VON NEUMANN REGULAR RINGS WITH COMPARABILITY

MAMORU KUTAMI

Abstract. In this paper, we report some known recent results for regular rings with comparability including general comparability, 1–comparability, s–comparability and weak comparability. In Section 1, we introduce the history and results for regular rings with comparability, with respect to finiteness conditions. In Sections 2 and 3, we tell some results for regular rings with weak comparability.

Key Words: Regular Ring, Comparability.

1. 正則環における比較可能性と有限性

環 R は単位元を持つ環とし、R-加群は右 R-加群を意味する。最初に、この論文の中で使用される記号を準備する。

記号 1. R-加群 M と濃度 n に対して、n 個の M の直和を nM で表す。N が R-加群 M の部分加群であるとき $N \leq M$ で表し、特に N が M の直和因子であるとき $N \leq_{\oplus} M$ で表す。R-加群 M, N に対して、単射 $f : M \longrightarrow N$ が存在するとき $M \lesssim N$ と書く。特に、$f(M) \leq_{\oplus} N$ のとき $M \lesssim_{\oplus} N$ で表す。また、$f(M) < N$ を満たす単射 $f : M \longrightarrow N$ が存在するとき $M \prec N$ で表す。

まず正則環及び正則環に関連する定義を与える。

定義 2. 環 R が（ノイマン）正則環であるとは、R の各元 x に対して $xyx = x$ を満たす R の元 y が存在するときに言う。環 R がユニット正則環であるとは、R の各元 x に対して $xux = x$ を満たす R の可逆元 u が存在するときに言う。環 R がダイレクト・ファイナイトであるとは、R の元 x, y に対して「$xy = 1$ ならば $yx = 1$」を満たすときに言う。即ち、R の任意の右又は左可逆元は可逆元であることを意味する。

正則環は 1936 年ノイマンによって連続幾何学の研究から見出された環であり、1950 年代から 1960 年代にかけての内海による商環の存在性の考察により、多数の正則環が存在することが知られるようになった。そして、1960 年代後半に入り、有限条件と呼ばれるダイレクト・ファイナイト性やユニット正則性の研究が始められるようになった。ダイレクト・ファイナイト性はノイマン有限性或いはデデキント有限性とも呼ばれており、可換環やネーター環及びアルチン環がダイレクト・ファイナイト環であることはよく知られている。ユニット正則性は 1968 年 G.Ehrich によって与えられた概念である。ユニット正則性やダイレクト・ファイナイト性は、正則環研究における重要な有限条件と呼ばれている。何故これらの概念が有限性と呼ばれるかは、次の定理 3 の性質を持つからであると推察される。

The detailed version of this paper has been submitted for publication elsewhere ever.

定理 3 ([5]). 次が成立する。

(1) 環 R がダイレクト・ファイナイト環であることは、「$A_R \leq_\oplus R_R$ かつ $A_R \cong R_R$ ならば $A = R_R$」を満たすことと同値である。即ち、R_R は自分自身と同型な真の直和因子を持たないことを意味する。

(2) 正則環 R がユニット正則環であることは、 有限生成射影 R-加群 A, B, C に対して「$A \oplus C \cong B \oplus C$ ならば $A \cong B$」を満たすことと同値である。

上記有限性に関して、歴史的には 1973 年 M. Henriksen により「ユニット正則環はダイレクト・ファイナイト環である」ことが証明された。その後、この結果の逆の成立性が問題となったが、1977 年 G. Bergman により「ユニット正則環でないダイレクト・ファイナイト正則環の存在」が保証された。そして、正則環における有限性研究の流れは、次の問題 A, B の研究へと進展していった。

問題 A. どの種のダイレクト・ファイナイト正則環はユニット正則環か?
問題 B. 全てのダイレクト・ファイナイト単純正則環はユニット正則環か? ([5, Open Problem 3])

次に比較可能性について述べる。正則環における比較可能性には、主なものとして次の４つの比較可能性がある：

(1) 一般比較可能性
(2) １–比較可能性
(3) s–比較可能性 (但し、s は自然数)
(4) 弱比較可能性

今、上記 (1)〜(3) の定義を与える。

定義 4. 正則環 R が一般比較可能性を満たすとは、R の各元 x, y に対して「$exR \lesssim eyR$ かつ $(1-e)yR \lesssim (1-e)xR$」を満たす R の中心べき等元 e が存在するときに言う。

