MATRIX FACTORIZATIONS AND MIRROR SYMMETRY
行列因子化とミラー対称性

ATSUSHI TAKAHASHI
高橋 篤史

Abstract. This is a survey note on the mirror symmetry for weighted homogeneous isolated hypersurface singularities (Landau–Ginzburg orbifolds) in two dimension. After giving the definition of regular weight systems, duality of weight systems (= topological mirror symmetry) and some triangulated categories associated to weight systems including triangulated categories of graded matrix factorizations, we study properties of these triangulated catogories motivated by homological mirror symmetry.

1. はじめに

有限次元代数の表現論と **Maximal Cohen-Macaulay** 加群の表現論はとても似ている

このように感じておられた方は多いのではないでしょうか．

ある良い状況下では，これは単なる類似ではなくそれぞれに付随する三角圏 (triangulated category) の間にミラー対称性という背景から自然に導かれる三角同値 (triangulated equivalence) があることの反映である，ということを説明するのが目的です．

この報告集では，まず簡単にミラー対称性の背景を述べたのち，特異点の位相的ミラー対称性について具体的に説明します．次に，特異点に付随したいくつかの互いに同値な三角圏を導入します．その一つが次数付き Maximal Cohen-Macaulay 加群のなす三角圏です．そして位相的ミラー対称性のカテゴリー化 **(categorification)** であるところのホモロジー的ミラー対称性により，それらの三角圏が持つべき性質について議論し，数学的予想として述べます．最後にいくつかの例に対してその予想が正しいこと，つまり，特異点に付随したこれらの三角圏が，ある有限次元代数の表現の導来圏と三角同値になることを述べます．

2. ミラー対称性の物理的背景

弦理論では, 点ではなく 1 次元の自由度を持った弦が世界を記述すると考えます. 例えば我々が日常観測する粒子は, 弦の振動によって表現されます. いくつもの弦が時間発展・相互作用することにより, 複雑に穴の空いた 2 次元面 Σ ができます. 非常に大雑把な言い方ですが, 時空 X 上の弦理論とは, 写像 $\Sigma \to X$ および超対称性等が定める付加的構造の全体のなす空間 $\mathcal{M}$ を解析することです.

X を n 次元カラビ・ヤウ多様体, 標準束 K_X が自明な複素 n 次元射影的多様体, としましょう. このときカラビ・ヤウ多様体 X 上, $N = 2$ の超対称性を持つ超弦理論を考えることができます. 驚くべきことに, それが別のカラビ・ヤウ多様体 Y 上の $N = 2$ の超対称性を持つ超弦理論と「等価」になること, つまり両者から得られる物理量が全て一致すると

The detailed version of this paper may be submitted for publication elsewhere or put on the internet.

いう現象が発見されました. この現象のことをミラー対称性とよび, とくに Y を X のミラー多様体と呼びます.

さらに, $N = 2$ の超対称性を持つ超弦理論に「ひねり」といわれる操作を施すことによって, 2 種類の弦理論, A 模型と呼ばれる (複素化された) ケーラー形式の変形を司る理論および B 模型と呼ばれる複素構造の変形を司る理論, が得られます. このとき,

$$X \text{ 上の } A \text{ 模型} \overset{\text{ミラー対称性}}{\Longleftrightarrow} Y \text{ 上の } B \text{ 模型} \tag{2.1}$$

という関係があります. この対応を調べることで, 数学的に豊かな結果や予想が次々と現れます. ミラー対称性を仮定すれば, 片側の比較的容易に調べられる量を用いて, 反対側の非常に難しい量を調べることができるからです.

有名な例をあげると, X と Y を 3 次元カラビ・ヤウ多様体とするとき, X の有理 Gromov-Witen 不変量 ($\mathbb{P}^1$ から X への正則写像の数) の母函数を Y の正則 3 形式の周期を用いて具体的に書き下せる, ということがあります.

3. ミラー対称性の数学的側面

上の対応(2.1) に関して, 次は数学的に自然ですが非常に難しい問いです.

(1) X や Y としてどのような幾何学的対象を取るのか.
(2) A 模型や B 模型というのは, X に対して何を対応させることなのか.
(3) X に対して, ミラー多様体 Y をどのように見つけるか .

これらの「完全な」答えはわかっていません . しかし , 次のような現象が知られています .

例 1 (古典的ミラー対称性)**.** X, Y を X を n 次元カラビ・ヤウ多様体とし, $A(X)$ を X の量子コホモロジー環, $B(Y) := \bigoplus_{p,q} H^q(Y, \wedge^p TY)$ とします. 環として $A(X) \simeq B(Y)$ のとき , 対 (X, Y) は古典的ミラー対であるといいます.

ベクトル空間としては $A(X) \simeq \oplus_{p,q} H^q(X, \wedge^p T^*X)$ なので, (X, Y) が古典的ミラー対であるとき, ホッジ数 $h^{p,q}(X) := \dim_{\mathbb{C}} H^q(X, \wedge^p T^*X)$ の間に

$$h^{p,q}(X) = h^{n-p,q}(Y) \tag{3.1}$$

という関係 (位相的ミラー対称性) が成り立ちます. そのため , うまくホッジ数を並べた絵を書くと, $h^{p,q}(Y)$ 達は鏡に写った $h^{p,q}(X)$ 達の像のように見えます. これがミラー対称性の名前の由来となっています. $h^{p,q}(X) = h^{n-p,q}(Y)$ という関係をみたすカラビ・ヤウ多様体の組 (X, Y) は位相的ミラー対と呼ばれ, Greene-Plesser のオービフォールド構成やその一般化である反射的多面体 (reflexive polytope) を用いた Batyrev の方法によって大量に構成することができます.

例 2 (ホモロジー的ミラー対称性)**.** X をシンプレクティック多様体, Y を射影的代数多様体とします. また $A(X)$ として, X 上のラグランジアン部分多様体とその上の直線束のなす深谷圏 $\mathcal{F}(X)$ の導来圏 $D^b\mathcal{F}(X)$ を, $B(Y)$ として Y 上の連接層の有界複体のなす導来圏 $D^b(Y)$ をとります. 三角圏として $A(X) \simeq B(Y)$, $B(X) \simeq A(Y)$ が成り立つとき, 対 (X, Y) はホモロジー的ミラー対であるといいます. 楕円曲線 (2 次元トーラス) に対するホモロジー的ミラー対称性は , テータ函数の和公式に基づいて, 深谷賢治らによって証明されています .

最も注目すべき点は , ミラー対称性で ,

$$X \text{ 上のシンプレクティック幾何学} \overset{\text{ミラー対称性}}{\Longleftrightarrow} Y \text{ 上の複素幾何学} \tag{3.2}$$

という, 全く異なる幾何学が結びつくということです.

