# THE MODULI SPACES OF NON-THICK IRREDUCIBLE REPRESENTATIONS FOR THE FREE GROUP OF RANK 2

KAZUNORI NAKAMOTO AND YASUHIRO OMODA

Abstract. There are several types among irreducible representations. Considering such types as "thick" and "dense" gives us rich problems on representation theories, and the first step to describe the moduli spaces of representations. The moduli of irreducible representations for the free group $F_2$ is very big, and difficult to be investigated. However, we can describe some parts of the moduli of irreducible representations by using the notion of thickness. In this talk, we describe the moduli of 4-dimensional non-thick irreducible representations for the free group of rank 2.

## 1. Introduction

群の既約表現の中でも，さらにいくつかのクラスの表現に分類され，それが表現論的な興味深い問題提供と，表現のモジュライを記述する際の足がかりを与えてくれる。自由群 $F_2$ の表現は，2 つの生成元の行き先である行列 2 個を指定すれば作ることが出来るのであるが，そのため自由群 $F_2$ の既約表現は多くありすぎて，のっぺらぼうのような感じで，どう調べてよいのかわからない状況であった。だが，thick や dense という新しい概念により，既約表現はいくつかの "層" に分離されることがわかる。次の節から具体的な定義を説明するが，ここではどうしてわれわれがこのような概念を考え，現時点でどのようなことを考えているのかを、"安直" に "ざっくばらん" に日本語で述べておきたいと思う。

thick という概念は，本来 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ という離散群の既約表現を調べる際に考え付いたものである。既約表現が持つべき性質であろうと思っていたものが，実はいつも成立するわけではないと気づき，thick という名前をつけ，いつ既約表現が thick であるかを調べることとなった。thick という名前の由来は，群の表現 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ の像 $\rho(G)$ が $\mathrm{GL}(V)$ の中で，既約表現よりも多く元を持ち，"thick である" というイメージから来る。thick よりも強い概念である dense も同様で，$\mathrm{GL}(V)$ の中での像 $\rho(G)$ が非常に多くあるというイメージと既約表現が持つべき期待できる "最大限の性質" という理由から名前を付けた。既約表現なら当然 thick と呼ばれる性質を持つに違いないと当初思っていたが，実はそうではなく，irreducible, thick, dense の間にギャップがあることに気づいたのが，本講演の出発点になる。

自由群の（既約）表現のモジュライがどうなっているか，そして関連して行列の不変式環がどういう構造をしているかを調べるのが長年付き合ってきた研究テーマなのであるが，その原点ともいうべき結果が次である。

**Theorem 1** (Teranishi [4]). 不変式環 $\mathbb{Q}[\mathrm{M}_4 \times \mathrm{M}_4]^{\mathrm{PGL}_4}$ の *Poincaré* 級数 $P_{4,2}(s,t)$ は次で与えられる。

The detailed version of this paper will be submitted for publication elsewhere.

$$P_{4,2}(s,t) := \sum_{i,j\geq 0} \dim \mathbb{Q}[\mathrm{M}_4 \times \mathrm{M}_4]^{\mathrm{PGL}_4}_{(i,j)} \cdot s^i t^j = \frac{R_{4,2}(s,t)}{Q_{4,2}(s,t)},$$

ここで

$$\begin{aligned} Q_{4,2}(s,t) = (1-s)(1-s^2)(1-s^3)(1-s^4)(1-t)(1-t^2)(1-t^3)(1-t^4) \\ \times (1-st)(1-s^2t^2)^2(1-st^2)(1-s^2t) \\ \times (1-st^3)(1-s^3t)(1-s^2t^4)(1-s^4t^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{4,2}(s,t) = 1 + s^2t^3 + s^3t^2 + 2s^3t^3 + s^3t^4 + s^4t^3 + 2s^4t^4 + s^3t^5 + s^5t^3 \\ + s^3t^6 + s^4t^5 + s^5t^4 + s^6t^3 + 2s^5t^5 + s^4t^6 + s^6t^4 + 2s^5t^6 \\ + 2s^6t^5 + 2s^6t^6 + 2s^6t^7 + 2s^7t^6 + 2s^7t^7 + s^6t^8 + s^8t^6 \\ + s^6t^9 + s^7t^8 + s^8t^7 + s^9t^6 + 2s^8t^8 + s^7t^9 + s^9t^7 + s^8t^9 \\ + s^9t^8 + 2s^9t^9 + s^9t^{10} + s^{10}t^9 + s^{12}t^{12}. \end{aligned}$$

