LEFT DIFFERENTIAL OPERATORS OF MODULES OVER RINGS

HIROAKI KOMATSU

ABSTRACT. We define left differential operators of modules which several algebras act and study their fundamental properties. We also characterize separable algebras by making use of our left differential operators.

1. 序

Osborn [7] および Heyneman-Sweedler [2] に始まる可換多元環の微分演算子の理論は, Sweedler [8] によって非可換多元環へ拡張されたのだが, それは片側加群に値をとる片側 derivation の概念を拡張したものであり, 両側加群に値をとる derivation には遠い概念であった. とは言っても, 極めて特殊な derivation とならば関係付けられることが [6] に示されている. 関連の研究が [3], [4], [5] にある.

本論文では, derivation を包含するような微分演算子を導入する. また, 微分演算子を用いた分離多元環の特徴付けを考察する.

本論文を通じて, K は常に単位元を有する可換環を表す. また, §4 を除いて, 多元環はすべて単位元を有し, 多元環上の加群はすべて単位元が恒等的に作用するものとする. 多元環 R の双対多元環を R° で表す.

2. 左微分演算子

$\mathcal{S} = \{R_1, \ldots, R_n\}$ を K 多元環の有限族とする. K 加群 M が, 各 $i = 1, \ldots, n$ について左 R_i 加群構造をもち, $i \neq j$ のとき R_i と R_j の作用が可換ならば, M を**左 $\mathcal{S}$ 加群**と呼ぶ. 左 $\mathcal{S}$ 加群の間の写像 f がどの $i = 1, \ldots, n$ についても R_i 準同型写像であるとき, f を **$\mathcal{S}$ 準同型写像**と呼ぶ. 右 $\mathcal{S}$ 加群や両側 $\mathcal{S}$ 加群についても同様に定義する. $\mathcal{S}$ 上の右加群 M と左加群 N に対して, $M \times N$ から K 加群への双線形写像 φ で $\varphi(ua, v) = \varphi(u, av)$ $(u \in M, v \in N, a \in R_i, i = 1, \ldots, n)$ を満たすもののすべてを表現する K 加群を $M \otimes_{\mathcal{S}} N$ で表し, $\mathcal{S}$ 上の**テンソル積**と呼ぶ.

これらの概念は新しいものではない. $R = R_1 \otimes_K \cdots \otimes_K R_n$ とおけば, 左 $\mathcal{S}$ 加群は左 R 加群に他ならず, $\mathcal{S}$ 準同型写像は R 準同型写像に他ならず, $\mathcal{S}$ 上のテンソル積は R 上のテンソル積に他ならない. どうして $\mathcal{S}$ 加群を持ち出したのかと言うと, §4 で扱う単位元が存在しない多元環でも利用可能だからです.

M, N を左 $\mathcal{S}$ 加群とする. $f \in \mathrm{Hom}_K(M, N)$ と $a \in R_i$ に対して $\{f, a\} \in \mathrm{Hom}_K(M, N)$ を次のように定める.

$$\{f, a\}(u) = f(au) - af(u) \quad (u \in M)$$

The detailed version of this paper will be submitted for publication elsewhere.

また，$F \subseteq \mathrm{Hom}_K(M,N)$ と $A \subseteq R_i$ に対し，$\bigl\{\{f,a\} \mid f \in F,\ a \in A\bigr\}$ で生成された $\mathrm{Hom}_K(M,N)$ の K 部分加群を $\{F,A\}$ で表し，整数 $p \geq 0$ に対する $\{F,A\}_p$ を次のように帰納的に定める．

$$\{F,A\}_0 = F, \quad \{F,A\}_{p+1} = \{\{F,A\}_p,\ A\}$$

Definition 1. $\mathcal{S} = \{R_1, \ldots, R_n\}$ を K 多元環の有限族とし，M, N を左 $\mathcal{S}$ 加群とする．また，$\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ を非負整数の順序対とする．$f \in \mathrm{Hom}_K(M,N)$ で

$$\{\cdots\{\{f,\, R_1\}_{p_1},\, R_2\}_{p_2},\, \cdots,\, R_n\}_{p_n} = 0$$

を満たすものを型 $\mathbf{p}$ の**左微分演算子**と呼び，M から N への型 $\mathbf{p}$ の左微分演算子の全体を $\mathcal{D}^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}}(M,N)$ で表す．

Example 2. $n=1$ の場合，型 (p) の左微分演算子は Sweedler [8] の $p-1$ 次左微分演算子のことである．

Example 3. $\mathcal{S} = \{R,\, R^{\circ}\}$ とする．R° は R の双対多元環である．$f \in \mathcal{D}^{(1,1)}_{\mathcal{S}}(R,M)$ で $f(1) = 0$ を満たすものは R から R 両側加群 M への derivation に他ならない．このことから，$\mathcal{S}$ 上の左微分演算子は derivation を一般化したものと見ることができる．