4. 正規ウェイト系

ここで一度話題を変え，次のような組み合わせ論的対象を考えることにしましょう．この節の内容は，多少記号法は変えていますが，基本的に齋藤恭司の論文 [11] に基づいています．個々の結果に関するより詳しい文献は [11] の文献表を御覧ください．

定義 3. $a,b,c,h \in \mathbb{Z}_{>0},\ \gcd(a,b,c,h)=1$ とする．このとき組 $W:=(a,b,c;h)$ が正規 **weight** 系 **(regular weight system)** であるとは,

$$\chi(W,t):=\frac{(1-t^{1-\frac{a}{h}})(1-t^{1-\frac{b}{h}})(1-t^{1-\frac{c}{h}})}{(1-t^{\frac{a}{h}})(1-t^{\frac{b}{h}})(1-t^{\frac{c}{h}})} \tag{4.1}$$

が $t^{\frac{1}{h}}$ の多項式となることとする.

このとき次のことが齋藤恭司によって示されています．

定理 4. 次は同値.

(1) $W=(a,b,c;h)$ は正規 weight 系.

(2) Euler の方程式

$$E_W f_W = f_W,\quad E_W:=\frac{a}{h}\cdot x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{b}{h}\cdot y\frac{\partial}{\partial y}+\frac{c}{h}\cdot z\frac{\partial}{\partial z} \tag{4.2}$$

を満たす 3 変数の多項式 $f_W(x,y,z)$ を一般的に (generic に) 取るとき,

$$X_{W,0}:=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \mid f_W(x,y,z)=0\} \tag{4.3}$$

は, 原点のみに高々孤立特異点を持つ.

□

正規ウェイト系 W が与えられ，一般の f_W を一つ固定したとき，$R_W:=\mathbb{C}[x,y,z]/(f_W)$ とおくことにします．ウェイト a,b,c により，次のように自然に次数付き環になります:

$$R_W=\oplus_{d\in\frac{2}{h}\mathbb{Z}_{\geq 0}}R_{W,d},\quad R_{W,d}:=\{g\in R_W \mid 2E_W g=dg\}. \tag{4.4}$$

注意 5. $W=(a,b,c;h)$ が正規 weight 系のとき,

$$J_W:=\mathbb{C}[x,y,z]\Big/\left(\frac{\partial f_W}{\partial x},\frac{\partial f_W}{\partial y},\frac{\partial f_W}{\partial z}\right) \tag{4.5}$$

は有限次元次数付き $\mathbb{C}$-代数となり, とくに $\chi(W,t)$ は J_W の Poincaré 多項式です.

例 6. (A_l 型正規 weight 系)
$W=(1,b,l+1-b;l+1)$ としましょう (b は $0<b<l+1$ を満たす整数). このとき定義により

$$\chi(W,t)=\frac{1-t^{\frac{l}{l+1}}}{1-t^{\frac{1}{l+1}}} \tag{4.6}$$

となります. $f_W(x,y,z)=x^{l+1}+yz$ と取ることができて,

$$J_W\simeq\mathbb{C}[x]/(x^l) \tag{4.7}$$

となること，その Poincaré 多項式が $\chi(W,t)$ で与えられることはすぐにわかります．

次に，正規 weight 系 $W=(a,b,c;h)$ に対していくつか不変量を定義していきます．

定義 7. $\chi(W,1)$ を μ_W で表し，**Milnor 数**と呼ぶ．とくに

$$\mu_W = \dim_{\mathbb{C}} J_W = \frac{(h-a)(h-b)(h-c)}{abc}. \tag{4.8}$$

注意 8. 平坦構造 (flat structure) またはフロベニウス構造 (Frobenius structure) の観点からは，階数と呼ばれます．

定義 9. 有理数

$$n_W := (1-\frac{2a}{h})+(1-\frac{2b}{h})+(1-\frac{2c}{h}) = 3-2\frac{a+b+c}{h} \tag{4.9}$$

を正規 weight 系の次元と呼ぶ．

定義 10. $\epsilon_W := a+b+c-h$ とおき，最小指数 (minimal exponent) と呼ぶ．

注意 11. 後で見るように，ϵ_W は超平面特異点 R_W の標準加群 (canonical module) の次数を与えます．そして次数付き特異点の三角圏の構造に関して重要な役割を果たします．

ϵ_W を用いて，次のように正規ウェイト系を粗く分類することができます．

事実 12. (1) $\epsilon_W > 0$ ならば $\epsilon_W = 1$ (後で導入する, 正規ウェイト系の多重度に関する定理から従います). とくに W は ADE 特異点に対応する 5 種類 :

正規ウェイト系 W	f_W	特異点の型
$(1,b,l+1-b;l+1)$	$x^{l+1}+yz$	A_l 型特異点
$(2,l-2,l-1;2l-2)$	$x^{l-1}+xy^2+z^2$	D_l 型特異点
$(3,4,6;12)$	$x^4+y^3+z^2$	E_6 型特異点
$(6,4,9;18)$	$x^3+xy^3+z^2$	E_7 型特異点
$(6,10,15;30)$	$x^5+y^3+z^2$	E_8 型特異点

(2) $\epsilon_W = 0$ ならば，W は単純楕円型特異点に対応する 3 種類 :

正規ウェイト系 W	f_W	特異点の型
$(1,1,1;3)$	$x^3+y^3+z^3$	$\widetilde{E_6}$ 型特異点
$(1,1,2;4)$	$x^4+y^4+z^2$	$\widetilde{E_7}$ 型特異点
$(1,2,3;6)$	$x^6+y^3+z^2$	$\widetilde{E_8}$ 型特異点

(3) $\epsilon_W < 0$ の正規ウェイト系 W は無限個存在する．ただし ϵ_W を固定するごとに有限個である．

□

さらに不変量の定義を続けます．

定義 13. $\chi(W,t)$ は $t^{\frac{1}{h}}$ の多項式だったので，

$$\chi(W,t) = \sum_{i=1}^{\mu_W} t^{p_i}, \quad 0=:p_1<p_2\le\dots p_{\mu-1}<p_\mu := n_W, \quad p_i\in\frac{1}{h}\mathbb{Z}_{\ge 0} \tag{4.10}$$

のように展開できる．整数 $m_i := h\cdot p_i+\epsilon_W$ のことを，正規ウェイト系 W の指数 (**exponent**) と呼ぶ．

注意 14. $\chi(W,t)$ の定義により

$$\chi(W,t^{-1}) = t^{n_W}\chi(W,t) \tag{4.11}$$

となるので，p_i および指数 m_i たちの間に次の双対性がある :

$$p_i + p_{\mu_W - i+1} = n_W, \quad m_i + m_{\mu_W - i+1} = h, \quad i = 1, \ldots, \mu_W. \tag{4.12}$$

