ON THE PERIODICITY OF SYZYGY FUNCTOR
(SYZYGY FUNCTOR の周期性について)

YOSUKE OHNUKI
(大貫　洋介)

Abstract. In this paper, we study the periodicity of syzygy functors or Auslander-Reiten translation which is related to whether Auslander-Reiten components are the tubes. First recall the basic properties of these periodicity and the classification of symmetric algebras of tame type. Next we suggest the method to prove that any module of some tame self-injective algebra is periodic with respect to syzygy functor.

1. 定義と記号

この報告では, 自己入射的な多元環上の射影的でない直既約な加群が syzygy 関手や Auslander-Reiten 関手に関して周期的であることに関する最近の研究の概説である. これらの周期性は Auslander-Reiten component の形が tube だけからなる多元環の研究と深く関連し調べられている.

以下, K を代数的閉体, 環は K 上の基本 (basic) 有限次元多元環を考えるものとする. 多元環 Λ に対して Λ^e を Λ の enveloping 多元環 $\Lambda^{op} \otimes_K \Lambda$ とし, 以後簡単のためテンサー積の記号 $\otimes_K$ を $\otimes$ と表すことにする. また, 加群は有限次元右加群を意味し, 有限次元右 Λ-加群の成す圏を $\operatorname{mod}\Lambda$ と表す. $\operatorname{mod}\Lambda^e$ は Λ-Λ-両側加群の成す圏に同値であることに注意しておく.

Lemma 1. 多元環 Λ に対して $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ を互いに直交する原始べき等元全体の集合とする. このとき, 直既約な射影 Λ^e 加群は $\Lambda e_i \otimes e_j \Lambda$ の形に同型である. ただし, $e_i, e_j \in \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ とする.

この Lemma により, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ を互いに直交する Λ の原始べき等元全体の集合とする. このとき, $\{e_i \otimes e_j\}_{i,j}$ が互いに直交する Λ^e の原始べき等元全体の集合であることに注意しておく.

Lemma 2. 多元環 Λ に対して, P を射影 Λ^e-加群とし M を任意の Λ-加群とする. すると $M \otimes_\Lambda P$ は射影 Λ-加群である.

Proof. 直既約な射影 Λ-加群 $e_j\Lambda$ と K 上の n-次元ベクトル空間 V について, $V \otimes e_j\Lambda$ は $e_i\Lambda$ の n 個のコピーの直和に同型なので, $V \otimes e_j\Lambda$ は射影 Λ-加群である.

Lemma 1. により, P は Λ^e-加群として $\oplus_{i,j} (\Lambda e_i \otimes e_j\Lambda)$ に同型である. よって, $M \otimes_\Lambda P \cong \oplus_{i,j} ((M \otimes_\Lambda \Lambda e_i) \otimes e_j\Lambda)$ により $M \otimes P$ は射影 Λ-加群である. □

Λ-加群 M に対して, M の射影被覆 $P_\Lambda(M) \to M$ を考え, その核として M の syzygy 加群 $\Omega_\Lambda(M)$ を定義する. このとき, Λ-加群としての次の完全列が得られる.

$$0 \longrightarrow \Omega_\Lambda(M) \longrightarrow P_\Lambda(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

The paper is in a final form and no version of it will be submitted for publication elsewhere.

ここで, 多元環 Λ が対称的ならばsyzygy 関手 Ω はその安定圏の自己同型関手を導くことに注意する. 簡単のために, この自己同型関手を $\Omega : \underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ と表すことにする.

Λ-module M が Λ-periodic であるとは $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ において M が $\Omega_\Lambda^n(M)$ に同型のときとする (ただし, n はある自然数とする). さらに, Λ の射影的でない直既約な全ての加群が Λ-periodic のとき Λ の加群が全て periodic であると呼ぶことにする.

