CHARACTER THEORY OF SEMISIMPLE BI-FROBENIUS ALGEBRAS

YUKIO DOI

Abstract. Bi-Frobenius algebras, or briefly bF algebras, were introduced by the author and Takeuchi in [DT]. They are Frobenius algebras with coalgebra structures, and generalize both finite-dimensional Hopf algebras and scheme rings (Bose-Mesner algebras) of (non-commutative association) schemes. In this paper we discuss the character theory of symmetric Frobenius algebras and its application to our bF algebras. Our approach to the representation theory of symmetric algebras was inspired primarily by the work of Geck-Pfeiffer [GP]. But our methods are very different. We begin with a general discussion of symmetric Frobenius algebras and their properties, and prove the semisimplicity criterion in terms of the volume.

はじめに

バイフロベニウス代数 (簡単に bF 代数) は有限次元ホップ代数の自然な一般化として土井・竹内によって導入された ([DT]). ある種の余代数構造をもつフロベニウス代数のことである. そしてバイフロベニウス代数の重要なクラスに群環的代数 (group-like algebra)([D2]) がある. アソシエーションスキームに付随する Bose-Mesner 代数を抽象化したものである. 本報告では表現論の観点からバイフロベニウス代数についての概説を行う. 予備知識はなるべく仮定しない. その為まず一般のフロベニウス代数の復習から始め (1 節), バイフロベニウス代数の基本性質を解説し (2 節), 双対基底から定まるボリュームの媒介を強調する扱い方により, Geck-Pfeiffer による対称代数の指標理論 ([GP]) の整理改良 (3 節) を行う.

1. フロベニウス代数と対称代数

1.1. **フロベニウス代数**. k を基礎体とし, Hom や $\otimes$ は k 上でとる. A を (k 上の) 代数とするとき, 双対空間 $A^* = \mathrm{Hom}(A, k)$ は次の作用により両側 A 加群となる：

$$(a \rightharpoonup f)(b) = f(ba), \quad (f \leftharpoonup a)(b) = f(ab) \qquad (a, b \in A).$$

フロベニウス代数とは, 有限次元代数 A と $\phi \in A^*$ の組 (A, ϕ) で写像

$$\theta : A \to A^*,\ a \mapsto (\phi \leftharpoonup a)$$

が全単射になるものをいう. 右 A 加群として A と A^* が同型であるということである. θ の双対写像 $\theta^* : A^{**} \to A^*$ と自然同型 $\iota : A \cong A^{**}$ との合成 $\theta' = \theta \circ \iota$ を計算すると

$$< \theta'(a), b >=< \iota(a), \theta(b) >=< \theta(b), a >=< \phi \leftharpoonup b, a >=< a \rightharpoonup \phi, b > .$$

ただし, 記号 $< f, a >$ は $f(a)$ を表す ($f \in A^*,\ a \in A$). したがって, 写像

$$\theta' : A \to A^*,\ a \mapsto (a \rightharpoonup \phi)$$

The detailed version of this paper will be submitted for publication elsewhere.

が左 A 加群同型を与える．θ は線形同型

$$\Theta : A\otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\theta} A\otimes A^* \cong \mathrm{End}(A). \tag{1.1}$$

を引き起こし，この同型で id_A に対応する $A\otimes A$ の元 $\sum_i x_i\otimes y_i$ をフロベニウス代数 (A,ϕ) の**双対基底**とよぶ．定義より

$$\sum_i x_i\phi(y_i a) = a \qquad (a\in A) \tag{1.2}$$

である．$\{x_i\}$ を1次独立に選べば $\phi(y_i x_j)=\delta_{ij}$ が成り立つ．また (1.2) は等式

$$\sum_i a x_i\otimes y_i = \sum_i x_i\otimes y_i a \qquad (a\in A), \tag{1.3}$$

を導く．実際，任意の $b\in A$ に対し，

$$\begin{aligned}\Theta(\sum_i a x_i\otimes y_i)(b) &= \sum_i a x_i\phi(y_i b) = ab \qquad (\text{by } (1.2))\\ &= \sum_i x_i\phi(y_i ab) = \Theta(\sum_i x_i\otimes y_i a)(b).\end{aligned}$$

よって A の元 $v := \sum_i x_i y_i$ は中心 $Z(A)$ に属す．v をフロベニウス代数 (A,ϕ) の**ボリューム**とよぶ．以上の考察から，

$$\boxed{v \text{ が可逆元} \quad\Longrightarrow\quad A \text{ は分離的代数 (とくに半単純)}}$$

がただちにわかる（$\sum_i v^{-1}x_i\otimes y_i$ がいわゆる分離べき等元になるから）．この逆については3節で考察する (ϕ が対称的で k の標数が 0 なら正しい)．

写像 $\overline{\theta} : A^*\to A$ を $\overline{\theta}(f) := \sum_i f(x_i)y_i$ で定義する，ただし $\sum_i x_i\otimes y_i$ は (A,ϕ) の双対基底．このとき，$f\in A^*$, $a\in A$ に対し

$$\begin{aligned}\theta(\overline{\theta}(f))(a) &= (\phi \leftharpoonup \overline{\theta}(f))(a)\\ &= \phi(\sum_i f(x_i)y_i a) = \sum_i f(x_i)\phi(y_i a)\\ &= f(\sum_i x_i\phi(y_i a)) = f(a)\end{aligned}$$