正規ウェイト系 W に対して，指数が $k(\in \mathbb{Z})$ となるものの個数を $mult_W(k)$ であらわすことにします．

定義 15. $mult_W := mult_W(-1) + mult_W(1)$ とおき，正規ウェイト系の多重度 **(multipulicity)** と呼ぶ．

次は重要な結果ですが，ここではその役割について述べることはできません．

定理 16. 正規ウェイト系 W に対して，多重度は常に 1 以上 $(mult_W \geq 1)$. □

さらに，もう少し幾何学的な情報を W から取り出しましょう．

定義 17. $g_W := mult_W(0)$ とおき，正規ウェイト系の種数 **(genus)** と呼ぶ．

定理 18. 正規ウェイト系 W に対して, 射影スキーム $C_W := \mathrm{Proj}(R_W) = X_{W,0}\backslash\{0\}/\mathbb{C}^*$ は 1 次元の滑らかな射影的代数多様体となる．とくに，その種数 $g(C_W)$ は g_W である． □

次数付き環 R_W は $R_{W,\frac{2}{h}}$ の元から生成されていないので，より精密に，商スタック $\mathcal{C}_W := \mathbb{P}\mathrm{roj}(R_W) = [X_{W,0}\backslash\{0\}/\mathbb{C}^*]$ を考えることができます．別の言い方をすると，C_W の情報に加えて，ウェイトで自然に定まる $\mathbb{C}^*$ 作用に関する固定点と固定化群の情報 (オービフォールドデータ) を付け加えたものが商スタック $\mathcal{C}_W$ です．この固定化群のデータも正規ウェイト系 W から次のように算術的に読みとることが出来ます．

定義 19. 正規ウェイト系 $W = (a_1, a_2, a_3; h)$ に対して，

$$m(a_i, a_j : h) := \sharp\{(u,v) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^2 \mid a_i u + a_j v = h\} \tag{4.13}$$

とおく．次の正の整数からなる多重集合 (multi-set)

$$A'_W := \left\{ a_i \mid \frac{h}{a_i} \notin \mathbb{Z},\ i = 1,2,3 \right\} \coprod \left\{ \gcd(a_i, a_j)^{(m(a_i,a_j:h)-1)} \mid 1 \leq i < j \leq 3 \right\} \tag{4.14}$$

を考える．ここで記号 $\gcd(a_i, a_j)^{(m(a_i,a_j:h)-1)}$ で，$(m(a_i, a_j : h) - 1)$ 個の $\gcd(a_i, a_j)$ を A'_W に含めるということをあらわす．A'_W の中で 1 に等しいものを除いた多重集合を $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_r$ と規格化しておき，$A_W = (\alpha_1, ..., \alpha_r)$ と書く．A_W を正規ウェイト系 W の標識 (signature) と呼ぶ.

最後に，もう一つ重要な概念を与えておきます．

定義 20. W の特性多項式 (characteristic polynomial) を

$$\varphi_W(\lambda) := \prod_{i=1}^{\mu_W} (\lambda - \mathbf{e}[\frac{m_i}{h}]) \tag{4.15}$$

で定める．$\varphi_W(\lambda)$ は円分多項式なので，割り算によって半順序が定められた, h の約数からなるある有限集合 $M(W)$ によって

$$\varphi_W(\lambda) = \prod_{i\in M(W)} (\lambda^i - 1)^{e_W(i)} \tag{4.16}$$

とただ一通りに書くことができる．この $e_W(i)$ のことを正規ウェイト系 W の円分指数 (cyclotomic exponent) と呼ぶ．

これで必要な不変量を定義し終えました．再度具体例の表でこれまで与えた不変量たちを整理しておきましょう．

例 **21.** $\epsilon_W = 1$ の場合.

W	μ_W	$nult_W$	g_W	A_W	$\varphi_W(\lambda)$	型
$(1,b,l+1-b;l+1)$	l	1	0	$(b,l+1-b)$	$\frac{\lambda^{l+1}-1}{\lambda-1}$	A_l
$(2,l-2,l-1;2l-2)$	l	1	0	$(2,2,l-2)$	$\frac{(\lambda^{2l-2}-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda^{l-1}-1)(\lambda-1)}$	D_l
$(3,4,6;12)$	6	1	0	$(2,3,3)$	$\frac{(\lambda^{12}-1)(\lambda^3-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda^6-1)(\lambda^4-1)(\lambda-1)}$	E_6
$(6,4,9;18)$	7	1	0	$(2,3,4)$	$\frac{(\lambda^{18}-1)(\lambda^3-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda^9-1)(\lambda^6-1)(\lambda-1)}$	E_7
$(6,10,15;30)$	8	1	0	$(2,3,5)$	$\frac{(\lambda^{30}-1)(\lambda^5-1)(\lambda^3-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda^{15}-1)(\lambda^{10}-1)(\lambda^6-1)(\lambda-1)}$	E_8

例 **22.** $\epsilon_W = 0$ の場合.

W	μ_W	$nult_W$	g_W	A_W	$\varphi_W(\lambda)$	型
$(1,1,1;3)$	8	3	1	$\{\emptyset\}$	$\frac{(\lambda^3-1)^3}{\lambda-1}$	$\widetilde{E}_6$
$(1,1,2;4)$	9	2	1	$\{\emptyset\}$	$\frac{(\lambda^4-1)^2(\lambda^2-1)}{\lambda-1}$	$\widetilde{E}_7$
$(1,1,1;3)$	10	1	1	$\{\emptyset\}$	$\frac{(\lambda^6-1)(\lambda^3-1)(\lambda^2-1)}{\lambda-1}$	$\widetilde{E}_8$

5. 位相的ミラー対称性と正規ウェイト系の双対性

さて，正規ウェイト系に対してさらに重要な不変量を定義しましょう．この節は筆者の論文 [13] の概要です．個々の結果に関するより詳しい文献は [13] の文献表を御覧ください．

$W = (a_1, a_2, a_3; h)$ を正規ウェイト系とします．$GL(3,\mathbb{C})$ の有限アーベル部分群 G であって，G の任意の元は $GL(3,\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}^3$ への自然な作用で $\mathrm{diag}(\mathbf{e}[\omega_1\alpha_1], \mathbf{e}[\omega_2\alpha_2], \mathbf{e}[\omega_3\alpha_3])$ の形であらわされ，$f_W(x_1,x_2,x_3)$ を不変にする，という性質をもつものを考えます．ここで，$\mathbf{e}[\cdot] := \exp(2\pi\sqrt{-1}\cdot)$, $\omega_i := a_i/h$ および $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ とします.