Lemma 3. *Λ が Λ^e-periodic ならば, Λ の加群は全て periodic である.*

Proof. Λ が Λ^e-periodic であるとし, Λ^e-加群として $\Omega_{\Lambda^e}^n(\Lambda) \cong \Lambda$ を満たす自然数を n とする. すると, $\mathrm{mod}\,\Lambda^e$ としての完全列

$$0 \to \Lambda \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_2 \to P_1 \to \Lambda \to 0 \tag{1.1}$$

が得られる. ただし, P_i は全て射影 Λ^e-加群とする. ここで, 射影的でない直既約な Λ-加群 M を用いてテンサー関手 $M \otimes_\Lambda -$ を完全列 (1.1) に作用させると, Λ-加群としての完全列

$$0 \to M \to M \otimes_\Lambda P_n \to M \otimes_\Lambda P_{n-1} \to \cdots \to M \otimes_\Lambda P_2 \to M \otimes_\Lambda P_1 \to M \to 0$$

が得られる. Lemma 2. により, この完全列から左側の M を取り除いた完全列は $\mathrm{mod}\,\Lambda$ における M の射影分解 (projective resolution) なので $\Omega_\Lambda^n(M)$ は M に同型となり, Λ の加群は periodic である. $\square$

2. TAME 型の対称多元環について

自己入射的な多元環 Λ に対して, τ を Λ の Auslander-Reiten 関手, $\mathcal{N}$ を Λ の中山関手とする. 多元環が自己入射的ならば, これらは射影加群を射影加群に対応させるので, 安定圏 $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ の自己同型関手を導く. 簡単のために, これらを安定圏の間の自己同型関手として再び τ や $\mathcal{N}$ と表すことにする. [1] において, 自己入射的な多元環の安定圏については $\tau \cong \Omega^2\mathcal{N} \cong \mathcal{N}\Omega^2$ が成り立つことが示されている.

最初に, 加群の syzygy 関手 Ω に関する周期性と Auslander-Reiten 関手 τ に関する周期性, 及び中山関手 $\mathcal{N}$ に関する周期性の関連について調べる.

Lemma 4. *自己入射的な多元環上の加群 M が $\Omega, \tau, \mathcal{N}$ のうちの 2 つに関して周期的ならば, 残りの関手に関しても周期的である.*

特に, Λ が対称的ならば $\mathcal{N}$ が恒等関手に同値なので, M が Ω に関して周期的であることと, τ に関して周期的であることは同値である.

多元環の加群が全て periodic であるという性質は Auslander-Reiten component の形と密接に関連している, 実際に, 多元環 Λ が対称的ならば, 加群が全て periodic であるという性質とその Auslander-Reiten component が全て tube の形を持つことが同値となる (メビウスの輪のように tube が捩れていることもあるが). [10], [11] において, 射影加群を含まない Auslander-Reiten component が τ-periodic な加群を含むならば, その component 内の加群は全て τ に関して周期的である. すなわち, その component は tube の形を持つ. また, 多元環が対称的でなくてもある自然数 n により $\mathcal{N}^n = id_{\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda}$ が成り立つならば, 同様の議論が成立する.

ここでは, どのような多元環ならば全ての加群が (syzygy 関手に関して) periodic であるかを調べることが目的であり, 関連するいくつかの結果が示されている. 既知の結果は Auslander-Reiten component が tube であるもの (τ-periodic) に限られることに注意して

おく. ここでは, tame 型の自己入射的な多元環の加群が全て periodic かどうかに関する, 次の定理を紹介する.

Theorem 5 ([6])**.** 単純でない既約 *(connected)* な自己入射的な多元環 Λ に対して次の条件は同値である.

(1) Λ は *tame* 型の対称的な多元環で, その全ての加群は *periodic* である.
(2) Λ は次のいずれかに同型である.
- *Dynkin* 型の対称的な多元環の *socle deformation.*
- *tubular* 型の対称的な多元環の *socle deformation.*
- *quoternion* 型の多元環.

$\{\mathbb{A}_m, \mathbb{D}_m, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ のいずれかに一致する図形を Dynkin 図形と呼び, 向きを考えないとき Dynkin 図形 Δ となる有向グラフ $\overrightarrow{\Delta}$ について, この path 多元環を $H = K\overrightarrow{\Delta}$ とする. すると, H は hereditary であり傾斜 H-加群 T を持つ. ここで, T が傾斜加群であるとは, $\mathrm{Ext}_H^1(T,T) = 0$ を満たし, かつ T の互いに非同型な直既約直和因子の数が n 個であるとする.

ここで T の準同型環 $B = \mathrm{End}_H T$ は Δ 型の傾斜多元環と呼ばれ, この repetitive 多元環 $\widehat{B}$ とその同型写像により作られる admissible 群 G を用いて構成される軌道多元環 $\widehat{B}/G$ として Dynkin Δ 型の自己入射多元環を定義する.

