}, \varepsilon_i^*, \varphi_i^*, \widetilde{e}_i^*, \widetilde{f}_i^*\big)$ と $B(\infty)$ は同型である．

(2) は注釈が必要だろう．Theorem 18 と Theorem 19 を併せると

$$\big(\mathbb{B}; \mathrm{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \widetilde{e}_i, \widetilde{f}_i\big) \cong B(\infty) \cong \big(\mathbb{B}; \mathrm{wt}, \varepsilon_i^*, \varphi_i^*, \widetilde{e}_i^*, \widetilde{f}_i^*\big)$$

ということになってしまい「全く違う定義をしたはずなのに，なぜ？」と思うかもしれない．しかし，よく考えると矛盾はしていない．上の同型はあくまで「抽象的な crystal としての同型」を与えているだけなので，例えば "$\varepsilon_i = \varepsilon_i^*$" ということを主張しているわけではない．上の同型が主張するところは

『top を用いて定義した構造と，socle を用いて定義した構造が，抽象的には一致する』

[21] ベクトルとしては $\mathbf{d}' = \mathbf{d}''$ であるけれども，役割が違うので記号を替えた．

ということだけであり,「top について成り立つことは，socle に対しても成り立つ場合がある」という経験則からすれば，ある意味 “自然” かも知れない．

5. Dynkin case

5.1. **一般論.**

本節では話を $\Gamma = (I, \Omega)$ が Dynkin quiver（A, D, E）の場合に限定する．多元環 side から見た場合に，この条件は $P(\Gamma)$ が有限次元代数であることと同値であることは既に述べた．実は幾何学的にも，この条件は大きな意味を持つ．

Proposition 20 (Lusztig [9])**.** $\Gamma = (I, \Omega)$ を *Dynkin quiver* とする．このとき勝手に与えられた $\Lambda \in \mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})$ に対して，$E_\Omega(\mathbf{d})$ の $G(\mathbf{d})$*-orbit* $\mathcal{O}_\Omega$ が一意的に存在して,

$$\Lambda = \overline{T^*_{\mathcal{O}_\Omega} E_\Omega(\mathbf{d})}$$

と書ける．逆に，与えられた $E_\Omega(\mathbf{d})$ の $G(\mathbf{d})$*-orbit* $\mathcal{O}_\Omega$ に対し，$\overline{T^*_{\mathcal{O}_\Omega} E_\Omega(\mathbf{d})} \in \mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})$ である．したがって，次の１対１対応が得られる：

$$\left\{ E_\Omega(\mathbf{d}) \text{ の } G(\mathbf{d})\text{-}orbit \right\} \ni \mathcal{O}_\Omega \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \overline{T^*_{\mathcal{O}_\Omega} E_\Omega(\mathbf{d})} \in \mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d}). \tag{5.1.1}$$

またしてもヘンな記号が現れたが，$T^*_{\mathcal{O}_\Omega} E_\Omega(\mathbf{d})$ は “$\mathcal{O}_\Omega$ の conormal bundle”，$\overline{T^*_{\mathcal{O}_\Omega} E_\Omega(\mathbf{d})}$ は “その closure” という意味である．conormal bundle というのは，より一般的な setting で定義される，幾何学的には基本的な概念であるが，幾何の言葉に不慣れな方も多いと思う．話を今回の場合に限ってしまえば，以下のように考えてもらっても差し支えない．

まず

$$X(\mathbf{d}) = \bigoplus_{\tau \in H} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V(\mathbf{d})_{\mathrm{out}(\tau)}, V(\mathbf{d})_{\mathrm{in}(\tau)}) = E_\Omega(\mathbf{d}) \oplus E_{\overline{\Omega}}(\mathbf{d})$$

に注意しよう．第１成分への射影 $\pi_{\mathbf{d},\Omega} : X(\mathbf{d}) \to E_\Omega(\mathbf{d})$ とし，$\pi_{\mathbf{d},\Omega}$ の $\Lambda(\mathbf{d})$ への制限を $\pi_{\Lambda(\mathbf{d}),\Omega} := \pi_{\mathbf{d},\Omega}|_{\Lambda(\mathbf{d})}$ と記す．このとき $\pi_{\Lambda(\mathbf{d}),\Omega}$ は全射である．したがって $\Lambda(\mathbf{d})$ の分割

$$\Lambda(\mathbf{d}) = \bigsqcup_{\mathcal{O}_\Omega; G(\mathbf{d})\text{-orbit}} \pi^{-1}_{\Lambda(\mathbf{d}),\Omega}(\mathcal{O}_\Omega)$$

が得られる．Γ は Dynkin type なので，右辺は有限個の disjoint union である．$\pi^{-1}_{\Lambda(\mathbf{d}),\Omega}(\mathcal{O}_\Omega)$ が $\Lambda(\mathbf{d})$ の $G(\mathbf{d})$ 不変な部分集合となることは定義からすぐに解るけれども，単独の $G(\mathbf{d})$-orbit になるとは限らない（一般にはなっていない）．

Proposition 21 ([9])**.** Γ が *Dynkin type* ならば,

$$\pi^{-1}_{\Lambda(\mathbf{d}),\Omega}(\mathcal{O}_\Omega) = T^*_{\mathcal{O}_\Omega} E_\Omega(\mathbf{d})$$

である．したがって次が成立する：

$$\overline{\pi^{-1}_{\Lambda(\mathbf{d}),\Omega}(\mathcal{O}_\Omega)} = \overline{T^*_{\mathcal{O}_\Omega} E_\Omega(\mathbf{d})}.$$

つまり，一般的な conormal bundle の定義を知らなくても，今の場合は $\pi^{-1}_{\Lambda(\mathbf{d}),\Omega}(\mathcal{O}_\Omega)$ をその定義と思ってもいいわけである．

Proposition 21 の “意味” を考えてみよう．まず $\Lambda \in \mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})$ とし，Λ の中から generic に $(B_\tau)_{\tau \in H}$ をとる．このとき

『I-graded vector space $V(\mathbf{d})$ を，$(B_\tau)_{\tau\in H}$ によって
nilpotent $P(\Gamma)$-module と思う』

ことが出来る．また，射影 $\pi_{\Lambda(\mathbf{d}),\Omega}\left((B_\tau)_{\tau\in H}\right) = (B_\tau)_{\tau\in\Omega}$ をとるということは，

『与えられた $P(\Gamma)$-module $V(\mathbf{d})$ を，$\tau \in \overline{\Omega}$ の作用を
忘れることによって，$\mathbb{C}[\Gamma]$-module と思え』