とくに $\mathrm{diag}(\mathbf{e}[\omega_1], \mathbf{e}[\omega_2], \mathbf{e}[\omega_3])$ で生成される $GL(3,\mathbb{C})$ の有限アーベル部分群 ($\simeq \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$) のことを G_W であらわすことにします.

これらの準備の下で，組 (W,G) に対してオービフォールドポアンカレ多項式 (orbifold Poincaré polynomial) と呼ばれる不変量 $\chi_\alpha(W,G)(y,\bar{y})$ を与えることができます:

定義 **23** (Vafa の公式)**.**

$$\chi(W,G)(y,\bar{y}) := \frac{(-1)^3}{|G|}\sum_{\alpha\in G}\chi_\alpha(W,G)(y,\bar{y}), \tag{5.1}$$

$$\chi_\alpha(W,G)(y,\bar{y}) := \sum_{\beta\in G}\prod_{\omega_i\alpha_i\notin\mathbb{Z}}(y\bar{y})^{\frac{1-2\omega_i}{2}}\left(\frac{y}{\bar{y}}\right)^{-\omega_i\alpha_i+[\omega_i\alpha_i]+\frac{1}{2}} \times\prod_{\omega_i\alpha_i\in\mathbb{Z}}\mathbf{e}\left[\omega_i\beta_i+\frac{1}{2}\right]\frac{1-\mathbf{e}\left[(1-\omega_i\beta_i)\right](y\bar{y})^{1-\omega_i}}{1-\mathbf{e}\left[\omega_i\beta_i\right](y\bar{y})^{\omega_i}}, \tag{5.2}$$

ここで $[\omega_i\alpha_i]$ で $\omega_i\alpha_i$ を越えない最大の整数をあらわす.

注意 24. $t := y\bar{y}$ とおいたとき，正規ウェイト系 W と自明な群 $G=\{1\}$ の組に対するオービフォールドポアンカレ多項式は

$$\chi(W,\{1\})(y,\bar{y}) = \chi(W,t) \tag{5.3}$$

となっており，先に定義した通常のポアンカレ多項式に一致します．

このオービフォールドポアンカレ多項式 $\chi(W,G)(y,\bar{y})$ は，射影的代数多様体 X に対するホッジ数の母函数

$$\chi(X)(y,\bar{y}) := \sum_{p,q}(-1)^{p+q}y^p\bar{y}^q\dim_{\mathbb{C}}H^q(X,\wedge^pT^*X) \tag{5.4}$$

のアナロジーです．これは次のような例で確認できます．

例 **25.** $W=(1,1,1;3)$, $G=G_W$ とする．$f_W(x_1,x_2,x_3)=x_1^3+x_2^3+x_3^3=0$ が $\mathbb{P}^2$ の中で定める楕円曲線を X とするとき，

$$\chi(W,G_W)(y,\bar{y}) = 1-y-\bar{y}+y\bar{y} = \chi(X)(y,\bar{y}) \tag{5.5}$$

が成立します．

最初に述べたように，n 次元カラビ・ヤウ多様体の組 (X,Y) は，

$$\chi(X)(y,\bar{y}) = (-1)^ny^n\chi(Y)(y^{-1},\bar{y}) \tag{5.6}$$

を満たすとき，位相的ミラー対と呼ばれます．射影的代数多様体 X と組 (W,G) のアナロジーに基づくと，次のような位相的ミラー対称性のアイデアに至ります:

定義 **26** (群作用付き正規ウェイト系の位相的ミラー対称性)**.** 組 (W,G) と組 (W^*,G^*) が位相的ミラー対であるとは，

$$\chi(W,G)(y,\bar{y}) = (-1)^{n_{W^*}}y^{n_{W^*}}\chi(W^*,G^*)(y^{-1},\bar{y}) \tag{5.7}$$

が成り立つこととする．

例 **27.** $W=W^*=(1,1,1;3)$, $G=G_W$, $G^*=\left\langle(\mathbf{e}[\frac{1}{3}],\mathbf{e}[\frac{1}{3}],\mathbf{e}[\frac{1}{3}]),(1,\mathbf{e}[\frac{1}{3}],\mathbf{e}[\frac{2}{3}])\right\rangle$ とする．このとき組 (W,G) と組 (W^*,G^*) は位相的ミラー対となります．とくに組 (W^*,G^*) は楕円曲線 X のミラー楕円曲線 X^* に対応します．

注意 28. 物理では (一般次元の) 群作用付き超曲面特異点のことをランダウ・ギンツブルグ軌道体模型 **(Landau-Ginzburg orbifold model)** と呼んでいます．歴史的には，このランダウ・ギンツブルグ軌道体模型の位相的ミラー対称性の研究から，カラビ・ヤウ多様体のミラー対称性の研究が発展しました．

どのような組 (W,G) と組 (W^*,G^*) が位相的ミラー対になるかを決定するのは，部分的なアイデアは知られているものの一般的には非常に難しい問題です．いま，正規ウェイト系に付随した特別な群 G として，私たちは二種類の群 $\{1\}$ および G_W を知っています．これらを用いて，次のように正規ウェイト系の双対性を定義することにしましょう:

定義 29. 正規ウェイト系 W に対して，W^* が W の双対 (dual) であるとは，

$$\chi(W,\{1\})(y,\bar{y}) = (-1)^{n_{W^*}} y^{n_{W^*}} \chi(W^*, G_{W^*})(y^{-1},\bar{y}) \tag{5.8}$$

が成り立つこととする．

これらの準備の下で，次のことが成立することがわかります．

定理 30. (1) W^* が W に双対ならば $(W^*)^* = W$.
(2) $mult_W = mult_{W^*} = 1$, $g_W = g_{W^*} = 0$ となる．とくに標識は $A_W = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ と書ける．(つまり $r = 3$).
(3) W^* が W に双対であることと，齋藤恭司の意味で双対であること，すなわち

$$\varphi_{W^*}(\lambda) = \prod_{i\in M(W^*)} (\lambda^i - 1)^{e_{W^*}(i)} = \prod_{i\in M(W)} (\lambda^i - 1)^{-e_W(h/i)} =: \varphi^*_W(\lambda) \tag{5.9}$$

が成り立つこと，は同値である．

□

注意 31. 厳密に言えば，上の (iii) の項目において「齋藤恭司の意味で双対」の部分を一部修正する必要があります．詳しくは [13] の定義 2.4. を御覧ください．

W^* を持つことができる W は次の 5 系列の正規ウェイト系に限られることがわかっています．具体的に列挙しましょう．

I 型

$$W = W^* = (p_2p_3, p_3p_1, p_1p_2; p_1p_2p_3). \tag{5.10}$$

ただし，$(p_i,p_j) = 1$, $i = 1,2,3$. 特異点の定義多項式として，

$$f_W(x,y,z) := x^{p_1} + y^{p_2} + z^{p_3}, \quad f_{W^*}(x_*,y_*,z_*) = x_*^{p_1} + y_*^{p_2} + z_*^{p_3} \tag{5.11}$$