同様に, tame concealed 多元環を元に tube に属する加群を用いて one-point 拡大を繰り返し取ることで tubular 型と呼ばれる $(2,2,2,2), (3,3,3), (2,4,4), (2,3,6)$ となるまで拡大したとき, 拡大環を tubular 多元環と呼ぶ. tubular 多元環 B の repetitive 多元環 $\widehat{B}$ とその同型写像により生成される admissible 群 G を用いて構成される軌道多元環 $\widehat{B}/G$ を tubular 型の自己入射多元環とする。

Dynkin 型 や tubular 型の自己入射多元環 $A = \widehat{B}/G$ については, $\widehat{B}$ の正方向の自己同型写像 g により生成される無限群 $G =< g >$ を用いてガロワ被覆 $\widehat{B} \to \widehat{B}/G = A$ を自然に構成することができる. Dynkin 型の自己入射多元環は standard な有限表現型、tubular 型の自己入射多元環は standard な non-domestic polynomial growth 多元環である.

また, socle deformation についても復習しておく. A を自己入射的な K 上の多元環とし, I を A の両側イデアル, $B = A/I$ を剰余多元環とする. また, $\{e_1, e_2, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots e_n\}$ を A の互いに直交する原始べき等元の集合とし,

$$\begin{cases} e_i \in I & \text{ただし}\, i = 1, 2, \ldots, m \\ e_i \notin I & \text{ただし}\, i = m+1, m+2, \ldots, n \end{cases}$$

を満たすように並べたとき, べき等元 $e = \sum_{i=1}^n$ を考えると e の剰余元は B の単位元となる. ここで, 基礎体 K が代数的閉体なので B はある有向グラフと relation により表すことができるのだが, この有向グラフが有向サイクルを含まずに, かつ eAe のイデアル eIe が I の右から考えても左から考えても零化イデアルとなるとき ($eIe = \{eae \in eAe \mid Ieae = 0\} = \{eae \in eAe \mid eaeI = 0\}$), I は deforming イデアルと呼ばれる.

典型的な例としては, 自明な拡大環 $A \ltimes D(A)$ は deforming イデアル $D(A)$ を持つことを確かめることができる. なお, これを利用し, deforming イデアル I を持つ自己入射的な多元環 A については, 剰余多元環 $B = A/I$ の repetitive 多元環 $\widehat{B}$ とその自己同型写像から生成される群 G の軌道多元環 $\widehat{B}/G$ と socle 同値 ($A/\operatorname{soc} A \cong (\widehat{B}/G)/\operatorname{soc}(\widehat{B}/G)$) であることが示されている. (実際には, 自明な拡大環 $B \ltimes I$ と socle 同値である [15]). こ

のように deforming イデアルの違いで, 自己入射多元環 $\widehat{B}/G$ と socle 同値になる自己入射的な多元環を $\widehat{B}/G$ の socle deformation と呼ぶ.

次の条件を全て満たす多元環 Λ を quaternion 型と呼ぶ.

- Λ は既約な無限表現 tame 型の対称多元環である.
- Λ の加群は全て periodic であり, かつ射影的でない直既約 Λ-加群 の周期は全て 4 の倍数である.
- Λ のカルタン行列は non-singular である.

一般化された quaternion 型の有限群の群環のブロックは quaternion 型の多元環である。また, quaternion 型の多元環は有向グラフと relation により定義される無限表現型の 12 個の対称多元環のいずれかと森田同値となることが示されている [2], [3], [4].

Proposition 6. 自己入射的な有限表現型の多元環 Λ の全ての加群は *periodic* である.

Proof. 多元環 Λ が自己入射的なので, syzygy 関手 Ω は直既約 Λ-加群 M を直既約 Λ-加群 $\Omega(M)$ に移す. よって, すべての自然数 n について $\Omega^n(M) \ncong M$ ならば非同型な直既約 Λ-加群が無限個存在してしまうので, Λ が有限表現型であることに反する. よって, 各直既約 Λ-加群 M について $\Omega^n(M) \cong M$ となる自然数 n が存在するので, Λ の全ての加群が periodic である. □

Corollary 7 ([14])**.** 単純でない既約な *tame* 型の対称多元環 Λ で, 全ての加群が *periodic* とすると, 次が成り立つ.