定義 5. R を正則環とし、s を自然数をする。R が s–比較可能性を満たすとは、R の各元 x, y に対して「$xR \lesssim s(yR)$ 又は $yR \lesssim s(xR)$」を満たすときに言う。特に、1– 比較可能性は比較可能公理とも呼ばれており、上記４つの比較可能性の中で最も基本的なものである。

ここで、比較可能性を持つ正則環に関する上記問題 A に対する歴史を話す。一般比較可能性の概念は、1960 年代 Operator Algebra や Baer 環の研究から見出された概念であり、右自己入射正則環（例えば、内海の商環）はこの性質を持つ。又、１–比較可能性は次元関数の存在に関連して 1975 年 K.Goodearl と D.Handelman によって見出された。素環である右自己入射正則環はこの性質を持つ。これらの比較可能性を持つダイレクト・ファイナイト正則環がユニット正則環であることはよく知られている ([5])。その後、1–比較可能性の一般化として、1976 年 D.Handelman や K.Goodearl により s–比較可能性という概念が見出されたが、この研究はすぐには進まず、1990 年代に入り、弱比較可能性の研究に刺激される形で研究が進められた。s-比較可能性を持つ正則環に関しては、上記問題 A, B について次の結果が知られている。

定理 6 ([9]). *s–比較可能性を持つダイレクト・ファイナイト単純正則環は、ユニット正則環である。*

定理 7 ([3]). *2–比較可能性を持つダイレクト・ファイナイト正則環で、単純環でもユニット正則環でもない環が存在する。*

次に、「全てのダイレクト・ファイナイト単純正則環はユニット正則環か?」という上記問題 B に関しては、1991 年 K.C. O'Meara により弱比較可能性という概念が見出され、この問題に対する大きな貢献（下述の定理 9）が彼によって与えられた。ここで、正則環に対する弱比較可能性の定義を与え、K.C. O'Meara による結果を紹介する。

定義 8 ([9])**.** 正則環 R が弱比較可能性を満たすとは、R の各元 $x(\neq 0)$ に対して、「$n(yR) \lesssim R_R$ $(y \in R)$ ならば $yR \lesssim xR$」を満たす自然数 n が存在するときに言う。 この自然数 n は、R の元 x に依存することに注意する。

定理 9 ([9])**.** 弱比較可能性を満たすダイレクト・ファイナイト単純正則環は、ユニット正則環である。

その後、弱比較可能性を満たす単純正則環の研究が論文 [1], [2], [4] で続けられ、単純正則環が弱比較可能性を持つための特徴付けが次のように与えられた。

定理 10 ([2])**.** R を単純正則環とする。このとき、次は同値である。
(a) R が弱比較可能性を満たす。
(b) R は、有限生成射影 R-加群の集まりに関する「Strict Unperforation Property」を満たす。即ち、$nA \prec nB$ を満たす自然数 n と有限生成射影 R-加群 A, B が存在するならば、$A \prec B$ を満たす。

注意 11. 弱比較可能性を持たないダイレクト・ファイナイト単純正則環の存在は、現在のところ知られていない。

以後 §2, §3 では、単純環とは限らない弱比較可能性を満たす正則環について、上記定理 10 の結果を発展させることを目的に、この環の持つ性質を紹介する。

2. 弱比較可能正則環上のダイレクト・ファイナイト射影加群

最初に、弱比較可能性を満たす正則環の典型的な例を紹介する。このために必要な定義を与える。

定義 12. 環 R のべき零元 x のべき零指数を、$x^n = 0$ を満たす自然数 n の最小数と定める。環 R のべき零指数を、R の全てのべき零元のべき零指数の上限と定める。

補題 13 ([5])**.** 正則環 R のべき零指数が n であることと、R が $(n+1)$ 個の同型な零でない右イデアルの直和を含まないことは同値である。

定理 14 ([9])**.** 次が成立する。
(1) 有限べき零指数を持つ正則環は、弱比較可能性を満たす。
(2) 弱比較可能性を満たす正則環は、素環又は有限べき零指数を持つ環である。

上記の定理 14(1) は、弱比較可能性の定義 8 と補題 13 から容易に導かれることに注意する。ここで、弱比較可能性を満たす正則環の典型的な例を与える。

例 15 ([9])**.** 単純環でない弱比較可能性を満たすユニット正則環は存在する。

[証明] S を、アルチン環でないが比較可能公理を満たす単純ユニット正則環とする。例えば、$S = \varinjlim M_{2^n}(K)$ (但し K は体) を考えればよい。そして、F を S の中心とする。S はアルチン環でないので、S の中に互いに直交する零でないべき等元の無限列 $\{e_1, e_2, \cdots\}$ を選ぶことが出来る。各自然数 n に対して $f_n := e_1 + \cdots + e_n$ と定め、$J := \cup_{n=1}^{\infty} f_n S f_n$ とおく。このとき、$R := F + J$ は求めるものである。□