を取ることができる．

II 型

$$W = (p_3, \frac{p_1p_3}{p_2}, (p_2-1)p_1; p_1p_3), \tag{5.12}$$

$$W^* = (p_3, p_1p_2, (\frac{p_3}{p_2} - 1)p_1; p_1p_3). \tag{5.13}$$

ただし，$p_2 \neq p_3$, $p_2|p_3$, $(p_1,p_3) = 1$, $(p_2-1,p_3) = 1$，$(p_3/p_2 - 1, p_3) = 1$. 特異点の定義多項式として，

$$f_W(x,y,z) := x^{p_1} + y^{p_2} + yz^{\frac{p_3}{p_2}}, \quad f_{W^*}(x_*,y_*,z_*) = x_*^{p_1} + y_*^{\frac{p_3}{p_2}} + y_*z_*^{p_2} \tag{5.14}$$

を取ることができる．

III 型

$$W = W^* = (p_2, p_1q_2, p_1q_3; p_1p_2). \tag{5.15}$$

ただし，$(p_1, p_2) = 1$，q_2 と q_3 は $p_2 + 1 = (q_2 + 1)(q_3 + 1)$ および $(q_2, q_3) = 1$ をみたす自然数とする. 特異点の定義多項式として，

$$f_W(x, y, z) := x^{p_1} + y^{q_3+1}z + yz^{q_2+1}, \quad f_{W^*}(x_*, y_*, z_*) = x_*^{p_1} + y_*^{q_3+1}z_* + y_*z_*^{q_2+1} \tag{5.16}$$

を取ることができる．

IV 型

$$W = (\frac{p_3}{p_1}, (p_1 - 1)\frac{p_3}{p_2}, p_2 - p_1 + 1; p_3), \tag{5.17}$$

$$W^* = (p_2, (\frac{p_3}{p_2} - 1)p_1, \frac{p_3}{p_1} - \frac{p_3}{p_2} + 1; p_3). \tag{5.18}$$

ただし，$p_1 \neq p_2 \neq p_3, p_1|p_3, p_2|p_3, (p_1-1, p_2) = 1, (p_2-p_1+1, p_3) = 1, (p_3/p_2-1, p_3/p_1) = 1, (p_3/p_1 - p_3/p_2 + 1, p_3) = 1$. 特異点の定義多項式として，

$$f_W(x, y, z) := x^{p_1} + xy^{\frac{p_2}{p_1}} + yz^{\frac{p_3}{p_2}}, \quad f_{W^*}(x_*, y_*, z_*) = x_*^{\frac{p_3}{p_2}} + x_*y_*^{\frac{p_2}{p_1}} + y_*z_*^{p_1} \tag{5.19}$$

を取ることができる．

V 型

$$W = (lm - m + 1, mk - k + 1, kl - l + 1; h), \tag{5.20}$$

$$W^* = (lm - l + 1, mk - m + 1, kl - k + 1; h). \tag{5.21}$$

ただし，k, l, m は $h = klm + 1$, $(lm - m + 1, h) = 1$，$(lm - l + 1, h) = 1$ を満たす任意の自然数とする. 特異点の定義多項式として，

$$f_W(x, y, z) := zx^k + xy^m + yz^l, \quad f_{W^*}(x_*, y_*, z_*) = z_*x_*^k + x_*y_*^l + y_*z_*^m \tag{5.22}$$

を取ることができる．

注意 32. ADE 特異点に対応する正規ウェイト系 $(\epsilon_W = 1)$ は全て自己双対 $W = W^*$ です．また，3 つの単純楕円型特異点に対応するもの $(\epsilon_W = 0)$ は，いずれも $g_W = 1$ なので，双対なウェイト系を持ちません．

6. 正規ウェイト系の双対性とアーノルドの奇妙な双対性

正規ウェイト系の双対性が興味深いのは，それがアーノルドの奇妙な双対性 (strange duality) を自然に拡張しているからです．少し具体的に見てみましょう．

アーノルドはユニモーダルな超曲面特異点の分類を行い，とくに $\mathbb{C}^*$ 作用を持つものに限ると先に挙げた 3 つの単純楕円型特異点と次に挙げる 14 個の例外型特異点 $(\epsilon_W = -1)$ となることを示しました．

正規ウェイト系 W	f_W	A_W	B_W	双対ウェイト系 W^*
$(6,14,21;42)$	$x^7+y^3+z^2$	(2,3,7)	$(2,3,7)$	$(6,14,21;42)$
$(6,8,15;30)$	$x^5+xy^3+z^2$	(2,3,8)	$(2,4,5)$	$(4,10,15;30)$
$(4,10,15;30)$	$x^5y+y^3+z^2$	(2,4,5)	$(2,3,8)$	$(6,8,15;30)$
$(6,8,9;24)$	$x^4+y^3+xz^2$	(2,3,9)	$(3,3,4)$	$(3,8,12;24)$
$(3,8,12;24)$	$zx^4+y^3+z^2$	(3,3,4)	$(2,3,9)$	$(6,8,9;24)$
$(4,6,11;22)$	$yx^4+xy^3+z^2$	(2,4,6)	$(2,4,6)$	$(4,6,11;22)$
$(4,5,10;20)$	$x^5+y^2z+z^2$	(2,5,5)	$(2,5,5)$	$(4,5,10;20)$
$(3,5,9;18)$	$zx^3+xy^3+z^2$	(3,3,5)	$(2,4,7)$	$(4,6,7;18)$
$(4,6,7;18)$	$x^3y+y^3+xz^2$	(2,4,7)	$(3,3,5)$	$(3,5,9;18)$
$(3,4,8;16)$	$x^4y+y^2z+z^2$	(3,4,4)	$(2,5,6)$	$(4,5,6;16)$
$(4,5,6;16)$	$x^4+zy^2+z^2$	(2,5,6)	$(3,4,4)$	$(3,4,8;16)$
$(3,5,6;15)$	$zx^3+y^3+xz^2$	(3,3,6)	$(3,3,6)$	$(3,5,6;15)$
$(3,4,5;13)$	$x^3y+y^2z+z^2x$	(3,4,5)	$(3,4,5)$	$(3,4,5;13)$
$(3,4,4;12)$	$x^4+y^2z+yz^2$	(4,4,4)	$(4,4,4)$	$(3,4,4;12)$

ここで，A_W は先ほど定義した正規ウェイト系の標識で，今の文脈ではドルガチェフ数 (Dolgachev number) と呼ばれています [4]．一方 B_W は特異点のミルナー格子 (交叉行列) の情報から定まる量で，ガブリエロフ数 (Gabrielov number) と呼ばれています [5]．上の表を注意深く見ると，$A_W = B_{W^*}$ が全ての W について成立していることがわかります．この現象はアーノルドによって最初に観察されて，奇妙な双対性と呼ばれています．