ということに他ならない．したがって Proposition 21 は

$$T^*_{\mathcal{O}_\Omega}E_\Omega(\mathbf{d}) = \left\{ \begin{array}{c} V(\mathbf{d})\text{ 上の }P(\Gamma)\text{-module structure であって，それを} \\ \mathbb{C}[\Gamma]\text{-module と思ったときに同型になるようなもの} \end{array} \right\}$$

ということを意味していることになる．

話を先に進めよう．いま Γ は Dynkin type だったので，有名な Gabriel の定理により，直既約な $\mathbb{C}[\Gamma]$-module の同型類は dimension vector で一意的に定まり，しかもそれらは対応する Dynkin 図形 Γ_{Dyn} に付随する positive root でパラメトライズされる．したがって，上の手順で得られた $\mathbb{C}[\Gamma]$-module $V(\mathbf{d})$ は

$$V(\mathbf{d}) = \bigoplus_{\beta\in\Delta^+} V_\Omega(\beta)^{\oplus a_{\beta,\Omega}}$$

の形に一意的に分解する．ただし $\Delta^+ = \Delta^+(\Gamma_{Dyn})$ は positive root 全体の集合，$V_\Omega(\beta)$ は $\beta \in \Delta^+$ に対応する直既約 $\mathbb{C}[\Gamma]$-module である．こうして得られる非負整数の組を

$$\mathbf{a}_\Omega := (a_{\beta,\Omega})_{\beta\in\Delta^+} \in \mathbb{Z}^N_{\geq 0} \qquad (N := |\Delta^+|)$$

と書く．

整理すると，

(i) $\Lambda \in \mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})$ とし，Λ の中から generic に $(B_\tau)_{\tau\in H}$ をとる；
(ii) $\pi_{\Lambda(\mathbf{d}),\Omega}\left((B_\tau)_{\tau\in H}\right) = (B_\tau)_{\tau\in\Omega}$ によって，$V(\mathbf{d})$ を $\mathbb{C}[\Gamma]$-module とみなす；
(iii) $\mathbb{C}[\Gamma]$-module $V(\mathbf{d})$ を直既約分解して，各直既約因子の multiplicity を表す非負整数の組 $\mathbf{a}_\Omega = (a_{\beta,\Omega})_{\beta\in\Delta^+} \in \mathbb{Z}^N_{\geq 0}$ を取り出す；

という操作によって，写像 $\Psi_{\mathbf{d},\Omega} : \mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d}) \to \mathbb{Z}^N_{\geq 0}$ が定義されたことになる．(5.1.1) から $\Psi_{\mathbf{d},\Omega}$ は単射であることに注意しよう．dimension vector $\mathbf{d}$ の可能性を全て走らせて，これらを束ねると，全単射

$$\Psi_\Omega : \mathbb{B} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^N_{\geq 0}$$

が得られる．また逆写像 $\Psi_\Omega^{-1} : \mathbb{Z}^N_{\geq 0} \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}$ は，$\mathbf{a} \mapsto \overline{T^*_{\mathcal{O}_{\mathbf{a},\Omega}}E_\Omega(\mathbf{d})}$ で与えられる．ここに $\mathcal{O}_{\mathbf{a},\Omega}$ は，$\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^N_{\geq 0}$ に対応する $G(\mathbf{d})$-orbit である．

「crystal structure を理解するためには crystal graph がわかれば良い」というのは以前述べた通りなのだが，前節で構成した $\mathbb{B}$ 上の crystal structure の情報だけでは，具体的に graph の頂点集合として何を考えたらいいのか，全く解らなかった．ところが Γ が Dynkin type の場合には，『$\mathbb{Z}^N_{\geq 0}$ を頂点集合とするグラフを描けば良い』ということがはっきりしたわけである．あとは全単射 $\Psi_\Omega : \mathbb{B} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^N_{\geq 0}$ を通じて $\mathbb{B}$ に入っている crystal structure を $\mathbb{Z}^N_{\geq 0}$ 上に移植させ，各格子点間に矢印を描いていけば良い[22].

[22]もちろん「$\mathbb{Z}^N_{\geq 0}$ を頂点集合とする graph」なんてものが，本当に絵に描けるわけではないが.

また，全単射 $\Psi_\Omega : \mathbb{B} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ は orientation Ω の選び方に depend するので，Ω を変えれば $\mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ に入る crystal structure も当然変わる．そこで『$\mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ 上にどんな crystal structure が入っているか？』を区別したい場合には，これを $\mathcal{B}_\Omega$ と書くことにする．すなわち

$$\mathcal{B}_\Omega := \left\{ \mathbf{a}_\Omega = (a_{\beta,\Omega})_{\beta \in \Delta^+} \;\middle|\; a_{\beta,\Omega} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ for every } \beta \in \Delta^+ \right\}.$$

5.2. A 型の場合（その１）.

本節では $\Gamma = (I, \Omega)$ が A_n 型の Dynkin quiver の場合に限定する．このとき，positive root の集合 $\Delta^+ = \Delta(A_n)^+$ は以下のようになる：

$$\Delta^+ = \left\{ \beta_{i,j} := \sum_{k=i}^{j} \mathbf{s}(i) \;\middle|\; 1 \leq i \leq j \leq n \right\}.$$

したがって，

$$N = |\Delta^+| = \frac{n(n+1)}{2}.$$

同型 $\Psi_\Omega : \mathbb{B} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ を指定するには orientation Ω を選ばなければならない．ここでは次のようなものを取ろう：

$$\Omega_0 : \quad \underset{1}{\circ} \longleftarrow \underset{2}{\circ} \longleftarrow \underset{3}{\circ} \longleftarrow \quad \cdots \quad \longleftarrow \underset{n-2}{\circ} \longleftarrow \underset{n-1}{\circ} \longleftarrow \underset{n}{\circ}.$$

記述を簡単にするために，

$$a_{i,j} := a_{\beta_{i,j+1},\Omega_0} \ (1 \leq i < j \leq n+1),$$

$$\mathcal{B}_{\Omega_0} = \{\mathbf{a} := (a_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n+1} \mid a_{i,j} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

と書くことにしよう[23]．このとき $\mathbb{B}$ に入っている２つの crystal structure $\left(\mathbb{B}; \mathrm{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \widetilde{e}_i, \widetilde{f}_i\right)$ および $\left(\mathbb{B}; \mathrm{wt}, \varepsilon_i^*, \varphi_i^*, \widetilde{e}_i^*, \widetilde{f}_i^*\right)$ を同型 $\Psi_{\Omega_0} : \mathbb{B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_{\Omega_0}$ によって $\mathcal{B}_{\Omega_0} \cong \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ 側に移植する．ここでは結果のみ記すこととし，どうしてそうなるか？という理由には一切触れない[24]．