であるから，$\theta\circ\overline{\theta} = \mathrm{id}_{A^*}$. θ は全単射であるから，$\overline{\theta}$ は θ の逆写像と一致し，等式 $\overline{\theta}\circ\theta = \mathrm{id}_A$ が成り立つ．具体的に書き下して

$$\sum \phi(a x_i)y_i = a \qquad (a\in A). \tag{1.4}$$

を得る．

双対的に，C を (k 上の) 余代数，その余積を $\Delta : C\to C\otimes C$，余単位を $\varepsilon : C\to k$ とする．$c\in C$ に対し，$\Delta(c)$ を

$$\sum_{(c)} c_{(1)}\otimes c_{(2)} \quad \text{または} \quad \sum c_1\otimes c_2$$

で表す．双対空間 C^* は convolution 積 $(f*g)(c)=\sum f(c_1)g(c_2)$ により代数 (ε が単位元) となり，C は次の作用により両側 C^* 加群となる：

$$f \rightharpoonup c := \sum c_1 f(c_2), \quad c \leftharpoonup f := \sum f(c_1)c_2.$$

有限次元余代数 C と C の元 t の組 (C,t) が次の条件をみたすとき，**フロベニウス余代数**であるという：

$$\text{写像 } \kappa : C^* \to C,\ \kappa(f)=(t \leftharpoonup f) \text{ が全単射}.$$

これは (C^*,t) がフロベニウス代数であることと同値である．

1.2. **対称フロベニウス代数**. フロベニウス代数 (A,ϕ) に対し，

$$\phi(ab)=\phi(b\mathcal{N}(a)) \qquad (a,b\in A)$$

をみたす代数自己同型 $\mathcal{N}:A\to A$ が一意的に定まる．これを A の ϕ に関する**中山自己同型**という．$\mathcal{N}=id_A$ のとき (すなわち $\phi(ab)=\phi(ba)$)，(A,ϕ) は**対称フロベニウス代数**であるという．ただ単に**対称代数**ということもある．対称性と双対基底の関係について次が成り立つ．

補題 1．(A,ϕ) をフロベニウス代数，$\sum_i x_i\otimes y_i$ をその双対基底とする．(A,ϕ) が対称代数であるための必要十分条件は，

$$\sum_i x_i\otimes y_i=\sum_i y_i\otimes x_i \tag{1.5}$$

が成り立つことである．

証明. (1.5) が成り立つと仮定すれば，任意の $a\in A$ に対し，

$$\mathcal{N}(a) =^{(1.2)} \sum_i x_i\phi(y_i\mathcal{N}(a))=\sum_i \phi(ay_i)x_i =^{(1.5)} \sum_i \phi(ax_i)y_i =^{(1.4)} a$$

となり，(A,ϕ) は対称代数となる．逆に $\mathcal{N}=\mathrm{id}$ とすれば，

$$\sum_i y_i\phi(x_ia)=\sum_i y_i\phi(ax_i) =^{(1.4)} a$$

であり，これは $\Theta(\sum_i y_i\otimes x_i)=\mathrm{id}$ を意味する．よって双対基底の定義より (1.5) が成り立つ． □

代数 A の右正則表現の指標を χ_A で表す．すなわち $R_a : A\to A,\ b\mapsto ba$ とおき，$\mathrm{Tr}:\mathrm{End}(A)\to k$ を通常のトレース写像としたとき，$\chi_A(a)=\mathrm{Tr}(R_a)$ である．

次の補題 2 は対称代数の指標理論 (3 節) においてキーとなるものである．次のよく知られた事実を用いて証明される：有限次元ベクトル空間 M に対して同一視 $M^*\otimes M\cong \mathrm{End}(M)$, $(f\otimes m)(n):=f(n)m$ を行ったとき，$\mathrm{Tr}(f\otimes m)=f(m)$ が成り立つ．

補題 2．(A,ϕ) を対称代数とし，v をそのボリュームとする．このとき

$$\chi_A(a)=\phi(va) \qquad (a\in A)$$

が成り立つ．とくに, $\phi(v)=\dim A$.

証明．　$R_a(b) = ba = \sum_i x_i\phi(y_i ba)$ であるから

$$R_a = \sum_i (a \rightharpoonup \phi \leftharpoonup y_i) \otimes x_i \quad \text{in } A^* \otimes A.$$

したがって $\chi_A(a) = \sum_i \phi(y_i x_i a) =^{(1.5)} \sum_i \phi(x_i y_i a) = \phi(va)$. □

2. バイフロベニウス代数

2.1.　H を有限次元代数とし，余代数構造 $\Delta : H \to H \otimes H$, $\varepsilon : H \to k$ をもつとする．ただし Δ, ε の代数射は仮定しない．元 $\phi \in H^*$, $t \in H$ を与えたとき，写像 $S : H \to H$ を

$$S(h) := t \leftharpoonup (h \rightharpoonup \phi) = \sum \phi(t_1 h)t_2$$

で定義する．次の (BF1) から (BF6) をみたすとき，4 組 (H, ϕ, t, S) を**バイフロベニウス代数** (bi-Frobenius algebra) または短く **bF 代数**とよぶ.

(BF1) ε は代数射，すなわち $\varepsilon(hh') = \varepsilon(h)\varepsilon(h')$, $\varepsilon(1) = 1$.
(BF2) H の乗法単位元 1 は $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ をみたす.
(BF3) (H, ϕ) はフロベニウス代数.
(BF4) (H, t) はフロベニウス余代数.
(BF5) S は反代数射，すなわち $S(hh') = S(h')S(h)$, $S(1) = 1$.
(BF6) S は反余代数射，すなわち $\Delta(S(h)) = \sum S(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)})$, $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$.

