AZUMAYA'S CONJECTURE AND HARADA RINGS

KAZUTOSHI KOIKE

Abstract. Azumaya conjectured that every exact ring has a self-duality. Recently we study self-duality of (quasi-)Harada rings and obtain several results about Azumaya's conjecture and related problems in [10].

1. 研究の背景

東屋は 1983 年に [3] において，次の予想を提示した．

東屋の予想. すべての exact 環は self-duality をもつであろう．

exact 環のクラスは serial 環を含んでいるが，これについては，self-duality の理論において非常に有名な結果

定理 A (Dischinger-Müller [5])**.** すべての serial 環は weakly symmetric self-duality をもつ．

が知られている．exact 環と serial 環のクラスの間には局所分配的環と呼ばれる環のクラスがあるので，

問題 B. すべての局所分配的環は self-duality をもつか?

が問題となる．東屋の予想が肯定的であれば，これも肯定的であるはずだが，いまだに未解決である．筆者は [10] において原田環や準原田環の研究を行い，それらを応用することにより，東屋の予想や問題 B に関するさまざまな結果を得た．この報告集の主な結果は，論文 [10] (特に第 5 節) によるものであり，証明等は [10] を参照されたい．

以下この報告集では，すべての環は単位元をもち, すべての加群は単位的であるとする．扱う環は主にアルチン環 (両側アルチン環) である．加群 M に対して, radical と socle それぞれ $J(M)$ と $S(M)$ で表す．

2. Self-duality

まず最初に self-duality の定義を思い出しておこう．アルチン環 R, S 上の両側加群 ${}_SU_R$ に対して，双対圏手 $\mathrm{Hom}(-, U)$ が有限生成右 R 加群全体の圏と有限生成左 S 加群全体の圏との間の duality を定めるとき，両側加群 ${}_SU_R$ は **Morita duality を定める**という．特に，Morita duality を定める両側加群 ${}_RU_R$ が存在するとき，環 R は **self-duality** をもつという．QF 環 R において正則両側加群 ${}_RR_R$ は self-duality を定めるので，QF 環は self-duality をもつ環の典型的な例である．

This note is mainly based on Section 5 of [10] and is in a final form.

self-dualityを定める両側加群 ${}_RU_R$ について，R の任意の原始冪等元 e に対して，$S(eU) \cong eR/J(eR)$ が成り立つとき，${}_RU_R$ は **weakly symmetric self-duality を定める**という．また，R の任意のイデアル I に対して，$l_R l_U(I) = I$ が成り立つとき，${}_RU_R$ は **good self-duality を定める**という．ここで l_R や l_U は左 annihilator を表す．${}_RU_R$ が good self-duality を定めれば，weakly symmetric self-duality を定める．体 K 上有限次元多元環 R において，(R,R) 両側加群 $\mathrm{Hom}_K(R,K)$ は good self-duality を定める．また，定理 A として述べたように，serial 環は weakly symmetric self-duality (実際には good self-duality) をもつ．

R を QF 環，$e_1, e_2, \ldots, e_n$ を R の直交原始冪等元の基本集合とする．このとき $S(e_{\sigma(i)}R) \cong e_iR/J(e_iR)$ $(1 \leq i \leq n)$ を満たす $\{1, 2, \ldots, n\}$ の置換 σ が存在する．この置換を R の**中山置換**という．中山置換が恒等的な QF 環を **weakly symmetric** であるという．R の環自己同型写像 ϕ が $\phi(e_i) = e_{\sigma(i)}$ $(1 \leq i \leq n)$ を満たすとき，ϕ を QF 環 R の**中山自己同型写像**という．basic な QF 環については，weakly symmetric self-duality の存在と中山自己同型写像の存在は同値である．

Morita duality を定める両側加群の列 ${}_{R_1}U_{1R_2}, {}_{R_2}U_{2R_3}, \ldots, {}_{R_m}U_{mR_{m+1}}$ で $R = R_1 = R_{m+1}$ となるものが存在するとき，環 R は **almost self-duality** をもつという．almost self-duality は self-duality の一般化である．