○ wt の定義：$\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ に対し，

$$\mathrm{wt}(\mathbf{a}) = -\sum_{i \in I} d_i \mathbf{s}(i), \quad \text{where} \quad d_i = \sum_{k=1}^{i} \sum_{l=i+1}^{n+1} a_{k,l} \quad (i \in I).$$

○ ε_i, ε_i^*, φ_i, φ_i^* の定義：$i \in I$ に対して

$$A_k^{(i)}(\mathbf{a}) := \sum_{s=1}^{k} (a_{s,i+1} - a_{s-1,i}) \quad (1 \leq k \leq i),$$

---

[23]普通に考えれば

$$a_{i,j} := a_{\beta_{i,j}} \ (1 \leq i \leq j \leq n)$$

とするのが自然だろう．ただし，既存の crystal の理論と比較するためには，２つめの添字 j の番号付けを１つずらしておいた方が都合が良い．気持ち悪いかもしれないが，このノートでは「ずらした添字付け」を採用する．

[24]説明の仕方はいろいろある．参考文献として Reineke [12], Savage [18], 筆者 [17] を挙げておくが，いずれにしてもそれなりに準備が必要で，結果は自明ではない．

$$A_l^{*(i)}(\mathbf{a}) = \sum_{t=l+1}^{n+1} (a_{i,t} - a_{i+1,t+1}) \quad (i \le l \le n)$$

とおく．ただし上式において $a_{0,i} = a_{i+1,n+2} = 0$ と思うことにする．このとき，

$$\varepsilon_i(\mathbf{a}) := \max\left\{A_1^{(i)}(\mathbf{a}), \cdots, A_i^{(i)}(\mathbf{a})\right\}, \quad \varphi_i(\mathbf{a}) := \varepsilon_i(\mathbf{a}) + \big(\mathbf{s}(i), \mathrm{wt}(\mathbf{a})\big),$$

$$\varepsilon_i^*(\mathbf{a}) := \max\left\{A_i^{*(i)}(\mathbf{a}), \cdots, A_n^{*(i)}(\mathbf{a})\right\}, \quad \varphi_i^*(\mathbf{a}) := \varepsilon_i^*(\mathbf{a}) + \big(\mathbf{s}(i), \mathrm{wt}(\mathbf{a})\big).$$

○ $\widetilde{e}_i$, $\widetilde{f}_i$, $\widetilde{e}_i^*$, $\widetilde{f}_i^*$ の定義：

$$k_+ := \min\left\{1 \le k \le i \,\middle|\, \varepsilon_i(\mathbf{a}) = A_k^{(i)}(\mathbf{a})\right\}, \quad k_- := \max\left\{1 \le k \le i \,\middle|\, \varepsilon_i(\mathbf{a}) = A_k^{(i)}(\mathbf{a})\right\},$$

$$l_+ := \max\left\{i \le l \le n \,\middle|\, \varepsilon_i^*(\mathbf{a}) = A_l^{*(i)}(\mathbf{a})\right\}, \; l_- := \min\left\{i \le l \le n \,\middle|\, \varepsilon_i^*(\mathbf{a}) = A_l^{*(i)}(\mathbf{a})\right\}$$

とおく．$\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^N$ に対し，新たに４つの非負整数の組 $\mathbf{a}^{(p,\natural)} = \left(a_{k,l}^{(p,\natural)}\right) \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^N$ $(\natural = \pm, p = 1, 2)$ を次で定義する：

$$a_{k,l}^{(1,\pm)} = \begin{cases} a_{k_\pm,i} \pm 1 & (k = k_\pm, l = i), \\ a_{k_\pm,i+1} \mp 1 & (k = k_\pm, l = i+1), \\ a_{k,l} & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

$$a_{k,l}^{(2,\pm)} = \begin{cases} a_{i,l_\pm+1} \mp 1 & (k = i,\ l = l_\pm + 1), \\ a_{i+1,l_\pm+1} \pm 1 & (k = i+1,\ l = l_\pm + 1), \\ a_{k,l} & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

以上の記法の下に，

$$\widetilde{e}_i\mathbf{a} := \begin{cases} 0 & (\text{if } \varepsilon_i(\mathbf{a}) = 0), \\ \mathbf{a}^{(1,+)} & (\text{if } \varepsilon_i(\mathbf{a}) > 0), \end{cases} \quad \widetilde{f}_i\mathbf{a} := \mathbf{a}^{(1,+)},$$

$$\widetilde{e}_i^*\mathbf{a} := \begin{cases} 0 & (\text{if } \varepsilon_i^*(\mathbf{a}) = 0), \\ \mathbf{a}^{(2,+)} & (\text{if } \varepsilon_i^*(\mathbf{a}) > 0), \end{cases} \quad \widetilde{f}_i^*\mathbf{a} := \mathbf{a}^{(2,-)}$$

と定める．

一応定義は書いたものの，これでは何が何やらわからない．もう少し噛み砕いて説明しよう．そのために $\mathbf{a}$ の成分を行列のように並べて，

$$\mathbf{a} = \begin{matrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & a_{1,n} & a_{1,n+1} \\ & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ & & a_{3,4} & \cdots & a_{3,n} & a_{3,n+1} \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & a_{n-1,n} & a_{n-1,n+1} \\ & & & & & a_{n,n+1} \end{matrix}$$

と書くことにする．

まず $\widetilde{e}_i$ の作用というのは，基本的に

- $i+1$ 列目[25]に並んでいる数字のどれかから 1 を引いて，i 列目の同じ行にある数字に 1 を足す．
- ただし i 列目の同じ行に数字がないときは，$i+1$ 列目の数字から 1 を引くだけ．

という操作である．問題は

「$i+1$ 列目に並ぶ i 個の数のうち，何行目から 1 を引くか？」

ということだが，これを指定しているのが k_+ であり，それは

「$\varepsilon_i(\mathbf{a}) = A_k^{(i)}$ を満たす $1 \le k \le i$ の中で，一番小さいもの」

である．

$\widetilde{f}_i$ の作用は，

- $i+1$ 列目に並んでいる数字のどれかに 1 を足して，i 列目の同じ行にある数字から 1 を引く．
- ただし i 列目の同じ行に数字がないときは，$i+1$ 列目の数字から 1 を足すだけ．

という操作で，

「$i+1$ 列目に並ぶ i 個の数のうち，何行目に 1 を足すか？」

という情報が k_-，すなわち

「$\varepsilon_i(\mathbf{a}) = A_k^{(i)}$ を満たす $1 \le k \le i$ の中で，一番大きいもの」

で与えられる．

$\widetilde{e}_i^*, \widetilde{f}_i^*$ については詳しくは書かないが，ほぼ「行と列の役割を入れ替えたもの」になっている．

さて，以上のように $\mathcal{B}_{\Omega_0} \cong \mathbb{Z}_{\ge 0}^N$ 上の写像たちを定義するとき，次が成り立つ．