例 16. ダイレクト・ファイナイトでない弱比較可能性を満たす単純正則環は存在する。

[証明] V を体 F 上の無限次元ベクトル空間とし、その自己準同型環を Q とする。$M = \{x \in Q|\ dim_F(xV) < dim_F(V)\}$ とおくと、M は Q の唯一の極大両側イデアルである。ここで、環 $\bar{Q} := Q/M$ を考えると、$\bar{Q}$ が求めるものである。$\bar{Q}$ の弱比較可能性を検証するには、$\bar{Q}$ の任意の元 $\bar{x}(\neq \bar{0})$ に対して $\bar{x}\bar{Q} \cong \bar{Q}$ が成立することに注意すればよい。□

定義 17. R-加群 M がダイレクト・ファイナイトであるとは、M の自己準同型環 $End_R(M)$ がダイレクト・ファイナイト環の時に言う。このことは、M が自分自身と同型な真の直和因子を持たないことと同値である。

ここで、射影加群に対するダイレクト・ファイナイト性の判定を与える。この判定は、以後の諸結果の証明に大きな役割を果たす。

定理 18. R を弱比較可能性を満たす正則環とする。
(I) P を有限生成射影 R-加群とし、その巡回加群分解を $P = \oplus_{i=1}^{n} P_i$ とする。このとき、次は同値である。
(a) P はダイレクト・ファイナイトである。
(b) 各 $i = 1, \cdots, n$ に対して、P_i はダイレクト・ファイナイトである。
(c) どんな R-加群 $X(\neq 0)$ に対しても、$\aleph_0 X \not\lesssim P$ である。

(II) P を有限生成でない射影 R-加群とし、その巡回加群分解を $P = \oplus_{i\in I} P_i$ とする。このとき、次は同値である。
(a) P はダイレクト・ファイナイトである。
(b) 各 $i(\in I)$ に対して P_i はダイレクト・ファイナイトであり、かつ、どんな R-加群 $X(\neq 0)$ に対しても、$X \not\lesssim \oplus_{i\in I-F} P_i$ を満たす I の有限部分集合 F が存在する。
(c) どんな R-加群 $X(\neq 0)$ に対しても $\aleph_0 X \not\lesssim P$ である。
(d) 各 $i(\in I)$ に対して P_i はダイレクト・ファイナイトであり、かつ、どんな R-加群 $X(\neq 0)$ に対しても $\aleph_0 X \not\lesssim_{\oplus} P$ である。

注意 19. R を弱比較可能性を満たす正則環とする。定理 18 より、射影 R-加群 P がダイレクト・ファイナイトであるとは「$\aleph_0 X_R \lesssim P$ ならば $X = 0$」ということである。

注意 20. 射影加群がダイレクト・ファイナイトである為の注意 19 の判定条件は、一般の正則環では成立しない。何故ならば、$\aleph_0 X_R \lesssim R_R$ を満たす単項右イデアル $X(\neq 0)$ を持つ比較可能公理を満たすユニット正則環 R が存在するからである。

定理 18(I) より、次の結果は容易に導かれる。

系 21. 弱比較可能性を満たすダイレクト・ファイナイト正則環上の有限生成射影加群は、ダイレクト・ファイナイトである。このことは、弱比較可能性を満たすダイレクト・ファイナイト正則環上の全ての行列環はダイレクト・ファイナイト環であることを意味する。

系 21 の結果は、「ダイレクト・ファイナイト正則環上の全ての行列環はダイレクト・ファイナイト環か？」という問題 ([5, Open Problem 1]) に対して、弱比較可能性を満たす正則環では肯定的であるということを意味している。系 21 は更に次のように一般化される。

定理 22. R を弱比較可能性を満たす正則環とする。このとき、ダイレクト・ファイナイト射影 R-加群の同型な有限個の直和はダイレクト・ファイナイトである。

次に、弱比較可能性を満たす正則環上のダイレクト・ファイナイト射影加群の様子を考察する。一般に、非可算生成ダイレクト・ファイナイト射影加群を持つ弱比較可能性を満たすダイレクト・ファイナイト正則環は存在する。