$4\times 4$ 行列 2 個の不変式環ですら，その構造はわかる気がしない。非常に複雑であるという理由からどう良い問題を取り出していいのかわからない，といった難しさもあろう。だけど，なんとかしてよい問題を切り出して，面白い構造を取り出そうというのは一つの行動原理として，認められることであろう。

その良い問題を切り出す一つのきっかけとして，thick, dense といった概念を使わない手はない。自由群の既約表現のモジュライの中に，thick 表現から成る開集合や dense 表現から成る開集合がある。既約表現のモジュライがどうなっているかを調べたいのであるが，まずは薄い皮を剥がすが如く，non-thick な既約表現がどうなっているかを調べようというのが本講演の主たるアイデアである。実際に調べてみると確かに薄い皮なのだが，非常に面白いのである。ただ，現時点では薄い皮しか調べていないので，Theorem 1 が成り立つ背景は当然わからないままである。

この後，non-dense な既約表現がどうなっているのか，最後に dense 表現がどうなっているのか，と続くのであるが，それはまたの機会にしよう。また，具体的な群の既約表現が thick であるかどうかすらよくわかっていない。いっぱいやることがある。

## 2. $m$-THICK AND $m$-DENSE

以下，$k$ を体，$V$ を $k$ 上の $n$ 次元ベクトル空間，$G$ を群とする。また，$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ を $G$ の表現とする。

**Definition 2.** $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ が $m$-thick であるとは，$\dim V_1 = m$ なる $V$ の任意の部分ベクトル空間 $V_1$ と，$\dim V_2 = n-m$ なる $V$ の任意の部分ベクトル空間 $V_2$ に対して，ある $g \in G$ が存在して，$(\rho(g)V_1) \oplus V_2 = V$ が成り立つときをいう。また，$\rho$ が thick であるとは，$0 < m < n$ なる任意の整数 $m$ に対して，$\rho$ が $m$-thick であるときをいう。

**Definition 3.** $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ が $m$-dense であるとは，$\rho$ から誘導される $G$ の外積表現 $\wedge^m \rho : G \to \mathrm{GL}(\Lambda^m V)$ が既約であるときをいう。また，$\rho$ が dense であるとは，$0 < m < n$ なる任意の整数 $m$ に対して，$\rho$ が $m$-dense であるときをいう。

**Definition 4.** 表現 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ に対して，$G$ 同変 perfect pairing

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^m V \times \Lambda^{n-m} V & \to & \Lambda^n V \cong k \\ (x, y) & \mapsto & x \wedge y \end{array}$$

を考える。部分空間 $W \subseteq \Lambda^m V$ に対して，$W^\perp \subseteq \Lambda^{n-m} V$ を

$$W^\perp := \{y \in \Lambda^{n-m} V \mid x \wedge y = 0 \text{ for } \forall x \in W\}$$

と定める。$W$ が $G$ 不変部分空間なら，$W^\perp$ も $G$ 不変部分空間となる。

**Proposition 5.** $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ について，*$m$-thick* であることと *$(n-m)$-thick* であることは同値である。また，*$m$-dense* であることと，*$(n-m)$-dense* であることは同値である。