Proposition 22 ([12],[18],[17]). (1) $\left(\mathcal{B}_{\Omega_0}; \mathrm{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \widetilde{e}_i, \widetilde{f}_i\right)$ および $\left(\mathcal{B}_{\Omega_0}; \mathrm{wt}, \varepsilon_i^*, \varphi_i^*, \widetilde{e}_i^*, \widetilde{f}_i^*\right)$ はともに *crystal* である．
(2) 集合としての全単射 $\Psi_{\Omega_0} : \mathbb{B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_{\Omega_0}$ は，*crystal* としての同型

$$\Psi_{\Omega_0} : \left(\mathbb{B}; \mathrm{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \widetilde{e}_i, \widetilde{f}_i\right) \xrightarrow{\sim} \left(\mathcal{B}_{\Omega_0}; \mathrm{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \widetilde{e}_i, \widetilde{f}_i\right),$$

$$\Psi_{\Omega_0} : \left(\mathbb{B}; \mathrm{wt}, \varepsilon_i^*, \varphi_i^*, \widetilde{e}_i^*, \widetilde{f}_i^*\right) \xrightarrow{\sim} \left(\mathcal{B}_{\Omega_0}; \mathrm{wt}, \varepsilon_i^*, \varphi_i^*, \widetilde{e}_i^*, \widetilde{f}_i^*\right)$$

を同時に与える．

5.3. A 型の場合（その２）．

前節で一般的な公式を書き下してみたものの，ややこし過ぎてわかりづらい．そこで話を $n=3$ に限定して，もう一度全てを書き直してみよう[26]．

この場合，$N = 3(3+1)/2 = 6$ だから $\mathbf{a}$ は 6 個の非負整数の組である．これらを行列のように並べて表示すると見やすい．

$$\mathbf{a} = \begin{matrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ & a_{2,3} & a_{2,4} \\ & & a_{3,4} \end{matrix}$$

---

[25] これは成分の添字でカウントしていることに注意．例えば $a_{1,2}$ は「２列目」と思っている．

[26] もちろん $n = 1, 2$ の方がより簡単であるのだが，単純になり過ぎてかえって話が見えづらい．

定義にしたがって計算すると

$$\mathrm{wt}(\mathbf{a}) = (-d_1, -d_2, -d_3),$$

$$d_1 = a_{1,2} + a_{1,3} + a_{1,4}, \quad d_2 = a_{1,3} + a_{1,4} + a_{2,3} + a_{2,4}, \quad d_3 = a_{1,4} + a_{2,4} + a_{3,4}.$$

念のため $\mathbf{a}$ の意味を復習しておこう．5.1 節によれば，$\mathbf{a}$ は $\mathbb{C}[\Gamma_0]$-module = Γ_0 の表現の直既約成分の multiplicity を表すデータだった（ただし $\Gamma_0 := (I, \Omega_0)$）．具体的には，以下のような Γ_0 の表現を考えていることになる．

$$\mathbf{V}(\mathbf{d}) = \begin{array}{c} (\ \mathbb{C} \ \leftarrow \{0\} \leftarrow \{0\})^{\oplus a_{1,2}} \\ \oplus \\ (\ \mathbb{C} \ \leftarrow \ \mathbb{C} \ \leftarrow \{0\})^{\oplus a_{1,3}} \\ \oplus \\ (\ \mathbb{C} \ \leftarrow \ \mathbb{C} \ \leftarrow \ \mathbb{C}\ )^{\oplus a_{1,4}} \\ \oplus \\ (\{0\} \leftarrow \ \mathbb{C} \ \leftarrow \{0\})^{\oplus a_{2,3}} \\ \oplus \\ (\{0\} \leftarrow \ \mathbb{C} \ \leftarrow \ \mathbb{C}\ )^{\oplus a_{2,4}} \\ \oplus \\ (\{0\} \leftarrow \{0\} \leftarrow \ \mathbb{C}\ )^{\oplus a_{3,4}} \end{array} \qquad (\text{ただし } \mathbf{d} := (d_1, d_2, d_3) = -\mathrm{wt}(\mathbf{a}))$$

さらに，表現 $\mathbf{V}(\mathbf{d})$ の同値類が $E_{\Omega_0}(\mathbf{d})$ の $G(\mathbf{d})$-orbit $\mathcal{O}_{\mathbf{a},\Omega_0}$ であり，対応する既約成分が $\Lambda_{\mathbf{a}} := \Psi_{\Omega_0}^{-1}(\mathbf{a}) = \overline{T^*_{\mathcal{O}_{\mathbf{a},\Omega_0}} E_{\Omega_0}(\mathbf{d})}$ なのであった．

話を元に戻そう．定義通りに計算すると

$$\begin{aligned}
&A_1^{(1)} = a_{1,2}, \\
&A_1^{(2)} = a_{1,3}, \quad A_2^{(2)} = a_{1,3} + (a_{2,3} - a_{1,2}), \\
&A_1^{(3)} = a_{1,4}, \quad A_2^{(3)} = a_{1,4} + (a_{2,4} - a_{1,3}), \quad A_3^{(3)} = a_{1,4} + (a_{2,4} - a_{1,3}) + (a_{3,4} - a_{2,3}), \\
&A_3^{*(1)} = a_{1,4}, \quad A_2^{*(1)} = a_{1,4} + (a_{1,3} - a_{2,4}), \quad A_1^{*(1)} = a_{1,4} + (a_{1,3} - a_{2,4}) + (a_{1,2} - a_{2,3}), \\
&A_3^{*(2)} = a_{2,4}, \quad A_2^{*(2)} = a_{2,4} + (a_{2,3} - a_{3,4}), \\
&A_3^{*(3)} = a_{3,4}.
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1(\mathbf{a}) &= a_{1,2}, \\
\varepsilon_2(\mathbf{a}) &= \max\{a_{1,3},\ a_{1,3} + (a_{2,3} - a_{1,2})\}, \\
\varepsilon_3(\mathbf{a}) &= \max\{a_{1,4},\ a_{1,4} + (a_{2,4} - a_{1,3}),\ a_{1,4} + (a_{2,4} - a_{1,3}) + (a_{3,4} - a_{2,3})\}, \\
\varepsilon_1^*(\mathbf{a}) &= \max\{a_{1,4},\ a_{1,4} + (a_{1,3} - a_{2,4}),\ a_{1,4} + (a_{1,3} - a_{2,4}) + (a_{1,2} - a_{2,3})\}, \\
\varepsilon_2^*(\mathbf{a}) &= \max\{a_{2,4},\ a_{2,4} + (a_{2,3} - a_{3,4})\}, \\
\varepsilon_3^*(\mathbf{a}) &= a_{3,4}.
\end{aligned}$$