$\mathcal{S} = \{R_1, \ldots, R_n\}$ を K 多元環の有限族とし，$R = R_1 \otimes_K \cdots \otimes_K R_n$ とおく．$\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ を非負整数の順序対とする．$u \in R_i \otimes_K R_i$ と $a \in R_i$ に対して $[u,a] = ua - au$ とおく．$U \subseteq R_i \otimes_K R_i$ と $A \subseteq R_i$ に対し，$\bigl\{[u,a] \mid u \in U,\ a \in A\bigr\}$ で生成された $R_i \otimes_K R_i$ の K 部分加群を $[U,A]$ で表し，整数 $p \geq 0$ に対する $[U,A]_p$ を次のように帰納的に定める．

$$[U,A]_0 = U, \quad [U,A]_{p+1} = [[U,A]_p,\ A]$$

$R_i \otimes_K R_i$ において $[1 \otimes 1,\, R_i]_{p_i}$ で生成された R_i 両側部分加群を $I_i^{p_i}$ で表す．特に $I_i^0 = R_i \otimes_K R_i$ である．

$$I^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}} = I_1^{p_1} \otimes_K \cdots \otimes_K I_n^{p_n}$$

とおき，包含写像 $\iota_i^{p_i} : I_i^{p_i} \to I_i^0$ から得られる

$$\iota^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}} = \iota_1^{p_1} \otimes \cdots \otimes \iota_n^{p_n} : I^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}} \to I^{\mathbf{0}}_{\mathcal{S}}$$

の余核を

$$\pi^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}} : I^{\mathbf{0}}_{\mathcal{S}} \to \mathcal{J}^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}}$$

とする．ここで，$\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ である．$\omega^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}} = \pi^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}}\bigl((1 \otimes 1) \otimes \cdots \otimes (1 \otimes 1)\bigr)$ とおき，写像

$$d^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}} : R \to \mathcal{J}^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}}$$

を，$d^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}}(x) = \omega^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}} x$ $(x \in R)$ で定める．次の定理に示すように，$d^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}} \in \mathcal{D}^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}}(R,\, \mathcal{J}^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}})$ であり，型 $\mathbf{p}$ のすべての左微分演算子は $d^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}}$ と $\mathcal{S}$ 準同型写像との合成写像として得られる．

M, N を左 $\mathcal{S}$ 加群とする．自然な同型写像 $\sigma_M : M \to R \otimes_{\mathcal{S}} M$ と，M の恒等写像 1_M を用いて，任意の $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\mathcal{J}^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}} \otimes_{\mathcal{S}} M,\ N)$ に対して

$$\eta^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}}(M,N)(\varphi) = \varphi(d^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}} \otimes 1_M)\sigma_M \in \mathrm{Hom}_K(M,N)$$

と定義する．即ち，$\eta^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}}(M,N)(\varphi)(u) = \varphi(\omega^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}} \otimes u)$ である．

Theorem 4. 上の記号の下に，$d^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}} \in \mathcal{D}^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}}(R,\, \mathcal{J}^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}})$ であり，自然な同型写像

$$\eta^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}}(M,N) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\mathcal{J}^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}} \otimes_{\mathcal{S}} M,\ N) \to \mathcal{D}^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}}(M,N)$$

を得る．

3. 分離性

分離多元環の概念の拡張として，多元環の有限族の分離性を考察する．K 多元環 R の乗法から得られる自然な R 両側準同型写像 $R \otimes_K R \to R$ が分裂するとき，R は分離多元環と呼ばれる．これは，R から R 両側加群への derivation がすべて内部 derivation であることに同値である．従って，$\mathcal{S} = \{R,\, R^\circ\}$ とおけば，すべての左 $\mathcal{S}$ 加群 M に対して

$$\mathcal{D}^{(1,1)}_{\mathcal{S}}(R,M) = \mathrm{Hom}_R(R,M) + \mathrm{Hom}_{R^\circ}(R,M)$$

が成り立つことにも同値である．この事実から，次の定義は自然であろう．

Definition 5. $\mathcal{S} = \{R_1,\, \ldots\, ,\, R_n\}$ を K 多元環の有限族とし，$\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$ とする．ただし，$n > 1$ である．すべての左 $\mathcal{S}$ 加群 $M,\, N$ に対して

$$\mathcal{D}^{\mathbf{1}}_{\mathcal{S}}(M,N) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_{R_i}(M,N)$$