このように，さまざまな種類の self-duality を考えるのは，それぞれ環の変形 (剰余環，有限生成射影的加群の自己準同型環，等) への遺伝の状況が異なるからである．端的に言うと，good self-duality が最も遺伝しやすく，(単なる) self-duality が最も遺伝しにくい．

3. serial 環と局所分配的環，exact 環

任意の直既約射影的右加群が uniserial (すなわち，部分加群全体が chain をなす) であるようなアルチン環を**右 serial 環**という．右 serial かつ左 serial なアルチン環を **serial 環**という．定理 A として述べたように，Dischinger と Müller [5] はすべての serial 環は weakly symmetric self-duality をもつことを証明した．一方 Waschbüsch [11] は，すでに Amdal と Ringdal [1] によって serial 環における self-duality の存在は主張されていることを指摘し，彼自身も証明を与えている．しかしながら，それらの証明は技巧的である．Haack [6] は serial 環における self-duality の存在の一般的な証明には成功しなかったものの，いくつかの部分的な結果を示した．そのうちの一つの「任意の (basic な) serial QF 環は weakly symmetric self-duality (中山自己同型写像) をもつ」は，証明が平易であるだけでなく，その結果自体，加戸・大城 [7] によって与えられ，その後同様な方向により Ánh [2] や筆者 (定理 8 参照) によっても与えられた serial 環における self-duality の存在の別証明の基礎ともなるので，ここで述べておこう．

R を basic で環として直既約な serial QF 環とする．$e_1, e_2, \ldots, e_n$ を R の直交原始冪等元の完全集合で，$e_1R, e_2R, \ldots, e_nR$ が Kupisch series，すなわち，任意の $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $e_iR \to J(e_{[i+1]}R)$ が射影被覆となるものとする．ただし，$[j]$ は n を法とする j の最小正剰余を表す．R は QF であるから，$e_1R, e_2R, \ldots, e_nR$ は同じ組成列の長さをもつ．特に R の中山置換は，ある m に対して $i \mapsto [i-m]$ で与えられる．R が QF 環として weakly symmetric の場合，恒等写像が中山自己同型写像である．

定理 1 (Haack [6]). 以上の設定において，R が QF 環として weakly symmetric でない場合，R の環自己同型写像 ϕ で，$\phi(e_i) = e_{[i-1]}$ $(1 \le i \le n)$ を満たすものが存在する．特に ϕ^m は R の中山自己同型写像となる．したがって，任意の (basic な) serial QF 環は weakly symmetric self-duality (中山自己同型写像) をもつ．

uniserial 加群の一般化の 1 つとして，部分加群全体の束が分配的なとき，加群は**分配的 (distributive)** であるという．この条件は少し分かりにくいが，分配的加群は，任意の剰余加群の socle が同型な単純加群の 2 個以上の直和を含まない，という使いやすい条件により特徴付けられることが知られている．

任意の直既約射影的左または右加群が分配的なとき，アルチン環は**局所分配的 (locally distributive)** であるという．一般に，good self-duality を定める両側加群は weakly symmetric self-duality を定めるが，局所分配的環上では逆が成り立つ．以後，局所分配的環においては weakly symmetric self-duality について述べることにする．

例 2. K を体，Q を quiver $\alpha \circlearrowright 1 \xrightarrow[\beta]{} 2$ とし，$R = KQ/\langle \alpha^2, \beta\alpha \rangle$ をパス多元環の剰余多元環とするとき，直既約射影的加群の Loewy series は $R_R = \begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix} \bigoplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$，${}_RR = \begin{smallmatrix}1\\1\,2\end{smallmatrix} \bigoplus 2$ である．したがって，任意の直既約射影的左または右 R 加群は分配的であるから，R は局所分配的環である．

アルチン環 R は，両側イデアルとしての組成列 (すなわち，各組成因子が両側加群として単純なもの)

$$R = I_0 > I_1 > I_2 > \cdots > I_n = 0$$

で，各組成因子 I_i/I_{i+1} は (R, R) 両側加群として平衡的 (すなわち，すべての自己準同型写像は R の元による乗法写像で与えられる) なものが存在するとき，**exact 環**であるという．局所分配的環は exact 環であることが知られている．したがって，東屋の予想の前に局所分配的環の self-duality (問題 B) を考える必要がある．