*Proof.* $m$-thick と $(n-m)$-thick が同値であることは，定義より明らか。また，Proposition 4 より，$\Lambda^m V$ が既約であることと，$\Lambda^{n-m} V$ が既約であることは同値である。このことから，$m$-dense と $(n-m)$-dense は同値であることがわかる。 □

**Proposition 6.**

$$m\text{-}dense \Rightarrow m\text{-}thick \Rightarrow 1\text{-}dense \Leftrightarrow 1\text{-}thick \Leftrightarrow irreducible$$

*Proof.* まず「$m$-dense $\Rightarrow$ $m$-thick」を示す。$V_1, V_2$ をそれぞれ $V$ の $m$ 次元，$(n-m)$ 次元部分空間とする。$V_1 = \langle e_1, e_2, \ldots, e_m \rangle$, $V_2 = \langle f_1, f_2, \ldots, f_{n-m} \rangle$ とおく。$\rho$ が $m$-dense であれば，$\{\wedge^m \rho(g)(e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_m) \mid g \in G\}$ が $\Lambda^m V$ を span するので，$\wedge^m \rho(g)(e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_m) \wedge f_1 \wedge \cdots \wedge f_{n-m} \neq 0$ となる $g \in G$ がとれる。これは，$(\rho(g)V_1) \oplus V_2 = V$ を意味し，$m$-thick であることがいえた。また，「1-dense $\Rightarrow$ 1-thick」も言えたことになる。

「irreducible $\Rightarrow$ 1-dense」であることは定義より明らか。後は「$m$-thick $\Rightarrow$ irreducible」を示せばよい。$\rho$ が既約でないと仮定すると，$V$ の自明でない $G$ 不変部分空間 $V'$ が存在する。$\ell := \dim V'$ とせよ。もし $\ell \leq \min(m, n-m)$ なら，$V' \subseteq V_1$, $V' \subseteq V_2$ となるように，$V$ の $m$ 次元部分空間 $V_1$ と $(n-m)$ 次元部分空間 $V_2$ を適当にとれば，$\rho(g)V_1$ と $V_2$ は必ず $V'$ を含むので，$(\rho(g)V_1) \oplus V_2 = V$ となり得ない。このときは，$m$-thick でないことがわかる。よって，$\ell > m$ または $\ell > n-m$ のときを考えればよい。対称性より $m \leq n-m$ としても一般性を失わない。$m < \ell \leq n-m$ のときは，$V_1 \subset V' \subseteq V_2$ となるよう $V_1, V_2$ をとれば，どんな $g \in G$ に対しても $(\rho(g)V_1) \oplus V_2 = V$ となり得ない。また，$m \leq n-m < \ell$ なら，$V_1 \subseteq V_2 \subset V'$ となるよう $V_1, V_2$ をとれば，$(\rho(g)V_1) + V_2 \subseteq V' \neq V$ となる。いずれにしても $m$-thick ではないので，「$m$-thick $\Rightarrow$ irreducible」がいえた。 □

上の Proposition から容易に次の Corollary がわかる。

**Corollary 7.**

$$dense \Rightarrow thick \Rightarrow irreducible$$

**Corollary 8.** $n \leq 3$ とする。このとき，

$$dense \Leftrightarrow thick \Leftrightarrow irreducible$$

上の Corollary から，dense, thick, irreducible の概念がずれるのが，4 次元以上の表現からになることがわかる。そして，実際に dense, thick, irreducible の間にはギャップがある。

**Example 9.** $G$ を有限群とする。$G$ の既約表現のうち，最大の次数を与える表現 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ の次数 $n$ が 4 以上であるとする。このとき，$\rho$ は dense ではない。

事実，$\wedge^n \rho$ は $n$ より大きな次数の表現を与えるが，仮定により既約とならない。この例は，既約であるが dense でない例を与える。

thick であるという条件は，非常にわかりずらい。これは，線型代数で捕らえきることが出来ない，むしろ外積代数やグラスマン多様体といった，線型を超えた (?) 範疇の条件だからだと思われる。しかしながら，ここでは便宜上の thick と等価な条件を提示しておく。