S を bF 代数のアンチポードとよぶが，ホップ代数のアンチポードの条件 $S * id = u \circ \varepsilon = id * S$ はみたしていない．$S(h) = t \leftharpoonup (h \rightharpoonup \phi) = (\kappa \circ \theta')(h)$ であり，κ, θ' が全単射であるので S も全単射となる．よって $h = \sum S^{-1}(t_2)\phi(t_1 h)$ が任意の $h \in H$ に対していえ，

$$\sum S^{-1}(t_2) \otimes t_1$$

が (H, ϕ) の双対基底を与えることがわかった．.

bF 代数 $H = (H, \phi, t, S)$ は有限次元であるから，その双対空間 H^* はまた代数かつ余代数になっている．積は convolution 積で，余積 $\Delta(f) = \sum f_1 \otimes f_2 \in H^* \otimes H^* = (H \otimes H)^*$ は

$$\Delta f(h \otimes l) = \sum f_1(h) f_2(l) = f(hl), \qquad (f \in H^*,\ h, l \in H)$$

で与えられる．そして 4 組 (H^*, t, ϕ, S^*) が bF 代数をなすことが容易に確かめられる．これを H の**双対** bF 代数という.

2.2. **bF 代数の例.** (1) 群環. 有限群 G の群環 kG を考える．通常の方法 $\Delta(x) = x \otimes x$, $\varepsilon(x) = 1$ $(x \in G)$ で余代数となる．$\phi \in (kG)^*$ を $\phi(g) = \delta_{1g}$ で定義し，$t := \sum_{g \in G} g \in kG$ とする．この ϕ と t から作られた写像 $S : h \mapsto \sum \phi(t_1 h)t_2$ は実は逆元対応 $G \ni x \mapsto x^{-1} \in G$ と一致する．これより (kG, ϕ, t, S) が bF 代数であることがわかる．条件 BF1,2,5,6 は問題ない．BF3,4 のチェックは S が全単射であることからでる．なぜなら，一般の有限次元代数かつ余代数 H があって，ある $\phi \in H^*$, $t \in H$ から作られた写像 $S = \kappa \circ \theta'$ が全単射とすると，θ' κ はともに全単射となる ($\dim H = \dim H^*$ だから)．よって BF3,4 が成り立つ．(kG, ϕ) の双対基底は $\sum_{x \in G} x^{-1} \otimes x$，ボリュームは $|G| \cdot 1$ である．明らかに $\sum_{x \in G} x^{-1} \otimes x = \sum_{x \in G} x \otimes x^{-1}$ であるから，または直接 $\phi(xy) = \phi(yx)$, $(x, y \in G)$ が確かめられて，(kG, ϕ) は対称代数となる.

(2) ホップ代数． H を有限次元ホップ代数とする．H^* および H の右積分の対 (ϕ, t) で $\phi(t)=1$ をみたすものを選ぶ (選べる)．これから得られた写像 S はホップ代数のアンチポード自身と一致する ([DT, 2.4 Example])．よく知られているように有限次元ホップ代数のアンチポードは全単射，したがって BF3,4 をみたし，また BF5,6 もみたしているから，(H,ϕ,t,S) は bF 代数となる．(H,ϕ) の双対基底は bF 代数と同じ $\sum S^{-1}(t_2)\otimes t_1$ で与えられ，ボリュームはアンチポードの性質から

$$v=\sum S^{-1}(t_2)t_1=S^{-1}(\sum t_1S(t_2))=\varepsilon(t)1$$

となる．(注意：bF 代数のボリュームは $v=\sum S^{-1}(t_2)t_1$ までで，これ以上簡単にならない．)

(3) 群環的代数． A を代数射 $\varepsilon : A\to k$ をもつ有限次元 (k-) 代数とし，単位元 1 を含む (k-) 基底 $\mathbf{B}=\{b_0=1,b_1,\dots,b_d\}$ が指定されているとする．さらに $S^2=\mathrm{id}$ をみたす基底要素間の置換 $S:\mathbf{B}\to\mathbf{B}$ が与えられていて次の 3 条件をみたすとき，4 組 $(A,\varepsilon,\mathbf{B},S)$ を**群環的代数** (group-like algebra) という．(添え字 i,j,k は 0 から d までを動く)
(G1) $\varepsilon(b_{i^*})=\varepsilon(b_i)\neq 0$;　ただし b_{i^*} は $S(b_i)$ を表す．
(G2) $p_{ij}^k=p_{j^*i^*}^{k^*}$．ただし p_{ij}^k は $\mathbf{B}$ に関する構造定数，i.e., $b_ib_j=\sum_k p_{ij}^kb_k$.
(G3) $p_{ij}^0=\delta_{ij^*}\varepsilon(b_i)$.

　このとき，各 b_i に対し $\Delta(b_i)=\frac{1}{\varepsilon(b_i)}b_i\otimes b_i$ とおいて，A は余代数になる (余単位元は初めに与えられた ε)．また ϕ, t は群環をまねて $\phi(b_i)=\delta_{0i}$, $t:=\sum_i b_i$ とおく．このとき，

$$\sum\phi(t_{(1)}b_j)t_{(2)}=\sum_{i=0}^{d}\frac{1}{\varepsilon(b_i)}\phi(b_ib_j)b_i=\sum_{i=0}^{d}\frac{1}{\varepsilon(b_i)}p_{ij}^0b_i=^{(G3)}=b_{j^*}$$

となり，(A,ϕ,t,S) は bF 代数になる．(A,ϕ) は双対基底 $\sum_i\frac{1}{\varepsilon(b_i)}b_{i^*}\otimes b_i$ をもち，ボリュームは $v=\sum_i\frac{1}{\varepsilon(b_i)}b_{i^*}b_i$ で明らかに対称代数である．

(4) スキーム環. $k=\mathbb{C}$ (複素数体) とし，$X=\{x_1,\dots,x_n\}$ を有限集合とする．直積集合 $X\times X$ の部分集合 (すなわち X の関係) R に対し，その転置 ${}^tR$ を ${}^tR=\{(y,x)|(x,y)\in R\}$ と定義する．また $x\in X$ に対し，$R(x):=\{z\in X\mid (x,z)\in R\}$ とおく．$X\times X$ の (直和) 分割

$$X\times X=R_0\cup\cdots\cup R_d$$

が以下の 3 条件 (AS1), (AS2), (AS3) をみたすとき，組 $(X,\{R_i\}_{0\le i\le d})$ を**アソシエーションスキーム** (association scheme) または単に**スキーム**という ([BI],[Z]).