となる．この計算結果は，

$\Lambda_{\mathbf{a}}$ の中から generic に $P(\Gamma_0)$-module を取ったとき，
その i-th top，i-th socle の次元が上の式で与えられる

ということを意味している．

Kashiwara operators（$\widetilde{e}_i$,$\widetilde{f}_i$,$\widetilde{e}_i^*$,$\widetilde{f}_i^*$ たちを総称してこう呼ぶ）の作用については，例を使って説明したい．全部書くと大変なので，$\widetilde{e}_3$ と $\widetilde{f}_3$ の場合だけ詳しく書く．

Example 23. $\mathbf{a}$ として次のものを考える．

$$\mathbf{a} = \begin{array}{ccc} 4 & 1 & 1 \\ & 2 & 3 \\ & & 2 \end{array}$$

<u>○ $\widetilde{e}_3$ の作用</u>

今考えたいのは $i = 3$ の場合なので，

$$A_1^{(3)} = 1, \quad A_2^{(3)} = 1 + (3-1) = 2, \quad A_3^{(3)} = 1 + (3-1) + (2-2) = 2.$$

したがって，

$$\varepsilon_3(\mathbf{a}) = \max\{1, 2, 2\} = 2.$$

したがって $\varepsilon_3(\mathbf{a}) = A_k^{(3)}$ となる k は 2 または 3 である．k_+ の定義は「このような k のうち，一番小さいもの」だったので，$k_+ = 2$．ということは『2 行目で 1 が右から左に移動する』ことになる．

$$\begin{array}{ccc} 4 & 1 & 1 \\ & 2 & 3 \\ & & 2 \end{array} \quad \overset{\widetilde{e}_3}{\longmapsto} \quad \begin{array}{ccc} 4 & 1 & 1 \\ & 3 & 2 \\ & & 2 \end{array}$$

<u>○ $\widetilde{f}_3$ の作用</u>

前述の通り $\varepsilon_3(\mathbf{a}) = A_k^{(3)}$ となる k は 2 または 3 であるが，k_- の定義は「このような k のうち，一番大きいもの」だったので，$k_- = 3$．よって今度は『3 行目で 1 が左から右に移動する』ことになる．しかし $a_{3,3}$ という成分はないので，$a_{3,4}$ に 1 が足されるのみとなる．

$$\begin{array}{ccc} 4 & 1 & 1 \\ & 2 & 3 \\ & & 2 \end{array} \quad \overset{\widetilde{f}_3}{\longmapsto} \quad \begin{array}{ccc} 4 & 1 & 1 \\ & 2 & 3 \\ & & 3 \end{array}$$

$\widetilde{e}_i^*$,$\widetilde{f}_i^*$ については省略するが，一番面倒な $\widetilde{e}_1^*$ と $\widetilde{f}_1^*$ の場合の答だけ書いておくので，興味のある方は自分でチェックされたい．

$$\begin{array}{ccc} 4 & 1 & 1 \\ & 2 & 3 \\ & & 2 \end{array} \quad \overset{\widetilde{e}_1^*}{\longmapsto} \quad \begin{array}{ccc} 4 & 1 & 0 \\ & 2 & 4 \\ & & 3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} 4 & 1 & 1 \\ & 2 & 3 \\ & & 2 \end{array} \quad \overset{\widetilde{f}_1^*}{\longmapsto} \quad \begin{array}{ccc} 5 & 1 & 1 \\ & 2 & 3 \\ & & 3 \end{array}$$

$n = 3$ の場合を見れば，一般の場合も大体想像がつくことと思う．

5.4. A 型の場合（その３）．

これまでの話は orientation として，

$$\Omega_0 : \begin{array}{ccccccccccccc} \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ & \leftarrow & \circ \\ 1 & & 2 & & 3 & & & & n-2 & & n-1 & & n \end{array}$$

という特別なものを選んだ場合の話であった．当然のことながら,『一般の Ω のときはどうなるのか？』という問題が頭に浮かぶことと思う．すなわち,

Q 1：与えられた Ω に対し，$\left(\mathcal{B}_\Omega; \mathrm{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \widetilde{e}_i, \widetilde{f}_i\right)$ および $\left(\mathcal{B}_\Omega; \mathrm{wt}, \varepsilon_i^*, \varphi_i^*, \widetilde{e}_i^*, \widetilde{f}_i^*\right)$ の構造を具体的に記述せよ．

集合としては $\mathcal{B}_\Omega \cong \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ であるので，上の問いは

Q 1'：N 個の非負整数の組 $\mathbf{a}_\Omega = (a_{\beta,\Omega})_{\beta \in \Delta^+} \in \mathcal{B}_\Omega$ に対し，各写像を具体的に記述せよ

ということに他ならない．

この問いに対する直接の解答は知られていないように思うが，"ある種の解答" は得られている．

言葉を準備しよう．与えられた２つの orientation Ω, Ω' に対し，crystal の同型

$$R_\Omega^{\Omega'} := \Psi_{\Omega'} \circ \Psi_\Omega^{-1} : \mathcal{B}_\Omega \xrightarrow{\sim} \mathbb{B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_{\Omega'}$$

を $\mathcal{B}_\Omega$ から $\mathcal{B}_{\Omega'}$ への transition map と呼ぶ．"crystal の同型" というと何やら仰々しいが，これまでの話を組み合わせればいいだけなので，やっていることは決して難しいことではない．この写像の多元環の表現論的意味は，

(i) 非負整数の組 $\mathbf{a}_\Omega$ を考え，それを直既約成分の multiplicity として持つ $\mathbb{C}[\Gamma]$-module の同型類を考える；
(ii) 射影 $\pi_{\Lambda(\mathbf{d}),\Omega}$ の逆像をとり，上の同型類を $P(\Gamma)$-module に持ち上げる；
(iii) さらにその closure をとる；
(iv) 上記の closure の中から generic に点をとり，$\tau \in \overline{\Omega'}$ の作用を無視することで，これを $\mathbb{C}[\Gamma']$-module と思う．ここに $\Gamma' := (I, \Omega')$；
(v) 得られた $\mathbb{C}[\Gamma']$-module を直既約分解して multiplicity のデータを取り出す；