**Definition 10.** 部分ベクトル空間 $W \subseteq \Lambda^m V$ について，$W$ が realizalble（実現可能）であるとは，$V$ のある部分ベクトル空間 $V' = \langle e_1, e_2, \ldots, e_m \rangle$ が存在して，$e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_m \in W$ となるときをいう。以後，$e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_m \in W$ のことを $\Lambda^m V' \in W$ と書くことにする。

**Proposition 11.** *$\rho$ が "$m$-thick でない" ということと，ある $G$-不変 realizable 部分空間 $W_1 \subseteq \Lambda^m V$ とある $G$-不変 realizable 部分空間 $W_2 \subseteq \Lambda^{n-m} V$ が存在して，$W_1 \wedge W_2 := \{w_1 \wedge w_2 \in \Lambda^n V \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\} = 0$ が成り立つことは同値である。*

*Proof.* 条件をみたす $W_1, W_2$ がとれたとしよう。$W_1$, $W_2$ は realizable なので，$V$ の $m$ 次元部分空間 $V_1$ および $(n-m)$ 次元部分空間 $V_2$ が存在して，$\Lambda^m V_1 \in W_1$, $\Lambda^{n-m} V_2 \in W_2$ となる。ところが，条件によりどんな $g \in G$ に対しても，$\rho(g) V_1 \oplus V_2 = V$ となり得ない。これは $m$-thick でないことを意味する。

逆に $m$-thick でないと仮定する。このとき，$V$ の $m$ 次元部分空間 $V_1$ および $(n-m)$ 次元部分空間 $V_2$ が存在して，どんな $g \in G$ に対しても，$\rho(g) V_1 \oplus V_2 = V$ となり得ない。$\{(\wedge^m \rho)(g)(\Lambda^m V_1) \mid g \in G\}$ で生成される $\Lambda^m V$ の部分空間を $W_1$, $\{(\wedge^{n-m} \rho)(g)(\Lambda^{n-m} V_2) \mid g \in G\}$ で生成される $\Lambda^{n-m} V$ の部分空間を $W_2$ とする。$W_1, W_2$ は $G$-不変 realizable 部分空間であり，$W_1 \wedge W_2 = 0$ をみたす。以上より，主張がいえた。 □

*Remark* 12. "dense でない" という条件を上の Proposition と対比させて表現すると，"thick でない" 条件と "dense でない" 条件が比較しやすくなる。

「$\rho$ が "$m$-dense でない" ということと，ある $G$-不変部分空間 $W_1 \subseteq \Lambda^m V$ とある $G$-不変部分空間 $W_2 \subseteq \Lambda^{n-m} V$ が存在して，$W_1 \wedge W_2 := \{w_1 \wedge w_2 \in \Lambda^n V \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\} = 0$ が成り立つことは同値である。」

以下の Proposition は証明なしで紹介する。4 次元表現，5 次元表現が thick であるための必要十分条件を与える。

**Proposition 13.** *$k$ を代数的閉体とする。4 次元表現 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ に対して，次は同値である。*

(1) *$\rho$ : thick*
(2) *$\rho$ : 2-thick*
(3) *$\rho$ : irreducible かつ $\wedge^2 \rho : G \to \mathrm{GL}(\Lambda^2 V)$ が 2 次元ないし 3 次元 $G$-不変部分空間 $W \subset \Lambda^2 V$ を持たない。*

**Proposition 14.** *$k$ を代数的閉体とする。5 次元表現 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ に対して，次は同値である。*

(1) *$\rho$ : thick*

(2) $\rho$ : *2-thick*
(3) $\rho$ : *irreducible* かつ $\wedge^2\rho : G \to \mathrm{GL}(\Lambda^2 V)$ が $G$-不変部分空間 $W \subset \Lambda^2 V$ で $4 \leq \dim W \leq 6$ なるものを持たない。