(AS1) $R_0=\{(x,x)|x\in X\}$.
(AS2) 各 R_i に対し，${}^t(R_i)=R_j$ をみたす $j\in\{0,\dots,d\}$ が存在する．
　　($j=i^*$ で表す．したがって ${}^t(R_i)=R_{i^*}$, $0^*=0$ である．)
(AS3) 各 R_i,R_j,R_k および $(x,y)\in R_k$ に対し，$|R_i(x)\cap R_{j^*}(y)|$ が R_k の元 (x,y) の取り方によらず一定値になる．この値を p_{ij}^k で表す．

R_k の**隣接行列** (adjacency matrix) を b_k で表す．すなわち b_k は $n=|X|$ 次正方行列で，その (i,j) 成分は $(x_i,x_j)\in R_k$ のとき 1，$(x_i,x_j)\notin R_k$ のとき 0 である．$b_0=I$ (単位行

列) であり (AS1)，b_i の転置行列 ${}^t(b_i)$ は b_{i^*} である (AS2)．また (AS3) から

$$b_i b_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k b_k \qquad (i,j=0,\dots,d)$$

が成り立つ．したがって $b_0,\dots,b_d$ の複素 1 次結合全体 A は全行列環 $M_n(\mathbb{C})$ の部分代数をなす．この代数 A をアソシエーションスキーム $(X,\{R_i\}_{0\le i\le d})$ に付随する **Bose-Mesner 代数**または簡単に**スキーム環** (scheme ring) という．$\mathbf{B}=\{b_0,\dots,b_d\}$ は A の基底であり，さらに行列 b_i の各行にある 1 の個数は一定値 $p_{ii^*}^0$ をとる．この値を通常 a_i で表し，関係 R_i の**分岐指数** (valency) とよぶ．

$$\varepsilon : A \to k,\ \varepsilon(b_i)=a_i, \quad S: A \to A,\ S(b_i)=b_{i^*}= {}^t(b_i)$$

とおくことで，スキーム環 A は ($\mathbb{C}$ 上の) 群環的代数になることが証明できる．$t=b_0+\cdots+b_d$ はすべての成分が 1 の行列 J であり，$\varepsilon(t)=|X|=n$ である．A のボリュームは

$$v = I + \frac{1}{a_1}\,{}^t(b_1)b_1 + \cdots + \frac{1}{a_d}\,{}^t(b_d)b_d$$

である．埋め込み $A \hookrightarrow M_n(\mathbb{C})$ をスキーム環 A の**標準表現**とよぶ．その指標は $\varepsilon(t)\phi$ である，ただし $\phi(b_i)=\delta_{0i}$.

一番簡単なスキームの例は，$X\times X$ を対角集合 $\{(x,x)|x\in X\}$ とその補集合に分割するものである (**自明なスキーム**という)．対応する隣接行列は単位行列 I と $b:=J-I$ である，ただし J はすべての成分が 1 の (n 次) 正方行列．$(J-I)^2=J^2-2J+I=nJ-2J+I=(n-1)I+(n-2)(J-I)$ だから，付随するスキーム環の乗積表は

	1	b
1	1	b
b	b	$(n-1)+(n-2)b$

$\varepsilon(b)=n-1,\ S=id,\ v=2+\frac{n-2}{n-1}b$ である．

2.3. **積分について..** $H=(H,\phi,t,S)$ を一般の bF 代数とする．ホップ代数と同様にして，H に対して積分の概念が定義できる．すなわち H の**右積分**とは $\Gamma h=\varepsilon(h)\Gamma,\ \forall h\in H$ をみたす元 $\Gamma\in H$ をいう．同様に $h\Lambda=\varepsilon(h)\Lambda,\ \forall h\in H$ をみたす元 $\Lambda\in H$ を H の**左積分**という．H の右 (左) 積分全体の作る部分空間を $\int_H^r$ ($\int_H^l$) で表す．一般には一致しない．もし $\int_H^r=\int_H^l$ が成り立つとき，H は**単調** (unimodular) であるという．このときは左右の区別がなくなり，積分空間は単に $\int_H$ で表す.

双対 bF 代数 $H^*=(H^*,t,\phi,S^*)$ の右積分空間は

$$\int_{H^*}^r = \{\gamma\in H^* \mid \sum \gamma(h_1)h_2=\gamma(h)1,\ \forall h\in H\}$$

となる．実際，$\gamma\in\int_{H^*}^r \ \Leftrightarrow\ \gamma * f = f(1)\gamma\ (\forall f\in H^*)\ \Leftrightarrow$
$\sum\gamma(h_1)f(h_2)=f(1)\gamma(h)\ (\forall f\in H^*,\ \forall h\in H)\ \Leftrightarrow\ \sum\gamma(h_1)h_2=\gamma(h)1\ (\forall h\in H)$.
同様に，$\int_{H^*}^l=\{\lambda\in H^* \mid \sum h_1\lambda(h_2)=\lambda(h)1,\ \forall h\in H\}$.

bF 代数の基本性質を定理 1 およびその系 1 としてまとめる．証明は一部改良されている.