前節の考察により，このアーノルドの奇妙な双対性は群作用付きの特異点の位相的ミラー対称性と解釈することができました．位相的ミラー対称性はホモロジー的ミラー対称性に圏化されるので，アーノルドの奇妙な双対性 $A_W = B_{W^*}$ を三角圏の立場から考察することで，よりこの不思議な現象を自然に理解することが可能になると期待できます．

7. 消滅サイクルと一般ルート系

正規ウェイト系に対して，幾何学的に，一般ルート系 (generalized root system) と呼ばれる古典ルート系の拡張概念を対応させることができます．この節では [12] の 5 節の内容を復習し，問題提示を行います．

$W = (a,b,c;h)$ を正規ウェイト系, f_W を W に付随した多項式とします. このとき

$$f_W : \mathbb{C}^3 \backslash f_W^{-1}(0) \to \mathbb{C}\backslash\{0\} \tag{7.1}$$

は位相的に局所自明なファイバー束となります. そこで，ミルナーファイバー (Milnor fiber) と呼ばれる一般ファイバー

$$X_{W,1} := f_W^{-1}(1) \tag{7.2}$$

を考えると，これは複素 2 次元 (実 4 次元) の複素多様体ですので

$$I : H_2(X_{W,1},\mathbb{Z}) \times H_2(X_{W,1},\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z} \tag{7.3}$$

という交叉形式 (intersection form) が存在します. ミルナーの定理により $H_2(X_{W,1},\mathbb{Z})$ は階数 μ_W の自由加群となり，消滅サイクル (vanishing cycle) がこの自由加群を生成するということが知られています．組 $(H_2(X_{W,1},\mathbb{Z}) - I)$ はミルナー格子 (Milnor lattice) と呼ばれます．

また，モノドロミー $\rho : \pi_1(\mathbb{C}\backslash\{0\}, 1) \to \mathrm{Aut}(H_2(X_{W,1}, \mathbb{Z}), I)$ による $\pi_1(\mathbb{C}\backslash\{0\}, *)$ の生成元の像 $C \in \mathrm{Aut}(H_2(X_{W,1}, \mathbb{Z}), -I)$ をミルナーモノドロミー (Milnor monodromy) と呼びます．C は有限位数，とくに $C^h = 1$ となり，C の特性多項式は

$$\det(\lambda \cdot \mathrm{Id} - C) = \varphi_W(\lambda) \tag{7.4}$$

と，正規ウェイト系の特性多項式に一致することがわかります．

このとき，もっとも重要なのは次の事実です．

事実 33. $\epsilon_W = 1$，つまり f_W が ADE 特異点を定義するとき, $(H_2(X_{W,1}, \mathbb{Z}), -I)$ は対応する型のルート格子を与える. さらに，とくに消滅サイクルのホモロジー類のなす集合はルートの集合を与え，ミルナーモノドロミー C はコクセター変換を与える．すなわち，正規ウェイト系からミルナーファイバーの中間ホモロジーを経由することによって，ルート系が得られる．

齋藤恭司は古典的ルート系の概念を拡張した一般ルート系の公理を与えました．そして，W が一般の正規ウェイト系の場合にも，ミルナー格子 $(H_2(X_{W,1}, \mathbb{Z}), -I)$，消滅サイクルの集合，ミルナーモノドロミー C，これらのデータが一般ルート系の公理を満たすことを示しました．

一般化ルート系に着目するのは，原始形式による周期写像および平坦構造 (**Frobenius structure**) を具体的に研究するためです．しかしながら，この幾何学的構成は非常に超越的な消滅サイクルの幾何学に基づいており，極めて困難なものです．さらに，正規ウェイト系も一般ルート系も組み合わせ論的データによって定義された対象です．そこで齋藤恭司は次の問題を提起しました:

問題 34 ([12])**.** 正規ウェイト系 $W = (a, b, c; h)$ から, ミルナーファイバーのホモロジー $H_2(X_{W,1}, \mathbb{Z})$ を経由することなく, 算術的または組み合わせ論的に一般ルート系を構成せよ.

8. 位相的ミラー対称性からホモロジー的ミラー対称性へ

まず，スローガンを書くことにします．

正規ウェイト系から代数的に構成される三角圏を用いて, 齋藤恭司の問題を解決する！

このスローガンの下，最初に注意すべきは次のことです:

ミルナーファイバー $X_{W^*,1}$ の消滅サイクルは W^* に付随する深谷圏 $D^b\mathcal{F}(W^*)$ の対象

これは，$\mathbb{C}^3$ に標準的なシンプレクティック形式を入れたとき，それから導かれる $X_{W^*,1}$ 上のシンプレクティック形式に関して，消滅サイクルがラグランジアン部分多様体になっていることから非常に自然に期待されることです．問題は「W^* に付随する深谷圏 $D^b\mathcal{F}(W^*)$」と書いたものの，それを数学的に正確に定義することすら非常に難しいということです．

次に注意することは，正規ウェイト系の双対性です:

$$(W, G_W) \overset{\text{位相的ミラー対称性}}{\Longleftrightarrow} (W^*, \{1\}).$$

ホモロジー的ミラー対称性とは，シンプレクティック幾何学から定まる三角圏と複素 (非可換) 代数幾何学から定まる三角圏を入れ替える対称性のことでした．したがって，位相的ミラー対称性がホモロジー的ミラー対称性に圏化されるのならば，組 (W, G_W) から代

数的に定まる三角圏 $\mathcal{T}_{W,G_W}$ であって「深谷圏 $D^b\mathcal{F}(W^*)$」と同値になるものがあると期待できます．より具体的には，ホモロジー的ミラー対称性によって，次の表の左右の対象は

シンプレクティック側	複素 (非可換) 代数幾何側
$(W^*, \{1\})$	(W, G_W)
$H_2(X_{W^*,1}, \mathbb{Z})$ 中間ホモロジー群	$K_0(\mathcal{T}_{W,G_W})$ グロタンディーク群 **(Grothendieck group)**
$-I$ I : 交差形式	$\chi + {}^t\chi$ χ : オイラー形式
ルート = 消滅 cycle のホモロジー類	直既約な対象の類 $\in K_0(\mathcal{T}_{W,G_W})$
Coxeter 変換 = ミルナーモノドロミー	$S \circ T^{-1}$ S : セール函手 **(Serre functor)**