4. 原田環と準原田環

大城によって導入され，深く研究されている原田環と呼ばれる環のクラスがある．原田環はさまざまな特徴づけをもつが，ここでは，射影的右加群全体のクラスが本質的拡大で閉じているようなアルチン環として**左原田環 (left Harada ring)** を定義することとする．左原田環は QF-3 である．また，任意の直既約射影的右加群が擬移入的 (quasi-injective) であるとき，アルチン環は**左準原田環 (left quasi-Harada ring)** であるという．(左準原田環の概念は左原田環の一般化として，馬場・岩瀬 [4] によって左アルチン環に対して定義されたが，必然的に右アルチンになることを筆者が示した．) 左準原田環 R は**右 QF-2** (すなわち，任意の直既約射影的右 R 加群の socle は単純) であるが，局所分配的環については逆が成り立つ．

補題 3. 局所分配的右 QF-2 環は左準原田環である．

したがって局所分配的右 QF-2 環について，準原田環の研究を応用することができる．

例 4. (1) R を例 2 の局所分配的右 QF-2 環とする．補題 3 より R は左準原田環で，行列表現 $R = \begin{bmatrix} A & 0 \\ J(A) & A/J(A) \end{bmatrix}$ をもつ．ただし，$A = e_1Re_1$ で e_1 は R の頂点 1 に対応する冪等元とする．A は $J(A)^2 = 0$ なる局所 serial 環である．

(2) A を (1) と同じ局所 serial 環とするとき，$\begin{bmatrix} A & A/J(A) \\ J(A) & A/J(A) \end{bmatrix}$ は左原田環 (serial 環) である．

大城は原田環の構造を深く研究し，すべての片側原田環は QF 環から構成されることを証明した．我々は同様に準原田環も QF 環から構成されることを示した．

定理 5. 任意の左準原田環 R に対して，QF 環 S が存在して，R は S から出発して，ある種の部分環の剰余環を取るという操作を有限回繰り返すことによって復元できる．

したがって，左準原田環に関するある種の議論は QF 環に帰着できる．特に補題 3 より，局所分配的右 QF-2 環については，局所分配的 QF 環に帰着できるのである．

例 6. 例 4 (1) の左準原田環 R は，QF 環 $S = \begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}$ の部分環 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ J(A) & A \end{bmatrix}$ のイデアル $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J(A) \end{bmatrix}$ による剰余環と同型である．

原田環は QF 環や serial 環の一般化と見なすことができる．QF 環や serial 環は self-duality をもつため，原田環についても self-duality の有無が問題となり，加戸・大城は次の定理を証明した．

定理 7 (加戸・大城 [7])**.** 次は同値である．

(A) 任意の左原田環は self-duality をもつ．
(B) 任意の左原田環は weakly symmetric self-duality をもつ．
(C) 任意の (basic な) QF 環は weakly symmetric self-duality (中山自己同型写像) をもつ．

この後，筆者は [8] において self-duality をもたない左原田環が存在することを示したが，この定理 7 の手法は有用であり，今回の研究でも重要な役割を果たした．なお，左原田環は必ずしも self-duality をもたないものの，つねに almost self-duality をもつことを，やはり筆者 [9] は証明している．

5. 主結果と関連する問題

最後に，東屋の予想や問題 B に関する主結果と関連する問題について述べる．

すでに述べたように，補題 3 や定理 5 を用いれば，局所分配的右 QF-2 環に関するさまざまな議論が局所分配的 QF 環に関する問題に帰着できる．特に，局所分配的右 serial 環の weakly symmetric self-duality の問題は serial QF 環における問題に帰着されるが，定理 1 より serial QF 環は weakly symmetric self-duality をもつ．したがって，serial 環の weakly symmetric self-duality (定理 A) は次のように改良できる．

定理 8. すべての局所分配的右 serial 環は weakly symmetric self-duality をもつ.