が成り立つとき，$\mathcal{S}$ は**分離的**であるという．

次の定理は，有限族の分離性と分離多元環とのかかわりを示している．

Theorem 6. $\mathcal{S} = \{R_1,\, \ldots\, ,\, R_n\}$ の中の $n-1$ 個が分離多元環ならば，$\mathcal{S}$ は分離的である．

特別な場合として次の強力な事実が得られる．

Theorem 7. $\mathcal{S} = \{R,\, R^\circ\}$ が分離的であるためには，R が分離多元環であることが必要十分である．

4. 単位元が存在しない場合

本節では単位元の存在しない多元環について考察する．単位元を付加するだけで得られる結果もあるのだが，分離性についてはそう簡単ではない．

K 多元環の有限族 $\mathcal{S} = \{R_1,\, \ldots\, ,\, R_n\}$ を考える．$\mathcal{S}$ 上の加群や準同型写像の定義は自明である．まず，単位元を付加して考える．K 加群 $R^1_i = K \oplus R_i$ の乗法を

$$(\alpha, x)(\beta, y) = (\alpha\beta,\ \alpha y + \beta x + xy)$$

と定めれば，R^1_i は単位元 $(1,0)$ を有する K 多元環であり，R_i を部分多元環として含んでいる．$\mathcal{S}^1 = \{R^1_1,\, \ldots\, ,\, R^1_n\}$，$R^1 = R^1_1 \otimes_K \cdots \otimes_K R^1_n$ とおく．こうすることによって Theorem 4 を利用することができる．

Theorem 8. 上の記号の下で，任意の左 $\mathcal{S}$ 加群 M, N と非負整数の順序対 $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ に対して，

$$\eta^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}^1}(M, N) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\mathcal{J}^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}^1} \otimes_{\mathcal{S}} M,\ N) \to \mathcal{D}^{\mathbf{p}}_{\mathcal{S}}(M, N)$$

は自然な同型写像である．

次に，分離性について考察する．単位元が存在しない場合，Theorem 7 は成立しない．そこで条件を緩めて次の定義を与える．

Definition 9. K 多元環 R に対して $\mathcal{S} = \{R,\ R^\circ\}$ とおく．すべての左 $\mathcal{S}$ 加群 M に対して

$$\mathcal{D}^{(1,1)}_{\mathcal{S}}(R, M) = \mathrm{Hom}_R(R, M) + \mathrm{Hom}_{R^\circ}(R, M)$$

が成り立つとき，R を**弱分離多元環**と呼ぶ．

§3 で指摘したように，単位元を有する場合は弱分離多元環と分離多元環は同じ概念である．単位元が存在しない場合はそうはいかない．次の事実と例から，分離性については単位元を付加する技法が利用できないことがわかる．

Theorem 10 ([1, Theorem II.2.5])**.** 体 K 上の単位元を有する分離多元環は半単純であり，K 上のベクトル空間として有限次元である．

Example 11. 体 K 上の多元環 $\begin{pmatrix} K & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K & K & 0 \end{pmatrix}$ は弱分離多元環であるが半単純ではない．

Example 12. 体 K 上の無限次正方行列で 0 とは異なる成分が有限個であるものの全体は弱分離多元環を成すが K 上有限次元ではない．

References

[1] F. DeMeyer and E. Ingraham, Separable Algebras over Commutative Rings, Lecture Notes in Math. Vol. 181, Springer-Verlag, 1971.

[2] R. G. Heyneman and M. E. Sweedler, *Affine Hopf algebras, I*, J. Algebra **13** (1969), 192–241.

[3] M. Hongan and H. Komatsu, *On the module of differentials of a noncommutative algebras and symmetric biderivations of a semiprime algebra*, Comm. Algebra **28** (2000), 669–692.

[4] H. Komatsu, *The module of differentials of a noncommutative ring extension*, International Symposium on Ring Theory, Birkhäuser, 2001, 171–177.

[5] H. Komatsu, *Quasi-separable extensions of noncommutative rings*, Comm. Algebra **29** (2001), 1011–1019.

[6] H. Komatsu, *High order Kähler modules of noncommutative ring extensions*, Comm. Algebra **29** (2001), 5499–5524.

[7] H. Osborn, *Modules of differentials. I*, Math. Ann. **170** (1967), 221-244.

[8] M. E. Sweedler, *Right derivations and right differential operators*, Pacific J. Math. **86** (1980), 327–360.

Department of Systems Engineering
Faculty of Computer Science and System Engineering
Okayama Prefectural University
Soja, Okayama 719-1197 JAPAN

E-mail address: komatsu@cse.oka-pu.ac.jp