同じものの異なる実現であると期待されます．したがって，代数的に定まる $\mathcal{T}_{W,G_W}$ を調べることで，非常に超越的な消滅サイクルの幾何を調べることが可能になると思われるのです．これは，今の場合本来超越的な対称性であるミラー対称性が組み合わせ的対称性に帰着されている，という特殊性によっています．それでは，$\mathcal{T}_{W,G_W}$ はどのように定義されると思えるでしょうか？今の設定においてもっとも自然な候補は次のようなものです．

正規ウェイト系 W に対して，孤立特異点を定める多項式 $f_W \in \mathbb{C}[x,y,z]$ をひとつ固定します．このとき，組 $\mathcal{A}_{f_W} := (\mathbb{C}[x,y,z], f_W)$ を弱 A_∞-圏とみなすことができます (弱 A_∞-圏などの定義は残念ながら省略することにします)．そして $\mathcal{A}_{f_W}$ 上の $\widehat{G_W}$-同変な右 $\mathcal{A}_\infty$-加群のなす三角圏 $D_{\widehat{G_W}}(\mathrm{Mod}\text{-}\mathcal{A}_{f_W})$ を考えます．ここで，$\widehat{G_W}$ は

$$0 \to \mathbb{Z} \to \widehat{G_W}(\simeq \mathbb{Z}) \to G_W(\simeq \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}) \to 0 \tag{8.1}$$

で定義されるものです (群 G_W が $\mathbb{C}^*$-作用に起源をもつことによる拡大です)．

この圏 $D_{\widehat{G_W}}(\mathrm{Mod}\text{-}\mathcal{A}_{f_W})$ は，代数多様体 X に群 G が作用しているときの，G-同変な準連接層の複体のなす導来圏 $D_G(\mathrm{Qcoh}X)$ のアナロジーです．X が滑らかであって，X/G がクレパントな特異点解消 Y を持つとすると，$D_G(\mathrm{Qcoh}X)$ のコンパクトな対象 (対応する余表現可能函手が無限直和と可換となる対象) 全体のなす充満部分三角圏は, G-同変な連接層の有界複体のなす導来圏 $D^b_G(\mathrm{coh}X)$ と同値になり, とくに $D^b_G(\mathrm{coh}X) \simeq D^b(\mathrm{coh}Y)$ です．このアナロジーに基づくと，いまの設定において $\mathcal{A}_{f_W}$ は「滑らかで"$\mathcal{A}_{f_W}/G_W$"はクレパントな特異点解消をもつ」と考えられるため (再び，残念ながら，ここでは「 」内についてこれ以上説明しません)，$D_{\widehat{G_W}}(\mathrm{Mod}\text{-}\mathcal{A}_{f_W})$ のコンパクトな対象全体のなす充満部分三角圏が求める三角圏 $\mathcal{T}_{W,G_W}$ であって，$\mathcal{T}_{W,G_W}$ は弱 A_∞-圏 $\mathcal{A}_{f_W}$ の $\widehat{G_W}$-同変な導来圏 $D_{\widehat{G_W}}(\mathcal{A}_{f_W})$ と同値である，と考えられます．後で見るように，この三角圏 $D_{\widehat{G_W}}(\mathcal{A}_{f_W})$ は maximal Cohen-Macauley 加群の研究において導入された，行列因子化 (matrix factorization) のなす三角圏そのものになります．

このようにして，ミラー対称性の観点から行列因子化が登場します．さて，もう一方の有限次元代数はどうでしょうか？シンプレクティック幾何側，消滅サイクルの幾何側では，ルート格子 $(H_2(X_{W^*,1}, \mathbb{Z}), -I)$ の「よい基底」となる，消滅サイクルの特別な基底 **(distinguished basis)** が取れることが知られています．これの圏論的対応物が後で定義する exceptional collection と呼ばれる三角圏の対象の列 $(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_\mu)$ です．さらにこの exceptional collection がとくに strongly exceptional collection と呼ばれるものになっているとき，つまり $\mathcal{E}_i$ たちの間に Hom^0 以外全ての Ext が消えているとき，この自己準同型

代数 $\mathrm{End}(\mathcal{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_\mu)$ として有限次元代数が登場します．ミラー対称性の要請から，この有限次元代数の有限次元表現の複体のなす導来圏と (G_W-作用付き) 行列因子化の三角圏が三角同値となることが期待されるのです．

次の節から順に必要な定義を行い，この「期待」を予想として定式化しましょう．

9. $\mathbb{C}^*$ 作用付き特異点の三角圏

最初に基本的な記号法を整理することからはじめます．この節では，少し一般的な枠組みで議論することにします．

ある正の整数 h を一つ固定して与えます．そして S を $d+1$ 次元の $\frac{2}{h}\mathbb{Z}$-次数付き可換正則 (regular) ネーター環で，$S = \oplus_{k\in\frac{2}{h}\mathbb{Z}_{\geq 0}} S_k$, $S_0 = \mathbb{C}$ とかけるものとします．また，f を S の次数 2 の元とするとき，$R := S/(f)$ で定義します．とくに唯一の斉次極大イデアルを $\mathfrak{m}_R := \oplus_{k\in\frac{2}{h}\mathbb{Z}_{>0}} R_k$ と書くことにします．これからの議論では，R が次数付き孤立特異点であることが重要になりますので，それをまず仮定することします:

仮定 35. $\mathfrak{m}_R$ 以外の任意の斉次素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して，局所化 $R_{(\mathfrak{p})}$ は正則環になる．

次数付き R-加群とは，R-加群 M であって，$M = \oplus_{k\in\frac{2}{h}\mathbb{Z}} M_k$ と書け，さらに任意の $i, j \in \frac{2}{h}\mathbb{Z}$ に対して $R_i \cdot M_j \subset M_{i+j}$ が成り立つものとします．また，次数付き R-加群 M, N にたいして，$g : M \to N$ が次数 $s \in \frac{2}{h}\mathbb{Z}$ の準同型であるとは，g が R-準同型であって任意の i に対して $g(M_i) \subset N_{i+s}$ が成り立つこととします．次数付き R-加群のなすアーベル圏を $\mathrm{gr}{-}R$ と書きます．R はネーター環なので，$\mathrm{Ext}^i_R(M,N) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{gr}-R}(\tau^{-n}M, N) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{gr}-R}(M, \tau^n N)$ が成り立っていることに注意してください．また $R_0 = \mathbb{C}$ なので，任意の次数付き射影的 R-加群は自由加群となります．$\mathrm{gr}{-}R$ 上には，次数付き加群の次数をずらす操作

$$(\tau M)_k := M_{k+\frac{2}{h}} \tag{9.1}$$

により，自己同値 (auto-equivalence)τ が定まります．

次数付き射影加群のなす完全圏 (拡大で閉じている $\mathrm{gr}{-}R$ の充満部分圏) を $\mathrm{grproj}{-}R$ をあらわします．

定義 36 ([3][10])**.** 三角圏 $D^{gr}_{Sg}(R) := D^b(\mathrm{gr}{-}R)/D^b(\mathrm{grproj}{-}R)$ を $\mathbb{C}^*$-作用付き特異点の三角圏と呼ぶ．

T でこの三角圏 $D^{gr}_{Sg}(R)$ 上の移動函手をあらわします．

10. 次数付き maximal Cohen-Macauley 加群の三角圏

$D^{gr}_{Sg}(R)$ の定義は極めて単純なものですが，その圏の持つ定量的構造を調べるのにはあまり向いていません．というのも，局所化された圏として定義されているために，準同型の空間が非常に複雑だからです．そのため $D^{gr}_{Sg}(R)$ と三角同値な別の圏を導入しましょう.