次は，thick ではあるが dense でない例である。

**Example 15.** $k = \mathbb{C}$，$G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ とする。$V_{(a+b,b)}$ を $G$ の highest weight $(a+b, b)$ なる既約表現とする。このとき，

$$\begin{aligned} a \geq 3 \quad &\Rightarrow \quad V_{(a+b,b)} \text{ is not dense} \\ a = 3, 4 \quad &\Rightarrow \quad V_{(a+b,b)} \text{ is thick} \end{aligned}$$

特に，

$$a = 3, 4 \quad \Rightarrow \quad V_{(a+b,b)} \text{ is not dense, but thick}$$

## 3. Moduli of representations

この節では，表現のモジュライ，とくに階数 2 の自由群 $F_2$ の 4 次元既約表現のモジュライについて言及する。以下では，便宜上 $k$ は標数が 2 でない代数的閉体であると仮定する。

記号として，

$$\mathrm{Rep}_n(G)_{air} := \{\rho \mid \rho : n\text{-dimensional (absolutely) irreducible representation of } G\}$$

とおく。また，2 つの $n$ 次元表現 $\rho, \rho'$ が同値であるとは，ある $P \in \mathrm{GL}_n(k)$ が存在して，$P\rho P^{-1} = \rho'$ が成り立つときをいう。$\rho$ を含む表現の同値類を $[\rho]$ と表す。このとき，

$$\mathrm{Ch}_n(G)_{air} := \{[\rho] \mid \rho : n\text{-dimensional (absolutely) irreducible representation of } G\}$$

とおく。

$\mathrm{Rep}_n(G)_{air}$ および $\mathrm{Ch}_n(G)_{air}$ は，体 $k$ 上の scheme となる。平たく言うと（そして多少の語弊があることを承知で言うと），いくつかの代数方程式で定義される代数多様体になる。$\mathrm{Ch}_n(G)_{air}$ のことを，$G$ の $n$ 次元既約表現のモジュライと呼ぶ。既約表現のモジュライは，各点が既約表現の同値類に対応しており，それらの点が集まって一つの幾何学的対象になったものである。

群 $\mathrm{PGL}_n(k) := \mathrm{GL}_n(k)/k^*$ の $\mathrm{Rep}_n(G)_{air}$ への作用を $\rho \mapsto P\rho P^{-1}$ で定めると，$\mathrm{Ch}_n(G)_{air} = \mathrm{Rep}_n(G)_{air}/PGL_n$ である。

$F_2 = \langle \alpha, \beta \rangle$ を階数 2 の自由群とする。以下，$G = F_2$ として自由群 $F_2$ の 4 次元表現に限って表現のモジュライ $\mathrm{Ch}_4(F_2)_{air}$ を調べることにする。一般に自由群の既約表現は無数にあるので，このようにモジュライという幾何学的対象を使って，既約表現がどのくらいあるのかを視覚的にとらえようとするわけである。

**Proposition 16.** $\mathrm{Ch}_4(F_2)_{air}$ は 17 次元非特異代数多様体である。

*Outline of Proof.* 非特異多様体であることは認めて，なぜ 17 次元なのかをラフに説明する。$F_2$ の表現 $\rho$ を与えることと，$F_2$ の生成元 $\alpha, \beta$ の行き先 $\rho(\alpha), \rho(\beta)$ を与えることは同値である。よって，$F_2$ の 4 次元表現を与えるためには，4 次正則行列を 2 個与えればよ

い。なお，表現のモジュライの中で既約表現であることは open な条件であることに注意すると，既約であるという条件に目くじらを立てず次元を安直に計算出来て，

$$\dim \mathrm{Rep}_4(F_2)_{air} = \dim \mathrm{GL}_4(k) \times \mathrm{GL}_4(k) = 4^2 + 4^2 = 32$$