(1) Λ のカルタン行列が *singular* であることと, Λ がある *tubular* 多元環 B の自明な拡大環 $B \ltimes D(B)$ に同型である.
(2) Λ が無限表現型ならば, 単純加群の数は 10 個以下で, 多元環の *Auslander-Reiten component* から射影加群を取り除いたものはランク 6 以下の *tube* だけから成る.
(3) Λ は無限表現型で, かつカルタン行列は *non-singular* であるならば, 単純加群の数は 4 個以下で, 多元環の *Auslander-Reiten component* から射影加群を取り除いたものはランク 4 以下の *tube* だけから成る.

有限表現型のとき成り立つように, 対称的でない自己入射的な多元環についてもその全ての加群が周期的となる例は数多く存在する. tame 型の対称的でない自己入射的な多元環について成り立つのか, という自然な問題も考えられるが一般論は存在していない. [14] において, tame 型の対称的でない自己入射的な多元環の具体的な構成法や分類が与えられているので, この問題を調べる際には大変参考になる.

最後に, Λ^e-periodic である wild 多元環 Λ も存在することに注意しておく. 例えば Dynkin 型の preprojective 多元環 Λ は Λ^e-periodic である, よって, これは全ての加群が periodic である wild 多元環の例となる.

3. 多元環の全ての加群が周期的であることを示すための方法

Theorem 8. レヴィ列の長さが 2 以上の安定同値な自己入射的多元環 Λ と Λ' について, Λ の加群が全て *periodic* であることと, Λ' の加群が全て *periodic* であることは同値である.

Proof. 2 つの多元環の安定圏に対する, 安定同値な関手 $F : \underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda'$ について, [1] において, 各対象に対しては F が syzygy 関手と可換であることが示されている. すなわち安定圏の任意の対象 $M \in Ob\,(\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda)$ に対して $F\Omega_\Lambda(M) \cong \Omega_{\Lambda'}F(M)$ が成り

立つ. ただし, $\Omega_\Lambda, \Omega_{\Lambda'}$ はそれぞれ Λ, Λ' の syzygy 関手とする. この同型により自然に $F\Omega_\Lambda^n(M) \cong \Omega_{\Lambda'}^n F(M)$ が得られるので, Λ の加群が全て periodic であることと, Λ' の加群が全て periodic であることは同値となる. □

[12], [13] において 2 つの自己入射多元環が導来同値ならば安定同値が導かれるので, 全ての加群が periodic であるという性質は多元環の導来同値の不変量でもあることが分かる.

Theorem 9 ([8])**.** *代数的閉体 K 上の既約な有限次元多元環 Λ について, 次の条件は同値である.*

(1) *全ての単純 Λ-加群が Λ-periodic である.*
(2) *$\Omega_{\Lambda^e}^n(\Lambda) \cong {}_\Lambda\Lambda_\sigma$ と $\sigma(e_i) = e_i$ を満たす自然数 n と Λ の自己同型写像 σ が存在する. ただし, $\{e_i\}$ は Λ の互いに非同型な直交べき等元の全体の集合とする.*

さらに Λ が, この同値条件をみたすならば, 自己入射的な多元環である.

ここで, Λ-加群 M と Λ の自己準同型写像 f について, M の元 m と Λ の元 a に対して $m \cdot a = mf(a)$ により作用を変化させた新しい Λ-加群を M_f と表す. また f が恒等写像 $id : \Lambda \xrightarrow{\sim} \Lambda$ のとき, 単に $M = M_\Lambda$ と表すこともある. 左加群 N に対する ${}_\sigma N$ や ${}_\Lambda N$ も同様に定める.

Theorem 10 ([5])**.** *単純でない既約な自己入射多元環 Λ について, 次の条件は同値である.*

(1) *Λ^e-加群としての同型 $\Omega_{\Lambda^e}^2(\Lambda) \cong {}_\Lambda\Lambda_\sigma$ を満たす Λ の自己同型写像 σ が存在する.*
(2) *Λ は中山多元環である.*

よく知られた Auslander-Reiten component が全て tube から成る自己入射多元環の場合でさえ, 全ての加群が periodic であることは分かっていない. しかしながら, 一般に示されている結果がなくとも, Theorem 9. を利用する事で具体例ならば多元環の全ての加群が periodic であることを示すことができることがある.

