MACKEY FUNCTOR AND COHOMOLOGY OF FINITE GROUPS

AKIHIKO HIDA

Abstract. Let G be a finite group and H a subgroup. We consider an algebraic proof of Mislin's theorem which states that the restriction map from G to H on mod-p cohomology is an isomorphism if and only if H controls p-fusion in G. We follow the approach of P. Symonds (Bull. London Math. Soc. 36 (2004) 623-632) using cohomological Mackey functor for G. We will consider the structure of cohomology as a Mackey functor.

1. Introduction

G を有限群, k を標数 $p > 0$ の (代数的閉) 体とする. 一次元の自明な kG-加群を k で表すと, k 係数の cohomology は代数的には,

$$H^n(G, k) = \mathrm{Ext}^n_{kG}(k, k)$$

と定義される. H を G の部分群, $x \in G$ とするとき次の 3 つの線形写像がある.

$$\mathrm{res}^G_H : H^n(G, k) \longrightarrow H^n(H, k)$$

$$c_x : H^n(H, k) \longrightarrow H^n(H^x, k)$$

$$\mathrm{tr}^G_H : H^n(H, k) \longrightarrow H^n(G, k)$$

これらについて, 次の 2 つが成り立つ. $H, K \leq G$ とする.

$$\mathrm{tr}^G_H \mathrm{res}^G_H = |G : H| \tag{1.1}$$

$$\mathrm{res}^G_K \mathrm{tr}^G_H = \sum_{x \in K \backslash G/H} \mathrm{tr}^K_{H^x \cap K} \mathrm{res}^{H^x}_{H^x \cap K} c_x \tag{1.2}$$

2 番目のものは Mackey formula と呼ばれている. H が G の Sylow p-部分群を含むとすると, (1.1) より

$$\mathrm{res}^G_H : H^n(G, k) \longrightarrow H^n(H, k)$$

は単射であることがわかる. そこでこれがいつ同型になるか, ということが問題となる.

Theorem 1 ([5]). *次は同値である.*
(1) 任意の $n \geq 0$ *に対して, 制限写像*

$$\mathrm{res}^G_S : H^n(G, k) \longrightarrow H^n(H, k)$$

は同型写像である.
(2) H *の* p*-部分群* Q *と* $x \in G$ *について* $Q^x \subseteq H$ *となるならば,* $x \in C_G(Q)H$ *である.*

The detailed version of this paper will be submitted for publication elsewhere.

すなわち cohomology が同型であることと p-部分群達の構造が同じであることが同値となる. (2) から (1), すなわち p-部分群達の構造が cohomology を決めるということは, (1.2) と [2] の stable element に関する議論からわかることであり古くから知られている. 一方, 逆の (1) から (2), すなわち cohomology が G の p-部分群達の状況を決定するということは, 長い空白の後 1990 年に Mislin によって証明された.

位相幾何学的な立場から見ると, G の cohomology $H^n(G,k)$ は, G の分類空間 BG の cohomology である. [5] における証明はこの立場からのものでありホモトピー論における手法を用いている.

しかし Theorem 1 において $H^n(G,k)$ は代数的にも定義されるものであり, (2) の主張は群の内部構造に関するものであるので, 代数的な, あるいはモヂュラー表現を用いた証明ができないかというのが, ここでの問題である ([1]).

2. Mackey functor and cohomology of trivial source modules

Mislin の定理 Theorem 1 の代数的な証明に関して, Symonds は Mackey functor を応用することを考えている. M が G 上の cohomological Mackey functor であるとは, 各 $H \leq G$ に対して k-vector spaces $M(H)$ が与えられ, $H \leq K \leq G$, $x \in G$, に対して k-線形写像

$$R^K_H : M(K) \longrightarrow M(H)$$
$$I^K_H : M(H) \longrightarrow M(K)$$
$$c_x : M(H) \longrightarrow M(H^x)$$

が定義され ((1.1)(1.2) に類似した) いくつかの公理をみたすものである. 例えば部分群 H に cohomology $H^n(H,k)$ を対応させる対応

$$H^n(-,k)$$

は cohomological Mackey functor である. G 上の cohomological Mackey functor の概念はある有限次元多元環上の加群と同じことであり, 既約 (単純) な functor や組成因子などを考えることができる ([8], [9], [10]).

G 上の既約な cohomological Mackey functor は, 同型を除くと組 (P,V) (P は G の p-部分群, V は 既約な $k(N_G(P))$-加群, 共役と同型を除く) と一対一に対応している. (P,V) に対応する既約 cohomological Mackey functor を $S^G_{P,V}$ と表すことにする.

cohomology $H^n(-,k)$ の組成因子はどうなっているであろうか. p-部分群 P に対して, $H^n(P,k)$ は共役の作用により $N_G(P)$-加群となるが, 中心化群 $C_G(P)$ は自明に作用する. このことから $S^G_{P,V}$ が $H^n(-,k)$ の組成因子ならば $C_G(P)$ は V に自明に作用していなければならないことがわかる. 逆に, 次の結果は $H^n(-,k)$ が可能な組成因子を全て持つことを示している.

Theorem 2 ([7])**.** *P を G の p-部分群, V を既約な $k(N_G(P))$-加群とする. $C_G(P)$ が V に自明に作用しているならば, ある $n \geq 0$ に対して $S^G_{P,V}$ は $H^n(-,k)$ の組成因子である.*

Mislin の定理 Theorem 1 はこの Theorem 2 から導かれることがわかる. ただし [7] における Theorem 2 の証明も位相幾何学の深い結果を用いている ([4] 参照).