および

$$\dim \mathrm{PGL}_4(k) = \dim \mathrm{GL}_4(k) - \dim k^* = 4^2 - 1 = 15$$

より，

$$\dim \mathrm{Ch}_4(F_2)_{air} = \dim \mathrm{Rep}_4(F_2)_{air} - \dim \mathrm{PGL}_4(k) = 32 - 15 = 17$$

となる。 □

既約表現のモジュライの中で，既約表現が dense である，もしくは thick であるという条件は open な条件である。つまり，既約表現のモジュライのある点で dense もしくは thick であれば，その近傍も dense もしくは thick であることがいえる。そこで，つぎのような定義をしておく。

**Definition 17.**

$$\mathrm{Ch}_n(G)_{dense} := \{[\rho] \mid \rho : n\text{-dimensional (absolutely) dense representation of } G\}$$

$$\mathrm{Ch}_n(G)_{thick} := \{[\rho] \mid \rho : n\text{-dimensional (absolutely) thick representation of } G\}$$

とおく。このとき，

$$\mathrm{Ch}_n(G)_{air} \supseteq \mathrm{Ch}_n(G)_{thick} \supseteq \mathrm{Ch}_n(G)_{dense}$$

がいえる。

本講演の主題は，$\mathrm{Ch}_4(F_2)_{non-thick} := \mathrm{Ch}_4(F_2)_{air} \setminus \mathrm{Ch}_4(F_2)_{thick}$ である。non-thick 4 次元既約表現のモジュライ $\mathrm{Ch}_4(F_2)_{non-thick}$ は，既約表現のモジュライ $\mathrm{Ch}_4(F_2)_{air}$ の中で閉集合を成すが，その形はどうなっているのかを調べるのが，今回の主題である。

$[\rho] \in \mathrm{Ch}_4(F_2)_{non-thick}$ を考える。$\wedge^2\rho : F_2 \to \mathrm{GL}(\Lambda^2 V)$ について，Proposition 13 より，$F_2$ 不変部分空間 $W \subseteq \Lambda^2 V$ として，$\dim W = 2$ または $\dim W = 3$ となるものがとれる。

まずは，$\dim W = 2$ のときを考える。次の命題は $\dim W = 2$ の場合の表現の正規化定理というべきものである。証明なしで紹介する。

**Proposition 18.** $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ を 4 次元 *non-thick* 既約表現とする。$G$ 不変部分空間 $W \subseteq \Lambda^2 V$ として，$\dim W = 2$ となるものがとれると仮定せよ。このとき，$V$ の基底 $e_1, e_2, e_3, e_4$ が存在して，$W = \langle e_1 \wedge e_2, e_3 \wedge e_4 \rangle$ かつ任意の $g \in G$ に対して

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} A_1 & 0_2 \\ 0_2 & A_2 \end{pmatrix} \; or \; \begin{pmatrix} 0_2 & A_1 \\ A_2 & 0_2 \end{pmatrix}$$

となるものがとれる。ここで，$A_1, A_2$ は $2 \times 2$ 行列である。

**Definition 19.** 上の正規化定理において，

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} A_1 & 0_2 \\ 0_2 & A_2 \end{pmatrix}$$

の形の行列を type $+$,

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} 0_2 & A_1 \\ A_2 & 0_2 \end{pmatrix}$$

の形の行列を type $-$ と呼ぶことにする。

ここで，$\dim W = 2$ の場合の $\mathrm{Ch}_4(F_2)_{non-thick}$ の既約成分を定義しよう。

**Definition 20.**

$$S_4(F_2)_{(+,-)} := \{\rho \in \mathrm{Rep}_4(F_2)_{air} \mid \rho(\alpha) : \text{type } + \, , \, \rho(\beta) : \text{type } - \}$$

$$S_4(F_2)_{(-,+)} := \{\rho \in \mathrm{Rep}_4(F_2)_{air} \mid \rho(\alpha) : \text{type } - \, , \, \rho(\beta) : \text{type } + \}$$

$$S_4(F_2)_{(-,-)} := \{\rho \in \mathrm{Rep}_4(F_2)_{air} \mid \rho(\alpha) : \text{type } - \, , \, \rho(\beta) : \text{type } - \}$$

