加群の圏の分類

RYO TAKAHASHI (高橋 亮)

R を可換 Noether 環とする。$\operatorname{Mod} R$ で R 加群の圏を表し，$\operatorname{mod} R$ で有限生成 R 加群全体のなす $\operatorname{Mod} R$ の充満部分圏を表す。有限生成射影 R 加群の有限鎖複体を完全鎖複体という。$\mathcal{D}(R)$ を $\operatorname{Mod} R$ の導来圏とし，$\mathcal{D}_{\mathrm{perf}}(R)$ を完全鎖複体と同型な鎖複体全体のなす $\mathcal{D}(R)$ の充満部分圏とする。三角圏の三角充満部分圏で，直和因子で閉じているものを**épaisse** 部分圏という。$\operatorname{Spec} R$ の部分集合 S について，「$\mathfrak{p} \in S$ かつ $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$ ならば $\mathfrak{q} \in S$」が成り立つとき，S は特殊化で閉じているという。鎖複体 X に対し，$H(X)$ で X のホモロジー加群を表す (すなわち $H(X) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H_i(X)$)。R 加群 M に対し，$\operatorname{Supp} M = \{\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0 \,\}$ とおく。1990 年前後に，Hopkins [?] と Neeman [?] が次の分類定理を証明した。

定理 1 (Hopkins-Neeman)**.** 次の一対一対応がある。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}_{\mathrm{perf}}(R) \text{ の} \\ \text{épaisse 部分圏} \end{array} \right\} \underset{g_1}{\overset{f_1}{\longleftrightarrow}} \left\{ \begin{array}{l} \text{特殊化で閉じた} \\ \operatorname{Spec} R \text{ の部分集合} \end{array} \right\}$$

f_1 と g_1 はそれぞれ $f_1(\mathcal{X}) = \bigcup_{X\in\mathcal{X}} \operatorname{Supp} H(X)$ と $g_1(S) = \{\, X \in \mathcal{D}_{\mathrm{perf}}(R) \mid \operatorname{Supp} H(X) \subseteq S \,\}$ で与えられる。

$\operatorname{mod} R$ の充満部分圏で部分加群，商加群，拡大で閉じているものを **Serre** 部分圏という。すなわち Serre 部分圏とは，有限生成 R 加群の任意の完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ に対して「$B \in \mathcal{M} \Leftrightarrow A, C \in \mathcal{M}$」となる $\operatorname{mod} R$ の充満部分圏 $\mathcal{M}$ のことである。$\operatorname{mod} R$ の充満部分圏で核，余核，拡大で閉じているものを連接部分圏という。言い換えると，連接部分圏とは，有限生成 R 加群の任意の完全列 $A \to B \to C \to D \to E$ に対して「$A, B, D, E \in \mathcal{M} \Rightarrow C \in \mathcal{M}$」となる $\operatorname{mod} R$ の充満部分圏 $\mathcal{M}$ のことである。定義からすぐわかるように，Serre 部分圏は常に連接部分圏である。Serre 部分圏については次の分類がある。

命題 2. 次の一対一対応がある。

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{mod} R \text{ の} \\ \text{Serre 部分圏} \end{array} \right\} \underset{g_2}{\overset{f_2}{\longleftrightarrow}} \left\{ \begin{array}{l} \text{特殊化で閉じた} \\ \operatorname{Spec} R \text{ の部分集合} \end{array} \right\}$$

f_2 と g_2 はそれぞれ $f_2(\mathcal{M}) = \bigcup_{M\in\mathcal{M}} \operatorname{Supp} M$ と $g_2(S) = \{\, M \in \operatorname{mod} R \mid \operatorname{Supp} M \subseteq S \,\}$ で与えられる。

この命題から次の系が得られる。

系 3. M, N を有限生成 R 加群とする。もし $\operatorname{Supp} M \subseteq \operatorname{Supp} N$ ならば，M は N で生成された (i.e. N を含む最小の) $\operatorname{mod} R$ の Serre 部分圏に入る。

Hovey [?] は，Hopkins-Neeman の定理と上の命題を用いて次の定理を証明した。

定理 4 (Hovey)**.** R を Noether 正則環の準同型像とする。このとき，