[証明] F を体とし、$R = \prod_{i \in I} F_i$（但し $F_i = F$ で、I は 非可算集合）とする。このとき、R はべき零指数 1 である。従って、定理 14 から、R は単純環でない弱比較可能性を満たすダイレクト・ファイナイト正則環であることが分かる。ここで、$P_i := F_i \times (\prod_{j \neq i} 0)$ 及び $P := \oplus_{i \in I} P_i$ とすると、P は非可算生成ダイレクト・ファイナイト射影 R-加群であることが定理 18 より分かる。□

特に、弱比較可能性を満たすダイレクト・ファイナイト単純正則環や、ダイレクト・ファイナイトでない弱比較可能性を満たす正則環については、次の結果が成立する。

命題 23. R を弱比較可能性を満たすダイレクト・ファイナイト単純正則環とする。このとき、ダイレクト・ファイナイト射影 R-加群は有限生成か可算生成である。

定理 24. R をダイレクト・ファイナイトでない弱比較可能性を満たす正則環とする。このとき、ダイレクト・ファイナイト射影 R-加群は零のみである。即ち、零でない射影 R-加群はすべてダイレクト・ファイナイトでない。

この定理 24 は、ダイレクト・ファイナイトでない弱比較可能性を満たす正則環を考察する時に、効果的な働きをする。

3. 弱比較可能正則環上の有限生成射影加群

§3 では、弱比較可能性を満たす正則環上の有限生成射影加群の集まりに関する「Strict Cancellation Property」及び「Strict Unperforation Property」を考察する。この為に、次の補題 25 を必要とする。

補題 25. R を正則環とし、有限生成射影 R-加群 X, B, C, Y に対して $X \oplus C' \oplus Y \leq_{\oplus} B \oplus C \oplus Y$ かつ $C \cong^f C'$ が成立すると仮定する。このとき、直和分解 $B = B_1 \oplus B_1^*$, $B_n^* = B_{n+1} \oplus B_{n+1}^*$; $C = C_1 \oplus C_1^*$, $C_n^* = C_{n+1} \oplus C_{n+1}^*$ が存在し、$X \cong B_1 \oplus C_1$, $C_n \cong B_{n+1} \oplus C_{n+1}$, $B \oplus C \oplus Y = X \oplus Y \oplus fC_1 \oplus \cdots \oplus fC_n \oplus B_{n+1}^* \oplus C_{n+1}^*$ を満たす。

この補題 25 から、$C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_n \leq C$ かつ $C_1 \gtrsim C_2 \gtrsim \cdots \gtrsim C_n$ が成立し、$nC_n \lesssim C$ が分かる。このことから、弱比較可能性の適用が考えられ、次の結果が得られる。

定理 26 (Strict Cancellation Property)**.** R を弱比較可能性を満たすダイレクト・ファイナイト正則環とする。有限生成射影 R-加群 A, B, C に対して $A \oplus C \prec B \oplus C$ が成り立つならば、$A \prec B$ である。

ダイレクト・ファイナイトでない弱比較可能性を満たす正則環に対しては、次の結果が成立する。

定理 27. R をダイレクト・ファイナイトでない弱比較可能性を満たす正則環とする。有限生成射影 R-加群 A, B, C に対して $A \oplus C \lesssim B \oplus C$ $(B \neq 0)$ が成り立つならば、$A \prec B$ である。

上記定理 26 と定理 27 をあわせると、次の主定理が得られる。

定理 28. R を弱比較可能性を満たす正則環とする。有限生成射影 R-加群 A, B, C に対して $A \oplus C \prec B \oplus C$ $(B \neq 0)$ が成り立つならば、$A \prec B$ である。

また、この定理 28 を有効に用いて次の主定理が得られる。

定理 29 (Strict Unperforation Property)**.** R を弱比較可能性を満たす正則環とする。$nA \prec nB$ を満たす有限生成射影 R-加群 A, B と自然数 n が存在するならば、$A \prec B$ である。

注意 30. 単純正則環に対する弱比較可能性が、有限生成射影加群の集まりに関する「Strict Unperforation Property」と同値であることは、定理 10 で既に述べた。しかし、単純環とは限らない一般的な正則環に対する弱比較可能性は、有限生成射影加群の集まりに関する「Strict Unperforation Property」によって特徴付けることは出来ないことが分かる。何故ならば、環 $R := \prod_{n=1}^{\infty} M_n(F)$ (但し F は体) を考えると、R は右自己入射ユニット正則環だから Strict Unperforation Property を満たすことが知られているが、R は素環でもべき零指数が有限でもないので、定理 14(2) から R は弱比較可能性を満たさないからである。