とおく。また，標準的な射 $\phi_{(+,-)} : S_4(F_2)_{(+,-)} \to \mathrm{Ch}_4(F_2)_{non-thick}$ を考え，同様に $\phi_{(-,+)}$, $\phi_{(-,-)}$ も考える。このとき，

$$\mathrm{Ch}(+,-) := \overline{\mathrm{Im}\phi_{(+,-)}}$$

$$\mathrm{Ch}(-,+) := \overline{\mathrm{Im}\phi_{(-,+)}}$$

$$\mathrm{Ch}(-,-) := \overline{\mathrm{Im}\phi_{(-,-)}}$$

と定義する。

次に $\dim W = 3$ のときを考える。次の命題は $\dim W = 3$ の場合の表現の正規化定理である。これも証明なしで紹介する。

**Proposition 21.** $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ を 4 次元 *non-thick* 既約表現とする。$G$ 不変部分空間 $W \subseteq \Lambda^2 V$ として，$\dim W = 2$ となるものは存在せず，$\dim W = 3$ となるものがとれると仮定せよ。このとき，ある 2 つの 2 次元既約表現 $\rho_1, \rho_2$ が存在して，$\rho$ と $\rho_1 \otimes \rho_2$ は同値である。

$\dim W = 3$ の場合に対応する既約成分を定義しておこう。

**Definition 22.** 有理射

$$\begin{array}{cccc} \phi_{\dim=3} & : & \mathrm{Ch}_2(F_2)_{air} \times \mathrm{Ch}_2(F_2)_{air} & \dashrightarrow & \mathrm{Ch}_4(F_2)_{non-thick} \\ & & (\rho_1, \rho_2) & \mapsto & \rho_1 \otimes \rho_2 \end{array}$$

の像の閉包を $\mathrm{Ch}(\dim = 3)$ とおく。

これでようやく主定理を述べることができる。

**Theorem 23.** $\mathrm{Ch}_4(F_2)_{non-thick}$ の既約分解は

$$\mathrm{Ch}_4(F_2)_{non-thick} = \mathrm{Ch}(+,-) \cup \mathrm{Ch}(-,+) \cup \mathrm{Ch}(-,-) \cup \mathrm{Ch}(\dim = 3)$$

で与えられる。また，$\dim \mathrm{Ch}(+,-) = \dim \mathrm{Ch}(-,+) = \dim \mathrm{Ch}(-,-) = 9$ かつ $\mathrm{Ch}(+,-) \cap \mathrm{Ch}(-,+) \cap \mathrm{Ch}(-,-) \neq \emptyset$ である。

では，具体的に $\mathrm{Ch}_4(F_2)_{non-thick}$ の形はどうなっているのか。特異点はどうなっているのか。さらに non-dense 既約表現は？　問いは尽きないようで。続きは次回の講釈にて。

## References


[1] K. Nakamoto and Y. Omoda, *Certain classes of irreducible representations*, (in preparation)

[2] Y. Omoda and K. Nakamoto, *Certain classes of irreducible representations*, 日本数学会函数解析学分科会アブストラクト（平成 19 年 9 月　東北大学）(in Japanese)

[3] Y. Teranishi, *The ring of invariants of matrices*, Nagoya Math. J., Vol. 104 (1986), 149–161.

[4] ———, *Linear Diophantine Equations and Invariant Theory of Matrices*, Advanced Studies in Pure Mathematics 11 (1987), Commutative Algebra and Combinatorics, 259–275.



Center for Life Science Research
University of Yamanashi
*E-mail address*: nakamoto@yamanashi.ac.jp

Department of General Education
Akashi National College of Technology
*E-mail address*: omoda@akashi.ac.jp