次の定理は，直交原始冪等元の個数が高々2 個の局所分配的 QF 環は weakly symmetric self-duality をもつことから従う.

定理 9. 局所分配的右 QF-2 環 R について，右 socle $S(R_R)$ が高々2 個の非同型な単純加群しか含まない場合，R は weakly symmetric self-duality をもつ.

これらの定理は東屋の予想や問題 B の部分的な解答を与えている．一般の局所分配的右 QF-2 環の self-dualty についてはまだ分からないが，定理 7 の手法を用いることにより，次のように言い換えることができた.

定理 10. 次は同値である.

(A) 任意の局所分配的右 QF-2 環は self-duality をもつ.
(B) 任意の局所分配的右 QF-2 環は weakly symmetric self-duality をもつ.
(C) 任意の (basic な) 局所分配的 QF 環は weakly symmetric self-duality (中山自己同型写像) をもつ.

なお，次のように局所分配的右 QF-2 環における almost self-duality の存在は示すことができた.

定理 11. 任意の局所分配的右 QF-2 環は almost self-duality をもつ.

定理 10 と同様に定理 7 の手法を用いて，東屋の予想や問題 B も次のように言い換えられる.

定理 12. 次は同値である.

(A) 任意の局所分配的環 (resp. exact 環) は self-duality をもつ.
(B) 任意の局所分配的環 (resp. exact 環) は weakly symmetric self-duality をもつ.

定理 8, 9, 11 から，東屋の予想や問題 B の前に，局所分配的右 QF-2 環における self-duality の問題を解決すべきであると思われるが，定理 10 よりこれは次と同じである.

問題 13. すべての (basic な) 局所分配的 QF 環は weakly symmetric self-duality (中山自己同型写像) をもつか?

basic な serial QF 環が中山自己同型写像をもつことは，定理 1 で述べたように，serial QF 環の場合は中山置換の形が決まっており扱いやすいからだと考えられる．これから，basic な局所分配的 QF 環における中山自己同型写像の存在を論じるため，まず中山置換に serial QF 環の場合と同様な制限を課すことが考えられる．しかしながら，局所分配的 QF 環の中山置換は多様である．実際，与えられた任意の置換を中山置換としてもつ，環として直既約な局所分配的 QF 環が存在する ([10, Example 5.10])．したがって，問題 13 を一般的に解決するためには，最終的には中山置換に制限を課すことはできない.

References

[1] I. K. Amdal and F. Ringdal. Catégories unisérielles. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 267:A85–A87 and A247–A249, 1968.

[2] P. N. Ánh. Selfdualities and serial rings, revisited. *Bull. London Math. Soc.*, 38(3):411–420, 2006.

[3] G. Azumaya. Exact and serial rings. *J. Algebra*, 85(2):477–489, 1983.

[4] Y. Baba and K. Iwase. On quasi-Harada rings. *J. Algebra*, 185(2):544–570, 1996.

[5] F. Dischinger and W. Müller. Einreihig zerlegbare artinsche Ringe sind selbstdual. *Arch. Math. (Basel)*, 43(2):132–136, 1984.

[6] J. K. Haack. Self-duality and serial rings. *J. Algebra*, 59(2):345–363, 1979.

[7] J. Kado and K. Oshiro. Self-duality and Harada rings. *J. Algebra*, 211(2):384–408, 1999.

[8] K. Koike. Examples of QF rings without Nakayama automorphism and H-rings without self-duality. *J. Algebra*, 241(2):731–744, 2001.

[9] K. Koike. Almost self-duality and Harada rings. *J. Algebra*, 254(2):336–361, 2002.

[10] K. Koike. Self-duality of quasi-Harada rings and locally distributive rings. *J. Algebra*, 302(2):613–645, 2006.

[11] J. Waschbüsch. Self-duality of serial rings. *Comm. Algebra*, 14(4):581–589, 1986.

Okinawa National College of Technology
2-19-2 Ohigashi Nago Okinawa 905-0016 JAPAN
E-mail address: koike@okinawa-ct.ac.jp