定理 1． ([DT], [D1], [D2]) (H, ϕ, t, S) を一般の bF 代数とする．
(1) 次が成り立つ．

$$\phi \leftharpoonup t = \varepsilon = S^{-1}(t) \rightharpoonup \phi, \quad \phi(t) = 1 = \phi(S^{-1}(t)), \tag{2.1}$$

$$\sum hS^{-1}(t_2) \otimes t_1 = \sum S^{-1}(t_2) \otimes t_1 h \qquad (h \in H), \tag{2.2}$$

$$\sum \phi(hl_1)S(l_2) = \sum \phi(h_1 l)h_2 \qquad (h,\ l \in H) \tag{2.3}$$

(2) 積分の一意性が成り立つ．くわしくは

$$\int_H^r = kt, \quad \int_H^l = kS^{-1}(t), \quad \int_{H^*}^r = k\phi, \quad \int_{H^*}^l = k(\phi \circ S^{-1}).$$

証明． (1) $\sum S^{-1}(t_2) \otimes t_1$ が (H, ϕ) の双対基底であるから，(1.2)，(1.4) より

$$\sum S^{-1}(t_2)\phi(t_1 h) = h = \sum \phi(hS^{-1}(t_2))t_1 \qquad (h \in H).$$

この式に ε を施して $\phi(th) = \varepsilon(h) = \phi(hS^{-1}(t))$，したがって $\phi \leftharpoonup t = \varepsilon = S^{-1}(t) \rightharpoonup \phi$ であり，$h = 1$ を代入すれば $\phi(t) = 1 = \phi(S^{-1}(t))$ を得る．

(2.2) は (1.3) から従う．次に (2.3) を示す．双対 bF 代数 H^* に (2.2) を適用すると

$$\sum f * S^{*-1}(\phi_2) \otimes \phi_1 = \sum S^{*-1}(\phi_2) \otimes \phi_1 * f \qquad (f \in H^*).$$

したがって

$$\sum f(x_1)\phi_2(S^{-1}(x_2))\phi_1(y) = \sum \phi_2(S^{-1}(x))\phi_1(y_1)f(y_2) \qquad (f \in H^*,\ x, y \in H)$$

したがって

$$\sum x_1\phi(yS^{-1}(x_2)) = \sum \phi(y_1 S^{-1}(x))y_2 \qquad (x,\ y \in H).$$

ここで $l = S^{-1}(x)$, $h = y$ とおけば (2.3) が得られる．((2.3) の直接証明については [DT, Proposition 3.2(a)] 参照.)

(2) 任意の右 H 加群 M，左 H 加群 N に対し，

$$M^H := \{m \in M | m \cdot h = m\varepsilon(h),\ \forall\ h \in H\}, \quad {}^H N := \{n \in N | h \cdot n = \varepsilon(h)n,\ \forall\ h \in H\}$$

とおく．右積分空間 $\int_H^r$ は右正則加群 H に対する H^H のことである．$M = H^*$ の場合，$(H^*)^H = k\varepsilon$ であることは容易にわかる．この事実と等式 (2.1) の $(\phi \leftharpoonup t) = \varepsilon$，および H と H^* の間の右 H 加群同型 $\theta : H \cong H^*$, $h \mapsto (\phi \leftharpoonup h)$ とを組み合わせることで，$\int_H^r = kt$ を得る．同様に $\varepsilon = S^{-1}(t) \rightharpoonup \phi$ から $\int_H^l = kS^{-1}(t)$ を得る．この結果を双対 bF 代数 H^* に適用することで $\int_{H^*}^r = k\phi$, $\int_{H^*}^l = k(\phi \circ S^{-1})$ を得る． □

bF 代数 H の任意の元 h に対し，ht はまた右積分になる．よって積分の一意性 (定理 1 の (2)) から，$ht = \alpha(h)t$ をみたす代数射 $\alpha \in \mathrm{Alg}(H, k)$ が存在する．この α を H に対する**右調節関数** (right modular function) という．H が単調であるとは $\alpha = \varepsilon$ のことである．$\phi(t) = 1$ (2.1) より，$\alpha(h) = \phi(\alpha(h)t) = \phi(ht) = (t \rightharpoonup \phi)(h)$．よって $\boxed{\alpha = t \rightharpoonup \phi}$ となる．

双対 bF 代数 H^* の右調節関数は $\Delta(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{a}$ をみたす H の元 $\boldsymbol{a} \neq 0$ で，

$$\sum h_1\phi(h_2) = \phi(h)\boldsymbol{a}, \qquad (h \in H)$$

で定義される．具体的には $\boxed{\boldsymbol{a} = \phi \rightharpoonup t}$ である．実際，$\boldsymbol{a} = \phi(t)\boldsymbol{a} = \sum t_1\phi(t_2) = \phi \rightharpoonup t$.

系 1． (H, ϕ, t, S) を bF 代数，α を H の右調節関数とする．
(1) 次の (a)-(c) は同値である．

$$\text{(a) } H \text{ が単調} \qquad \text{(b) } t \in \textstyle\int_H^l, \qquad \text{(c) } t = S(t).$$

(2) H が半単純 $\implies$ $\varepsilon(t) \neq 0$ $\implies$ H が単調.
(3) H の ϕ に関する中山自己同型は

$$\mathcal{N}(h) = S^{-2}\Big(\sum \alpha(h_1)h_2\Big) \qquad (h \in H).$$

(4) $\phi(hl) = \phi(lh),\ \forall\ h,\ l \in H \iff H$ が単調かつ $S^2\ = \mathrm{id}$.
(5) $\sum t_1 \otimes t_2 = \sum t_2 \otimes t_1 \iff \phi \in \int_{H^*}^l$ かつ $S^2\ = \mathrm{id}$.