という操作をしているだけである．

Remark 24. とはいえ，(iii) の「closure をとる」と (iv) の「generic に点をとる」という操作は，多元環の表現論ではあまり用いない方法なのでわかりにくいかもしれない．話をややこしくしている１つの原因は次の点にある．与えられた $\mathbf{a}_\Omega$ に対し，$\mathbf{b}_{\Omega'} := R_\Omega^{\Omega'}(\mathbf{a}_\Omega)$ としよう．このとき，

$$\overline{\pi_{\Lambda(\mathbf{d}),\Omega}^{-1}(\mathcal{O}_{\mathbf{a},\Omega})} = \overline{\pi_{\Lambda(\mathbf{d}),\Omega'}^{-1}(\mathcal{O}_{\mathbf{b},\Omega'})} \quad \left(\Leftrightarrow\ \overline{T^*_{\mathcal{O}_{\mathbf{a},\Omega}} E_\Omega(\mathbf{d})} = \overline{T^*_{\mathcal{O}_{\mathbf{b},\Omega'}} E_{\Omega'}(\mathbf{d})}\right)$$

であったとしても，一般には

$$\pi_{\Lambda(\mathbf{d}),\Omega}^{-1}(\mathcal{O}_{\mathbf{a},\Omega}) \neq \pi_{\Lambda(\mathbf{d}),\Omega'}^{-1}(\mathcal{O}_{\mathbf{b},\Omega'})$$

である．したがって「closure をとって，さらにその中から generic に点を選ぶ」という操作は，どうしても行わざるを得ない．

特に重要なのは，$R_{\Omega_0}^\Omega$ と $R_\Omega^{\Omega_0} = \left(R_{\Omega_0}^\Omega\right)^{-1}$ である．特殊な orientation Ω_0 に関しては，crystal structure $\left(\mathcal{B}_{\Omega_0}; \mathrm{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \widetilde{e}_i, \widetilde{f}_i\right)$ が完全にわかっているので，もし $R_{\Omega_0}^\Omega$ と $R_\Omega^{\Omega_0}$ が具

体的に書ければ，$\left(\mathcal{B}_\Omega; \mathrm{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \widetilde{e}_i, \widetilde{f}_i\right)$ を完全に記述することができる[27]．$*$付きの crystal structure についても同様である．したがって，話は

Q 2：与えられた Ω に対し，$R^{\Omega}_{\Omega_0}$ と $R^{\Omega_0}_{\Omega}$ を具体的に記述せよ

という問題に還元される．

A 型の場合，この問題は完全に解けている ([3],[17]) が，答は非常にややこしいので具体的な公式を述べることは止めておく．詳しくは原論文を参照されたい．

5.5. Open problems.

本節では，今回の話に関連する未解決問題をいくつか紹介しよう．

Problem 1：D 型，E 型での $\mathbb{Z}^N_{\geq 0}$ の crystal structure の決定

すでに述べたように，$\mathbb{B} = \sqcup_{\mathbf{d}} \mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})$ から $\mathbb{Z}^N_{\geq 0}$（ただし $N = |\Delta^+|$）への全単射

$$\Psi : \mathbb{B} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^N_{\geq 0}$$

は『$\Gamma = (I, \Omega)$ が Dynkin quiver』との仮定のもとに存在する．すなわち，A 型でなくとも D 型，E 型でも $\mathbb{B}$ の持つ crystal structure を Ψ_Ω を通じて $\mathbb{Z}^N_{\geq 0}$ に移植することが出来るはずである．種々のデータは完全に与えられているので「あとは計算すればいいという状態」と言えなくもないが，本当に実行するのはなかなか大変である．実際，A 型以外の場合では，$\mathbb{Z}^N_{\geq 0}$ 上の crystal structure を具体的に書き下した結果は知られていないと思う．

Problem 2：Tame case：

同型 $\mathbb{B} \cong B(\infty)$ は，任意の loop がない quiver Γ に対して成り立つ．Dynkin case の次に興味があるのは，tame の場合，すなわち Γ が extended Dynkin の場合である．Lie theory side では，これは "affine case" と呼ばれる．

話をこの場合に限定すると，$B(\infty)$ をパラメトライズする方法が数多く知られているが，各種パラメトリゼーションと，$\Lambda(\mathbf{d})$ の既約成分との対応を明示的に与える公式は殆ど知られていない．

Problem 3：Rigid crystals

これまで

『variety of nilpotent representations $\Lambda(\mathbf{d})$ の $G(\mathbf{d})$-軌道
（= dimension vector $\mathbf{d}$ の nilpotent $P(\Gamma)$-module の同型類）
を考える替わりに，
$\Lambda(\mathbf{d})$ の代数多様体としての既約成分全体 $\mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})$ を考える』

[27] 実際，例えば $\widetilde{e}_i$ の作用に関しては，

$$\widetilde{e}_i \mathbf{a}_\Omega = \left(R^{\Omega}_{\Omega_0} \circ \widetilde{e}_i \circ R^{\Omega_0}_{\Omega}\right)(\mathbf{a}_\Omega) \qquad (\mathbf{a}_\Omega \in \mathcal{B}_\Omega)$$

が成り立つ．したがって左辺を知りたければ右辺がわかればいいわけだが，左辺に現れる $\widetilde{e}_i$ は「$\mathcal{B}_{\Omega_0}$ の $\widetilde{e}_i$」なので，5.2 節で explicit formula を知っている．ゆえに $R^{\Omega}_{\Omega_0}$ と $R^{\Omega_0}_{\Omega}$ の具体形がわかれば，全てを具体的に計算出来る．

という立場で議論を進めてきた．しかしながら，やはり本来の問題意識である “$\Lambda(\mathbf{d})$ の $G(\mathbf{d})$-軌道そのもの” に興味があるのは，言うまでもない．このことに注意して，次の概念を導入しよう．

Definition 25. $\Lambda \in \mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})$ が稠密な $G(\mathbf{d})$-軌道 $\mathcal{O}$ を持つとき，Λ は rigid であるという．

$\Lambda \in \mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})$ が rigid であれば，Λ は $P(\Gamma)$-module の同型類と対応していると言って良いだろう．多元環論的な特徴付けとして，次が知られている．

Proposition 26 ([5])**.** *$B \in \Lambda(\mathbf{d})$ とし，対応する $P(\Gamma)$-module を V_B と書く．次は同値．*

(a) $\mathrm{Ext}^1_{P(\Gamma)}(V_B, V_B) = 0$.