注意 31([6]). 弱比較可能性を満たす単純ユニット正則環 R で、有限生成射影 R-加群の集まりに関する「Unperforation Property」を満たさない環が存在する。即ち、この環においては「$nA \lesssim nB$ かつ $A \not\lesssim B$」を満たす自然数 n と有限生成射影 R-加群 A, B が存在する。

正則環の弱比較可能性は剰余環に移行することはよく知られている。では、正則環上の弱比較可能性は森田同値であろうか。この問題を取り扱うために、次のように加群に対する弱比較可能性の概念を新しく導入する必要がある。

定義 32. R を正則環とする。有限生成射影 R-加群 M が弱比較可能性を満たすとは、M の各直和因子 N に対して、「$nL \lesssim M$（但し L は M の直和因子）ならば $L \lesssim N$」を満たす自然数 n が存在する時に言う。 このとき、M のどんな直和因子も弱比較可能性を満たすことが分かる。

上記主定理 29 を用いて、次の結果が得られる。

命題 33. R を正則環とする。このとき、次は同値である。
(a) R は弱比較可能性を満たす。
(b) すべての有限生成射影 R-加群は弱比較可能性を満たす。

記号 34. R を環とし、M を R-加群とする。このとき、$add(M_R) := \{N_R \mid N \lesssim_{\oplus} nM$ を満たす自然数 n が存在する $\}$ と定める。

R-加群 M の自己準同型環 $End_R(M)$ を S とする。圏 $add(M_R)$ と圏 $add(S_S)$ の間の $Hom_R({}_SM_R, -)$ と $- \otimes_S {}_SM_R$ による Hom 関手とテンソル関手の圏同値性から、次の結果が得られる。

補題 35. R を正則環とし、P を有限生成射影 R-加群とする。このとき、次は同値である。
(a) P が弱比較可能性を満たす。
(b) P の自己準同型環 $End_R(P)$ が弱比較可能性を満たす。

定義 32 に注意し命題 33 と補題 35 を用いて、次の結果が容易に証明できる。

定理 36. R を正則環とする。このとき、次は同値である。
(a) R は弱比較可能性を満たす。
(b) すべての有限生成射影 R-加群 P に対して、$End_R(P)$ は弱比較可能性を満たす。
(c) R に森田同値な環は弱比較可能性を満たす。
(d) すべての自然数 n に対して、行列環 $M_n(R)$ は弱比較可能性を満たす。
(e) ある自然数 n に対して、行列環 $M_n(R)$ は弱比較可能性を満たす。

この結果から、正則環上の弱比較可能性は森田同値であることが分かる。最後に、弱比較可能性を満たす正則環に関する有限性の問題を提起する。定理 6 より、弱比較可能性を満たすダイレクト・ファイナイト単純正則環はユニット正則環であることは知られている。しかし、単純環でない弱比較可能性を満たすダイレクト・ファイナイト正則環はユニット正則環となるかどうかは現在不明である。

References

[1] P. Ara and K.R. Goodearl, *The almost isomorphism relation for simple regular rings*, Publ. Mat. UAB **36** (1992), 369–388.

[2] P. Ara, K.R. Goodearl, E. Pardo and D.V. Tyukavkin, *K–theoretically simple von Neumann regular rings*, J. Algebra **174** (1995), 659–677.

[3] P. Ara, K.C. O'Meara and D.V. Tyukavkin, *Cancellation of projective modules over regular rings with comparability*, J. Pure Appl. Algebra **107** (1996), 19–38.

[4] P. Ara and E. Pardo, *Refinement monoids with weak comparability and applications to regular rings and C^*–algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **124(3)** (1996), 715–720.

[5] K.R. Goodearl, *Von Neumann Regular Rings*, Krieger, Malabar, Florida (1991).

[6] K.R. Goodearl, *Torsion in K_0 of unit-regular rings*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **38(2)** (1995), 331–341.

[7] M. Kutami, *On von Neumann regular rings with weak comparability*, J. Algebra **265** (2003), 285–298.

[8] M. Kutami, *On von Neumann regular rings with weak comparability II*, Comm. Algebra **33(9)** (2005), 3137–3147.

[9] K.C. O'Meara, *Simple regular rings satisfying weak comparability*, J. Algebra **141** (1991), 162–186.

Department of Mathematics
Faculty of Science
Yamaguchi University
1677-1 Yoshida, Yamaguchi 753-8512, JAPAN
E-mail address: kutami@yamaguchi-u.ac.jp