証明．(1) $(a) \Rightarrow (b)$ は自明．$(b) \Rightarrow (c)$：t が左積分なら，$S^{-1}(t)$ は右積分である (S の反乗法性)．よって積分の一意性より，$S^{-1}(t) = \lambda t$ なる $\lambda \in k$ が存在する．この両辺に ϕ をほどこすと，(2.1) より $\lambda = 1$ を得る．したがって $S^{-1}(t) = t$ すなわち $S(t) = t$ となる．$(c) \Rightarrow (a)$：$\int_H^r = kt = kS^{-1}(t) = \int_H^l$.

(2) 任意の $h \in H$ に対し，

$$t(ht) = tt\alpha(h) = t\varepsilon(t)\alpha(h),\ (th)t = tt\varepsilon(h) = t\varepsilon(t)\varepsilon(h)$$

が成り立つ．よって $\varepsilon(t) \neq 0$ なら，$\alpha = \varepsilon$ となり H は単調である．次に H が半単純なら $\varepsilon(t) \neq 0$ であることを対偶で示す．もし $\varepsilon(t) = 0$ なら，$t^2 = t\varepsilon(t) = 0$ であるから，kt はゼロでないべき零イデアルとなる．よって H は半単純でない．

(3) (2.3) が使われる．

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(h) &= \sum \phi(t_1\mathcal{N}(h))S^{-1}(t_2) \quad (by\ (1.2)) \\
&= \sum \phi(ht_1)S^{-1}(t_2) \\
&= S^{-2}(\sum \phi(ht_1)S(t_2)) \\
&= S^{-2}(\sum \phi(h_1t)h_2) \quad (by\ (2.3)) \\
&= S^{-2}(\sum \alpha(h_1)h_2) \quad (by\ \phi(t) = 1)
\end{aligned}$$

(4) $\Leftarrow$) は (3) から明らか．$\Rightarrow$)：$h = S^{-2}\Big(\sum_{(h)} \alpha(h_1)h_2\Big)$ とすると，$S^2(h) = \sum \alpha(h_1)h_2$ である．これに ε をほどこして，$\varepsilon = \alpha$ がでる．したがって $S^2 = \mathrm{id}$ もでる．

(5) は (4) の双対である (H^* に (4) を適用). □

3. 対称フロベニウス代数の指標理論

Geck-Pfeiffer の書物 [GP] の 7 章で一般の対称代数に関する表現論が解説されている．その前半部分である通常表現 (半単純性や指標の直交性など) については我々の方法により著しく改良できることを述べる．

(A, ϕ) を一般の対称 (フロベニウス) 代数とし，$\sum x_i \otimes y_i$ をその双対基底とする．基礎体 k は代数閉体とし，さらに A は半単純であると仮定する．A の既約指標の集合を

$\mathrm{Irr}(A)$ で表す．対称代数の定義より，$\phi(ab)=\phi(ba)$ が任意の $a,b\in A$ に対して成り立っている．したがってよく知られているように ϕ は既約指標の 1 次結合で表せる：

$$\phi=\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(A)} n_\chi\chi \qquad (n_\chi\in k), \tag{3.1}$$

(A は行列環の直和であり，各直和成分上の線形写像 $\tau: M_n(k)\to k$ で $\tau(ab)=\tau(ba)$ をみたすものは通常のトレース写像のスカラー倍の形しかないから．)

$\chi\in\mathrm{Irr}(A)$ に対応する中心的 (原始) べき等元を e_χ で表す．任意の $\chi,\ \psi\in\mathrm{Irr}(A)$, $a\in A$ に対して，$\psi(ae_\chi)=\psi(a)\delta_{\chi\psi}$ が成り立つことに注意する．$\phi(ve_\chi)$ を 2 種類の方法で計算していこう，ここで $v:=\sum x_iy_i$ は (A,ϕ) のボリューム．まず,

$$\phi(ve_\chi)=^{(3.1)}\sum_{\psi\in\mathrm{Irr}(A)} n_\psi\psi(ve_\chi)=n_\chi\chi(v).$$

一方，補題 2 より $\phi(ve_\chi)=\chi_A(e_\chi)=\chi(1)^2$ である．これからただちに次の結果を得る：

定理 2． k を代数閉体，(A,ϕ) を半単純な対称代数とする．このとき任意の $\chi\in\mathrm{Irr}(A)$ に対し,

$$n_\chi\chi(v)=\chi(1)^2 \tag{3.2}$$

が成り立つ.

ボリューム $v:=\sum S^{-1}(t_2)t_1$ が可逆なら H は分離代数とくに半単純であった．この逆を考える.

系 2． (A,ϕ) を標数 0 の体 k 上の対称代数とし，v をそのボリュームとする．もし A が半単純なら，v は可逆元になる．k が代数閉体なら,

$$v=\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(A)}\frac{\chi(1)}{n_\chi}e_\chi,\quad v^{-1}=\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(A)}\frac{n_\chi}{\chi(1)}e_\chi. \tag{3.3}$$

証明．係数体を拡大することにより，k は代数閉体と仮定してよい．標数は 0 であるから，(3.2) より $\chi(v)\neq 0$, $n_\chi\neq 0$ である．ボリューム v は中心元であるから，$v=\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(A)}\alpha_\chi e_\chi$ の形にかける，ただし $\alpha_\chi\in k$．このとき，$\chi(v)=\alpha_\chi\chi(e_\chi)=\alpha_\chi\chi(1)$ である．よって (3.2) を用いて $\alpha_\chi=\frac{\chi(v)}{\chi(1)}=\frac{\chi(1)}{n_\chi}$ である．したがって，$v=\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(A)}\frac{\chi(1)}{n_\chi}e_\chi$ を得る．各係数 $\frac{\chi(1)}{n_\chi}$ は 0 でないから, v の可逆性が示された．逆元は $v^{-1}=\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(A)}\frac{n_\chi}{\chi(1)}e_\chi$ で与えられる．□

定理 3． k を標数 0 の代数閉体とする．(A,ϕ) を半単純な対称代数とし，$\sum_i x_i\otimes y_i$ をその双対基底とする.