(b) B *を通る* $\Lambda(\mathbf{d})$ *の* $G(\mathbf{d})$*-軌道を* $\mathcal{O}$ *とするとき，*$\overline{\mathcal{O}} \in \mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})$*．すなわち，*$\Lambda := \overline{\mathcal{O}}$ *は rigid.*

多元環の専門家の方々には，(a) の条件の方が “rigid” という感じが伝わるかも知れない．また，次も知られている．

- A_n $(1 \leq n \leq 4)$ の場合には，任意の $\Lambda \in \mathbb{B} = \sqcup_{\mathbf{d}} \mathrm{Irr}\Lambda(\mathbf{d})$ は rigid である．
- それ以外の場合には，rigid でない既約成分が必ず存在する．

そこで次の問題を考えよう．

Q3：rigid な既約成分を全てリストアップせよ．

これは問題としては非常に面白いと思う．ただし，話を A_n 型に限定したとしても，現状では難しすぎる．$\mathbf{d}$ が小さいと既約成分は必ず rigid になる．$n \leq 4$ だと全ての既約成分は rigid であり，この状況が最後まで続く．他方，$n \geq 5$ だと途中に rigid でないものが現れ始め，$\mathbf{d}$ が大きくなるにつれて，ほとんどの既約成分は rigid でなくなってしまう．

以下に知られている rigid でない例の中で，（筆者が知る限り）最も次元の小さいもの（A_5 型の場合）を紹介する．この問題は，多元環 side，Lie theory side 双方で，それぞれの重要な問題に関係しているが，現状ではどうしたらいいか，全くわからない．具体例の計算から情報を集めるだけでも意味があると思うので，興味のある方は実際に手を動かしてみるといいだろう[28]．

Example 27. A_5 型の場合で，

$$\Omega_0 : \quad \begin{tikzcd} \underset{1}{\circ} & \underset{2}{\circ} \arrow[l, "\tau_1"'] & \underset{3}{\circ} \arrow[l, "\tau_2"'] & \underset{4}{\circ} \arrow[l, "\tau_3"'] & \underset{5}{\circ} \arrow[l, "\tau_4"'] \end{tikzcd}$$

なる orientation をとる．また，$\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{\Omega_0}$ として，次のものを考える：

$$\mathbf{a} = \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{array}.$$

このとき，対応する既約成分 $\Lambda_{\mathbf{a}}$ は rigid ではない．以下，このことを詳しく見てみよう．

---

[28] しかも『１つ１つの計算は，単なる行列の計算である』というところがミソ．

$\mathbf{a}$ に対応する $\Gamma_0 = (I, \Omega_0)$ の表現は,

$$\mathbf{V}_{\mathbf{a}}(\mathbf{d}_0) = \begin{array}{c} (\ \mathbb{C} \leftarrow \mathbb{C} \leftarrow \{0\} \leftarrow \{0\} \leftarrow \{0\}) \\ \oplus \\ (\{0\} \leftarrow \mathbb{C} \leftarrow \mathbb{C} \leftarrow \mathbb{C} \leftarrow \{0\}) \\ \oplus \\ (\{0\} \leftarrow \{0\} \leftarrow \mathbb{C} \leftarrow \{0\} \leftarrow \{0\}) \\ \oplus \\ (\{0\} \leftarrow \{0\} \leftarrow \{0\} \leftarrow \mathbb{C} \leftarrow \mathbb{C}\ ) \end{array} \qquad (\text{ただし } \mathbf{d}_0 := (1,2,2,2,1) = -\mathrm{wt}(\mathbf{a})).$$

行列を使って書けば,(基底は適宜選ぶこととして)$B_{\mathbf{a}} = (B_{\tau_1}, B_{\tau_2}, B_{\tau_3}, B_{\tau_4})$ として,

$$B_{\tau_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{\tau_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{\tau_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{\tau_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.5.1}$$

となる.$B_{\mathbf{a}}$ を通る $E_{\Omega_0}(\mathbf{d}_0)$ の $G(\mathbf{d}_0)$-orbit を $\mathcal{O}_{\mathbf{a}.\Omega_0}$ と書く.このとき,

$$\Lambda_{\mathbf{a}} = \overline{\pi^{-1}_{\Lambda(\mathbf{d}_0),\Omega_0}(\mathcal{O}_{\mathbf{a},\Omega_0})} = \overline{G(\mathbf{d}_0) \cdot \pi^{-1}_{\Lambda(\mathbf{d}_0),\Omega_0}(B_{\mathbf{a}})}$$

に注意すると,

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathbf{a}}\text{が rigid.} \quad &\Leftrightarrow \quad G(\mathbf{d}_0) \cdot \pi^{-1}_{\Lambda(\mathbf{d}_0),\Omega_0}(B_{\mathbf{a}}) \text{ が dense } G(\mathbf{d}_0)\text{-orbit を持つ.} \\ &\Leftrightarrow \quad \pi^{-1}_{\Lambda(\mathbf{d}_0),\Omega_0}(B_{\mathbf{a}}) \text{ が dense } G(\mathbf{d}_0)_{B_{\mathbf{a}}}\text{-orbit を持つ.} \end{aligned}$$

ただし

$$G(\mathbf{d}_0)_{B_{\mathbf{a}}} := \{ g \in G(\mathbf{d}_0) \mid g \cdot B_{\mathbf{a}} = B_{\mathbf{a}} \} \qquad (B_{\mathbf{a}} \text{ の stabilizer})$$

である.$\pi^{-1}_{\Lambda(\mathbf{d}_0),\Omega_0}(B_{\mathbf{a}})$ と $G(\mathbf{d}_0)_{B_{\mathbf{a}}}$ は簡単に求めることが出来る.実際,

$$\pi^{-1}_{\Lambda(\mathbf{d}_0),\Omega_0}(B_{\mathbf{a}}) = \left\{ (B_{\overline{\tau}_1}, B_{\overline{\tau}_2}, B_{\overline{\tau}_3}, B_{\overline{\tau}_4}) \;\middle|\; \begin{array}{c} B_{\tau_1}B_{\overline{\tau}_1} = 0,\ B_{\overline{\tau}_1}B_{\tau_1} = B_{\tau_2}B_{\overline{\tau}_2}, \\ B_{\overline{\tau}_2}B_{\tau_2} = B_{\tau_3}B_{\overline{\tau}_3},\ B_{\overline{\tau}_3}B_{\tau_3} = B_{\tau_4}B_{\overline{\tau}_4}, \\ B_{\overline{\tau}_4}B_{\tau_4} = 0 \end{array} \right\}.$$

ここに,$B_{\overline{\tau}_i}$ $(i = 1,2,3,4)$ は

$$\mathbb{C} \xleftarrow{B_{\overline{\tau}_1}} \mathbb{C}^2 \xleftarrow{B_{\overline{\tau}_2}} \mathbb{C}^2 \xleftarrow{B_{\overline{\tau}_3}} \mathbb{C}^2 \xleftarrow{B_{\overline{\tau}_4}} \mathbb{C}$$