Lemma 11. *自己入射多元環 Λ について, その単純加群が全て Λ-periodic であるとする. このとき, Theorem 9. で構成される Λ の自己同型写像 σ がある自然数 n について $\sigma^n = id$ を満たすならば Λ は Λ^e-periodic である. よって Λ の加群は全て periodic である.*

ここで, Theorem 9. で与えられる Λ の自己同型写像 σ の構成法を紹介しておく. 詳細は [8] にある. 多元環 Λ の単純 Λ-加群が全て periodic であると仮定し, 全ての単純 Λ-加群 S について $\Omega_\Lambda^n(S) \cong S$ を満たす最小の自然数 n をとる. Λ の Λ^e-加群としての極小射影分解 (minimal projective resolution) が任意の単純 Λ-加群の極小射影分解をテンサー関手 $S \otimes_\Lambda -$ を作用させることで導くこと [11] や加群の長さの比較を繰り返すことにより, この自然数 n を用いて左 Λ-加群としての $\Omega_{\Lambda^e}^n(\Lambda) \cong \Lambda$ が得られる.

A^e-加群としての射影被覆 $\varphi : \oplus_i(Ae_i \otimes_k e_iA) \to \Omega_{A^e}^n(A)$ に対して $b = \varphi(\sum_i e_i \otimes e_i)$ とおき, 右から元 b を作用させることで左 Λ-加群としての同型写像 $\psi : \Lambda \to \Omega_{\Lambda^e}^n(\Lambda), \lambda \mapsto \lambda b$ が得られる. 実際に, この左 Λ-加群としての同型写像が Λ の自己同型写像 $\sigma : \Lambda \xrightarrow{\sim} \Lambda, r \mapsto \psi^{-1}(br)$ により Λ^e-加群として (両側 Λ-加群として) の同型写像 $\Omega_{\Lambda^e}^n(\Lambda) \cong {}_\Lambda\Lambda_\sigma$ を導く.

References

[1] M. Auslander, I. Reiten and S. O. Smalø, *Representation theory of Artin algebras*, Cambridge Studies in Adv. Math. **36**, Cambridge 1995.

[2] K. Erdmann, *Algebras of quaternion defect groups I*, Math. Ann. **281** (1988). 545-560.

[3] K. Erdmann, *Algebras of quaternion defect groups II*, Math. Ann. **281** (1988). 561-582.

[4] K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras*, Lecture Notes in Math. **1428** (Springer-Verlag1988).

[5] K. Erdmann and T. Holm, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n*, Forum Math. **11** (1999). no.2, 177-201.

[6] K. Erdmann and A. Skowronski, Classification of tame symmetric algebras with periodic modules, preprint.

[7] K. Erdmann, T. Holm and N. Snashall, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n, II*, Algebr. Represent. Theory **5** (2002), no. 5, 457-482.

[8] E. L. Green, N. Snashall and Ø. Solberg, *The Hochschild cohomology ring of a selfinjective algebra of finite representation type*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 11, 3387-3393.

[9] D. Happel, *Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras*, Lecture Notes in Math. **1404** (Springer, 1989). 108-126.

[10] D. Happel, U. Preiser and C. M. Ringel, *Vingberg's characterization of Dynkin diagrams using subadditive functors with application to DTr-periodic modules*, in: Representation theory II, Lecture Notes in Math. **832** (Springer-Verlag, 1980). 280-294.

[11] M. Hoshino, *DTr-invariant modules*, Tsukuba J. Math. **7** (1983), no. 2, 205-214.

[12] B. Keller and D. Vossieck, *Sous les catégories dérivées*, C. R. Acad. Soc. Paris, **305** (1987), 225–228.

[13] J. Rickard, *Derived categories and stable equivalence*, J. Pure Appl. Alg. **61** (1989), 303–317.

[14] A. Skowroński, *Selfinjective algebras: finite and tame type*, Trends in representation theory of algebras and related topics, Contemp. Math. **406** Amer. Math. Soc. Providence, RI (2006). 169-238.

[15] A. Skowroński and K. Yamagata, *Socle deformations of self-injective algebras*, Proc. London Math. Soc. **72** (1996). 545-566.

Suzuka national college of technology
Shiroko-cho, Suzuka, Mie, 510-0294 JAPAN
E-mail address: ohnuki@genl.suzuka-ct.ac.jp