(1)

$$e_\chi=n_\chi\sum_i\chi(x_i)y_i=\frac{\chi(1)^2}{\chi(v)}\sum_i\chi(x_i)y_i. \tag{3.4}$$

(2)(指標の直交性) $\chi,\ \psi\in\mathrm{Irr}(A)$ に対し,

$$\frac{n_\chi}{\chi(1)}\sum_i\chi(x_i)\psi(y_i)=\frac{\chi(1)}{\chi(v)}\sum_i\chi(x_i)\psi(y_i)=\delta_{\chi\psi} \tag{3.5}$$

証明． (2.4) を使って

$$e_\chi =^{(2.4)} \sum_i \phi(e_\chi x_i) y_i = \sum_i \Big(\sum_{\psi \in \mathrm{Irr}(A)} n_\psi \psi(e_\chi x_i) \Big) y_i = n_\chi \sum_i \chi(x_i) y_i$$

を得る．これに ψ を施して

$$\chi(1)\delta_{\chi\psi} = \psi(e_\chi) = n_\chi \sum_i \chi(x_i)\psi(y_i).$$

□

注意． (1) n_χ の逆数 $\frac{1}{n_\chi}$ を χ に付随する **Schur element** といい，[GP] では c_χ で表している．(3.2) より，$c_\chi = \frac{\chi(v)}{\chi(1)^2}$ となる．
(2) 等式 $(\chi|\psi) = \sum_i \chi(v^{-1}x_i)\psi(y_i)$ が成り立つ．実際，(3.3) を用いて

$$\sum_i \chi(v^{-1}x_i)\psi(y_i) = \sum_i \chi\Big(\sum_\rho \frac{n_\rho}{\rho(1)} e_\rho x_i\Big)\psi(y_i) = \frac{n_\chi}{\chi(1)} \sum_i \chi(x_i)\psi(y_i) = (\chi|\psi).$$

最初はこの表示を使って指標の直交性を示した [D2, Theorem 1.5]．

例． k を標数 0 の代数閉体とする．定理 3 において，$(\chi|\psi) = \frac{\chi(1)}{\chi(v)} \sum_i \chi(x_i)\psi(y_i)$ とすれば，$(\chi|\psi) = \delta_{\chi\psi}$ となる．
(1) $A = kG$ (群環) の場合，$v = |G|1$ だから

$$(\chi|\psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \chi(x)\psi(x^{-1}).$$

(2) 有限次元半単純ホップ代数 H の場合，標数 0 の仮定のもと必ず $S^2 = \mathrm{id}$ が成り立つ (Larson-Radford の定理! 難解な論文．改良された証明が [M] にある)．したがって系 1 の (2),(4) より，任意の $0 \neq \phi \in \int_H^r$ に対して (H, ϕ) は対称代数となる．また $v = \varepsilon(t)1$ だから

$$(\chi|\psi) = \frac{1}{\varepsilon(t)} \sum \chi(S(t_2))\psi(t_1) = \frac{1}{\varepsilon(t)} \sum \chi(t_1)\psi(S(t_2)).$$

(3) 半単純 bF 代数 (H, ϕ, t, S) の場合，ホップ代数のように $S^2 = id$ がいえるかどうかわからない．とりあえず，$S^2 = \mathrm{id}$ すなわち ϕ の対称性を仮定しておく．$v = \sum S^{-1}(t_2)t_1$ であり，

$$(\chi|\psi) = \frac{\chi(1)}{\chi(v)} \sum \chi(S^{-1}(t_2))\psi(t_1).$$

(4) 群環的代数 $(A, \varepsilon, \mathbf{B} = \{b_0, \ldots, b_d\}, S)$ の場合，A が半単純であることと $v = \sum_{i=0}^d \frac{1}{\varepsilon(b_i)} b_{i^*} b_i$ が可逆元であることは同値で，

$$(\chi|\psi) = \frac{\chi(1)}{\chi(v)} \sum_{i=0}^d \frac{1}{\varepsilon(b_i)} \chi(b_{i^*})\psi(b_i).$$

$\mathbb{C}$ 上の群環的代数 $(A, \varepsilon, \mathbf{B} = \{b_0, \ldots, b_d\}, S)$ が，あるスキームに付随するスキーム環であるとき，A は**スキーム型** (scheme type) であるとよぶことにする．スキーム型になるための判定条件を求めることは大変重要な問題であると思われる．スキーム型であるためには構造定数 p_{ij}^k がすべて非負整数 ($p_{ii*}^0 = \varepsilon(b_i)$ は正整数) であることが必要であること

は明らか．しかしこれだけでは十分でない．次の定理の後半はスキーム型であるための有力な必要条件を与える．

定理 4． $(A, \varepsilon, \mathbf{B}, S)$ は $\mathbb{C}$ 上の群環的代数で，各 $\varepsilon(b_i)$ がすべて正実数とする．このとき，A は半単純で，したがって A のボリュームは可逆元である (系 2)．もし A がスキーム型なら，任意の既約指標 χ に対し $m_\chi := \varepsilon(t)n_\chi = \frac{\chi(1)^2}{\chi(v)}$ は正整数である．とくに $\chi(v)$ は有理数.