なる行列で,右辺は preprojective relations を書き下したものに他ならない.ここに (5.5.1) を代入し,連立方程式を解けば,

$$\pi^{-1}_{\Lambda(\mathbf{d}_0),\Omega_0}(B_{\mathbf{a}}) = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u & 0 \end{pmatrix} \right) \;\middle|\; s,t,u,v \in \mathbb{C} \right\} \cong \mathbb{C}^4$$

となる.また,stabilizer も簡単な計算から,

$$\begin{aligned} G(\mathbf{d}_0)_{B_{\mathbf{a}}} &= \left\{ g = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5) \in GL_1(\mathbb{C}) \times (GL_2(\mathbb{C}))^3 \times GL_1(\mathbb{C}) \;\middle|\; g \cdot B_{\mathbf{a}} = B_{\mathbf{a}} \right\} \\ &= \left\{ g = \left(a, \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ e & f \end{pmatrix}, f \right) \;\middle|\; a,c,d,f \in \mathbb{C}^{\times},\ b,e \in \mathbb{C} \right\} \end{aligned}$$

となることがわかる．作用の具体形を書き下してみると，

$$\left(\begin{pmatrix}0\\ s\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}s & 0\\ t & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ u & v\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}u & 0\end{pmatrix}\right)$$
$$\xmapsto{g} \left(\begin{pmatrix}0\\ a^{-1}cs\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a^{-1}cs & 0\\ a^{-1}dt & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ c^{-1}fu & d^{-1}fv\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c^{-1}fu & 0\end{pmatrix}\right)$$

となり，b と e の部分は自明に作用していることがわかる．すなわち，実際に "効く" のは，a, c, d, f の部分のみで，これは $\left(\mathbb{C}^{\times}\right)^4$ に同型．したがって考えるべき状況は，

$$\left(\mathbb{C}^{\times}\right)^4 \curvearrowright \mathbb{C}^4.$$

簡単のため s, t, u, v は generic （どれも 0 ではない）として，比 $\dfrac{su}{tv}$ を考えよう．このとき，

$$\frac{su}{tv} \xmapsto{g} \frac{a^{-1}cs \cdot c^{-1}fu}{a^{-1}dt \cdot d^{-1}fv} = \frac{su}{tv}.$$

すなわち，群 $G(\mathbf{d}_0)_{B_\mathbf{a}}$ の $\pi^{-1}_{\Lambda(\mathbf{d}_0),\Omega_0}(B_\mathbf{a}) \cong \mathbb{C}^4$ への作用は，$\mathbb{C}^4$ の 3 次元部分多様体

$$\frac{su}{tv} = const$$

を不変に保ってしまう．したがって，orbit の次元は 3 を超えることが出来ず，dense orbit は存在しない[29]．

それ以外だと，例えば，

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 2 & 0 \\ & & 2 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 2 \\ & & & & 0 \end{array}, \qquad \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{array}$$

などに対応する既約成分も rigid ではない．左の例は，Example 27 の $\mathbf{a}$ の各成分を全て 2 倍したものになっている．その意味でこれを $2\mathbf{a}$ と書くことにしよう．これを一般化して，成分を k 倍したものを $k\mathbf{a}$ と書くことにする．この記法の下に，一般に，

$$\Lambda_\mathbf{a} \text{ が non-rigid} \quad \Rightarrow \quad \Lambda_{k\mathbf{a}}\ (k \in \mathbb{Z}_{>0}) \text{ も non-rigid}$$

ということは比較的容易にわかる．しかし，この系列（k 倍していく系列）の一番最初にあるもの（仮に primitive な rigid component とでも呼ぼう）を探し出すのはなかなか難しく，一般的な解答は与えられていない．

References

[1] I. Assem, D. Simson and A. Skowroński, *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1. Techniques of representation theory*, London. Math. Soc. Student Texts **65** (2006), Cambridge.

[2] P. Baumann and J. Kamnitzer *Preprojective algebras and MV polytopes*, arXiv:1009.2469.

[3] Berenstein, Fomin and A. Zelevinsky, *Parametrizations of canonical bases and totally positive matrices*, Adv. Math. **122** (1996), 49-149.

[4] C. Geiss, B. Leclerc and J. Schöler, *Semicanonical bases and preprojective algebras*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **38** (2005), no. 2, 193–253.

[29] この場合，$\pi^{-1}_{\Lambda(\mathbf{d}_0),\Omega_0}(B_\mathbf{a}) \cong \mathbb{C}^4$ は無限個の orbit の 1 パラメータファミリーに分かれる．

[5] ———, *Rigid modules over preprojective algebras*, Invent. Math. **165** (2006), no. 3, 589–632.
[6] ———, *Semicanonical bases and preprojective algebras. II. A multiplication formula*, Compos. Math. **143** (2007), no. 5, 1313–1334.
[7] ———, *Partial flag varieties and preprojective algebras*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **58** (2008), no. 3, 825–876.
[8] G. Lusztig, *Canonical basis arising form quantum universal enveloping algebras*, J. AMS **3** (1991), 9–36.
[9] ———, *Quivers, perverse sheaves, and quantized enveloping algebras*, J. AMS **4(2)** (1991), 365–421.
[10] M. Kashiwara and Y. Saito, *Geometric construction of crystal bases*, Duke Math J. **89** (1997), 9–36.
[11] Y. Kimura, *Quantum unipotent subgroup and dual canonical basis*, arXiv:1010.4242.
[12] M. Reineke, *On the coloured graph structure of Lusztig 's canonical basis*, Math. Ann. **307** (1997), 705–723.
[13] C. M. Ringel, *Tame algebras and integral quadratic forms*, Lecture Note in Math. **1099** (1980), Springer.
[14] ———, *Hall algebras and quantum groups*, Invent. Math. **101** (1990), 583–591.
[15] Y. Saito, *PBW bases of quantized universal enveloping algebras*, Publ. RIMS. **30(2)** (1994), 209–232.
[16] ———, 箙と量子群, 「環論とその周辺」報告集 (2006), 63–117.
[17] ———, *Mirković-Vilonen polytopes and a quiver construction of crystal basis in type A*, IMRN (2011), doi:10.1093/imrn/rnr173.
[18] A. Savage, *Geometric and combinatorial realization of crystal graphs*, Alg. Rep. Theory **9** (2006), 161–199.

Graduate School of Mathematical Sciences
University of Tokyo
Meguro-ku, Tokyo 153-8914 JAPAN
E-mail address: yosihisa@ms.u-tokyo.ac.jp