一方, Mackey functor に関するこの定理は trivial source を持つ加群の cohomology に関する命題に言い換えることができる. 直既約 kG-加群 M が, 部分群の自明な加群から誘導された加群の直和因子であるとき, M を trivial source を持つ加群という. これは同型を除き, 既約な cohomological Mackey functor と同じように組 (P,V) (P は G の p-部分

群, V は 既約な $k(N_G(P))$-加群, 共役と同型を除く) と一対一に対応している. 組 (P, V) に対応する trivial source を持つ加群を $M^G_{P,V}$ で表すことにする. $S^G_{P,V}$ が $H^n(-, k)$ の組成因子であるということを言い換えると, Theorem 2 は次と同値であることがわかる.

Theorem 3. *P を G の p-部分群, V を既約な $k(N_G(P))$-加群とする. $C_G(P)$ が V に自明に作用しているならば, ある $n \geq 0$ に対して $H^n(G, M^G_{P,V}) \neq 0$ となる.*

結局, Mislin の定理 Theorem 1 の証明のためにはこの (モヂュラー表現の命題ともいえる) Theorem 3 を証明すればよいことになった訳である. この Theorem 3 については, [6] と [3] において独立に, 代数的な証明が得られている.

3. Indecomposable direct summands of cohomology

ここでは G 上の cohomological Mackey functor としての $H^n(-, k)$ の構造をさらに考えてみたい. Theorem 2 により組成因子については (どの n に現れるか, ということは別として) 可能な全てのものが現れることがわかったので, 次に直既約因子を考えて見たい. 特に全ての $n \geq 0$ を考え,

$$H^*(-, k) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n(-, k)$$

の構造を調べたい. まずある意味で, これは有限生成である.

Proposition 4. *G に対してある n があり,*

$$M_n = \bigoplus_{i=0}^{n} H^i(-, k)$$

とおくと, 任意の $m \geq 0$ に対して H_n の有限個のコピーの直和からの Mackey functor としての全射

$$M_n \oplus M_n \oplus \cdots \oplus M_n \longrightarrow H^m(-, k)$$

がある.

一般に $H^n(-, k)$ の直和因子として, 直既約なものがどれくらい現れるか, 同型を除いて有限かどうかなどを調べたいのであるが, G 自身の cohomology だけでなく全ての部分群とその間の制限や transfer 写像を同時に考えていかなければならないためかなり複雑な状況となる. 一般的にはあまりよく分かっていないが, 次の例はかなり分かりやすい状況となっている.

Example 5. $p = 2$ とし G を位数が 8 の二面体群とする.

$$H^*(G, k) = k[\alpha, \beta, \zeta]/(\alpha\beta)$$

$$\deg \alpha = \deg \beta = 1, \quad \deg \zeta = 2$$

である. $H^n = H^n(-, k)$ とおく. α をかけることにより引き起こされる Mackey functor の準同型写像

$$H^1 \longrightarrow H^2$$

の像を αH^1, ζ の生成する H^2 の部分 Mackey functor を $< \zeta >$ などのように表すことにすると, $n \geq 1$ に対して,

$$H^{2n} \cong \alpha H^1 \oplus (n-1)\alpha\zeta H^1 \oplus < \zeta > \oplus (n-1)\beta\zeta H^1 \oplus \beta H^1$$

$$H^{2n+1} \cong \alpha H^1 \oplus (n-1)\alpha\zeta H^1 \oplus \zeta H^1 \oplus (n-1)\beta\zeta H^1 \oplus \beta H^1$$

となっている. ($(n-1)\alpha\zeta H^1$ は $n-1$ 個の直和である.)

特に H^n の直和因子として現れる直既約な functor はすべて $n=0$ から $n=4$ までに現れて, 同型なものを除くと有限個であることがわかる.

References

[1] J. L. Alperin, *On a theorem of Mislin*, J. Pure Appl. Algebra, 206 (2006) 55-58.

[2] H. Cartan and S. Eilenberg, Homological algebra, Princeton University Press, 1956.

[3] A. Hida, *Control of fusion and cohomology of trivial source modules*, preprint (2006).

[4] M. Kameko, Modular representation theory and stable decompostion of classifying spaces, 数理解析研究所講究録 1466, 有限群のコホモロジー論とその周辺, (2006) 9-20.

[5] G. Mislin, *On group homomorphisms inducing mod-p cohomology isomorphisms*, Comment. Math. Helvetici 65 (1990) 454-461.

[6] T. Okuyama, *On a theorem of Mislin on cohomology isomorphism and control of fusion*, 数理解析研究所講究録 1466, 有限群のコホモロジー論とその周辺, (2006) 86-92.

[7] P. Symonds, *Mackey functors and control of fusion*, Bull. London Math. Soc. 36 (2004) 623-632.

[8] J. Thévenaz and P. J. Webb, *Simple Mackey functors*, Proc. of the Second International Group Theory Conference (Bressanone, 1989), Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. 23 (1990) 299-319.

[9] J. Thévenaz and P. J. Webb, *The structure of Mackey functors*, Trans. Amer. Math. Soc. 347 (1995) 1865-1961.

[10] T. Yoshida, *On G-functors (II): Hecke operators and G-functors*, J. Math. Soc. Japan 35 (1983) 179-190.

Faculty of education
Saitama University
Shimo-okubo 255, Sakura-ku, Saitama-city, 338-8570 JAPAN
E-mail address: ahida@math.edu.saitama-u.ac.jp