証明． A の任意の元 $x = \sum_{i=0}^d \lambda_i b_i$ に対し，$\overline{x} := \sum_{i=0}^d \overline{\lambda_i} b_i$ とおく．ただし，$\overline{\lambda_i}$ は λ_i の複素共役．まず，$x \neq 0$ なら $xS(\overline{x}) \neq 0$ であることを証明する．

$$\phi(xS(\overline{x})) = \sum_{i,j} \lambda_i \overline{\lambda_j} p_{ij^*}^0 = \sum_{i,j} \lambda_i \overline{\lambda_j} \varepsilon(b_i)\delta_{ij} = \sum_i \lambda_i \overline{\lambda_i} \varepsilon(b_i) > 0$$

であり，これからとくに $xS(\overline{x}) \neq 0$ を得る．さて A が半単純でないと仮定すると，(Jacobson) 根基 J はゼロでないべき零イデアルである．$x \neq 0 \in J$ を選び，$y := xS(\overline{x}) \in J$ とおく．上の観察より，$y \neq 0$ であり，しかも

$$S(\overline{y}) = S(\overline{xS(\overline{x})}) = S(\overline{x}S(x)) = S^2(x)S(\overline{x}) = xS(\overline{x}) = y$$

であるから，$y^2 = yS(\overline{y}) \neq 0$ である．この議論を繰り返すことで $y^m \neq 0$ が任意の正整数 m に対して成立する．これは J がべき零イデアルであることに矛盾する．したがって A は半単純になる．

後半は, A がスキーム型とするとき, A の標準表現 (前述) の指標が $\varepsilon(t)\phi = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(A)} \varepsilon(t) n_\chi \chi$ であることからただちに得られる． $\square$

応用例． 3 次元で $S = \mathrm{id}$ なる群環的代数の構造は決定されており ([D2])，パラメーター $p, q, \beta \in \mathbb{C}$ により $A_{p,q}^\beta(3)$ で表される．

$A_{p,q}^\beta(3)$	1	b_1	b_2
1	1	b_1	b_2
b_1	b_1	$p + (p-1-\beta q)b_1 + \beta p b_2$	$\beta q b_1 + (p - \beta p)b_2$
b_2	b_2	$\beta q b_1 + (p - \beta p)b_2$	$q + (q - \beta q)b_1 + (q - 1 - p + \beta p)b_2$

$\varepsilon(b_1) = p,\ \varepsilon(b_2) = q,\ v = 3 + \frac{2p-1-\beta(p+q)}{p} b_1 + \frac{q-p-1+\beta(p+q)}{q} b_2.$

$\beta = 0$ の場合は，指標の計算は比較的やさしく，指標表は次のようになる：

$A_{p,q}^0(3)$	1	b_1	b_2	$\chi(v)$	m_χ
ε	1	p	q	$p+q+1$	1
χ_1	1	-1	0	$\frac{p+1}{p}$	$\frac{p(p+q+1)}{p+1}$
χ_2	1	p	$-1-p$	$\frac{(p+1)(p+q+1)}{q}$	$\frac{q}{p+1}$

$p,\ q \in \mathbb{N},\ p \leq q$ とするとき，定理 4 より，$A_{p,q}^0(3)$ がスキーム型なら $p+1 \mid q$ が必要である．逆にこれが成り立つとき，グループわけスキーム $\mathrm{GD}(\frac{q}{p+1}+1, p+1)$ が考えられる ([B, Example 2.2])：一クラスが $p+1$ 人の生徒からなるクラスが全部で $\frac{q}{p+1}+1$ 組あるとする．生徒全体の集合を X とする ($|X| = p+q+1$ である)．$X \times X$ の 3 分割 $R_0 = \{(x,x) | x \in X\}$，$R_1 = \{(x,y) | x \neq y,\ x, y$ は同じクラス$\}$，$R_2 = (R_0 \cup R_1)^c$ (補集合)

はスキームとなる．これに付随するスキーム環は $A^0_{p,q}(3)$ に等しいことが確かめられる．このようにして

$$A^0_{p,q}(3) \text{ がスキーム型} \iff p+1 \mid q.$$

終わりに

このあと，有限群の Frobenius-Schur の定理が標数 0 の一般の代数閉体上の bF 代数に対して拡張できること (ホップ代数に対してはすでに拡張されている [LM])；小さい次元の群環的代数の構造および指標表の決定；アソシエーションスキームへの応用；などの話題が続くのだが，別の機会にゆずることとする．

References

[B] R. A. Bailey, "Association Schemes, –Designed Experiments, Algebra and Combinatorics", Cambridge studies in advanced mathematics 84, Cambridge University Press 2004.

[BI] E. Bannai and T. Ito, " Algebraic Combinatorics I: Association Schemes ", Benjamin-Cummings, Menlo Park CA, 1984.

[D1] Y. Doi, *Substructures of bi-Frobenius algebras*, J. Algebra 256 (2002), 568-582.

[D2] Y. Doi, *Bi-Frobenius Algebras and Group-like Algebras*, Lecture notes in pure and applied Mathematics, vol.237 " Hopf Algebras ", (2004) 143-155 .

[DT] Y. Doi and M. Takeuchi, *BiFrobenius algebras*, in: Contemporary Mathematics 267 "New trends in Hopf algebras", (2000), 67-97.

[GP] M. Geck and G. Pfeiffer, "Characters of Finite Coxeter Groups and Iwahori-Hecke Algebras", London Mathematical Society Monographs New Series 21, 2000.

[LM] V. Linchenko and S. Montgomery, *A Frobenius-Schur Theorem for Hopf Algebras*, Algrbra and representation Theory 3: 347-377, 2000.

[M] S. Montgomery, *Representation Theory of Semisimple Hopf Algebras*, Roggenkamp and Stefanescu (eds.) Algrbra- Representation Theory, 189-218, 2001.

[Z] P.-H. Zieschang, " Theory of Association Schemes ", (Springer Monographs in Mathematics), Springer, 2005.

Faculty of Education
Okayama University
Okayama 700-8530 JAPAN
E-mail address: ydoi@cc.okayama-u.ac.jp