定義 37. 次数付き R 加群 $M \in \mathrm{gr}{-}R$ が

$$\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}_R, M) = 0, \quad i < d = \dim R \tag{10.1}$$

を満たすとき，M を次数付き **maximal Cohen-Macauley** R-加群と呼ぶ．

次数付き maximal Cohen-Macauley R-加群のなす $\mathrm{gr}-R$ の充満部分圏 $\mathrm{CM}^{gr}(R)$ は完全圏となります．maximal Cohen-Macauley R-加群の同値な特徴づけがいくつかあるので，それを書いておきます．その前に一つ定義を行います．

定義 38. $K_R \in \mathrm{CM}^{gr}(R)$ が $i \neq d$ のとき $\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}_R, K_R) \simeq 0$ および $\mathrm{Ext}^d_R(R/\mathfrak{m}_R, K_R) \simeq \mathbb{C}$ を満たすとき，K_R は R の標準加群 (canonical module) であると呼ばれる．

補題 39. 次の条件は同値：

(1) $M \in \mathrm{CM}^{gr}(R)$.
(2) $H^i_{\mathfrak{m}_R}(M) = 0, (i \neq d)$. ここで，$H^\bullet_{\mathfrak{m}_R}$ は $\{\mathfrak{m}_R\}$ に台を持つ局所コホモロジー函手，つまり $H^i_{\mathfrak{m}_R}(M) := \varinjlim \mathrm{Ext}^i_R(R/R_{\geq n}, M)$, $R_{\geq n} := \oplus_{i \in \frac{2}{h}\mathbb{Z}_{\geq n}} R_i$ によって定義されるもの．
(3) $\mathrm{Ext}^i_R(M, K_R) = 0, (i > 0)$.

□

定義 40. 環 R は入射次元が有限で，その標準加群 K_R が存在して $\tau^{-\epsilon(R)}R$ とある $\epsilon(R) \in \mathbb{Z}$ に対して書けるとき，ゴーレンシュタイン (Gorenstein) であると呼ばれる．ここで $\epsilon(R)$ は R のゴーレンシュタインパラメーターと呼ばれる．

注意 41. 正規ウェイト系 W に対して定まる環 R_W は超曲面特異点なので，ゴーレンシュタイン環である．とくに $\epsilon(R) = \epsilon_W$ となる．

R は超曲面特異点と仮定したのでゴーレンシュタイン環，よって次が成り立つ:

補題 42 (Auslander)**.** $\mathrm{CM}^{gr}(R)$ はフロベニウス圏である，すなわち, 充分豊富な射影的対象と入射的対象をもつ完全圏で，とくに射影的対象のクラスと入射的対象のクラスが一致するものである． □

定義 43. 加法圏 $\underline{\mathrm{CM}^{gr}}(R)$ を次のように定める: $Ob(\underline{\mathrm{CM}^{gr}}(R)) = Ob(\mathrm{CM}^{gr}(R))$．準同型の空間 $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M, N)$ を $\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}-R}(M, N)/\mathcal{P}(M, N)$ で定義する．ここで，$\mathcal{P}(M, N)$ は射影的対象を経由する準同型全体のなす部分加群，つまり $g \in \mathcal{P}(M, N)$ とはある射影的対象 P と準同型 $g' : M \to P$ および $g'' : P \to N$ があって $g = g'' \circ g'$ となることである．

$\underline{\mathrm{CM}^{gr}}(R)$ はフロベニウス圏 $\mathrm{CM}^{gr}(R)$ の安定圏 (stable category) である．それゆえ

命題 44 (Happel)**.** $\underline{\mathrm{CM}^{gr}}(R)$ は三角圏となる． □

$\underline{\mathrm{CM}^{gr}}(R)$ は自然に $D^{gr}_{Sg}(R)$ の充満部分三角圏となりますが，次数付き $R-$ 加群 (の有界複体) のシジギー (syzygy) を考えることで，次の定理が得られます:

定理 45 ([3][10])**.** $\underline{\mathrm{CM}^{gr}}(R)$ は $D^{gr}_{Sg}(R)$ と三角同値． □

注意 46. いま，R は超曲面孤立特異点であることを仮定していたので，これらの三角圏 $\mathcal{T}_R := \underline{\mathrm{CM}^{gr}}(R) \simeq D^{gr}_{Sg}(R)$ は局所有限，すなわち，$\sum_i \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_R}(\mathcal{E}, T^i\mathcal{F}) < \infty$ がすべての対象 $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathcal{T}_R$ に対して成立します．さらに，$\mathcal{T}_R$ は Krull-Schmidt 的，つまり $\mathcal{T}_R$ の任意の対象は有限個の直既約対象の直和と同型で，かつ $\mathcal{T}_R$ のにおける任意の $p^2 = p$ となる準同型 p は分裂します．

$\underline{\mathrm{CM}^{gr}}(R)$ 上には，移動函手 T と次数ずらし函手 τ ($\mathrm{gr}-R$ 上のそれから導かれる)，という二つの自己同値がありました．ここで **AR** 移動函手 **(Auslander-Reiten translation functor)** τ_{AR} を $\tau_{AR} := T^{d-2}\tau^{-\epsilon(R)}$ で定めます．このとき次の重要な結果が知られています:

命題 47 (Auslander-Reiten duality[1])**.** $\underline{\mathrm{CM}^{gr}}(R)$ **上，次のような次数** 0 **の双函手的同型が存在する**:

$$\mathrm{Ext}^{d}_{\mathrm{gr}-R}(\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N),K_R)\simeq \mathrm{Ext}^{1}_{\mathrm{gr}-R}(N,\tau_{AR}(M)). \tag{10.2}$$

□

AR 移動函手の本当の定義や性質，上の命題の証明については本 [15] を御覧ください．これにより，$\underline{\mathrm{CM}^{gr}}(R)\simeq D^{gr}_{Sg}(R)$ はセール函手を持つことが直ちに従います:

定理 48. 函手 $\mathcal{S}:=T\tau_{AR}=T^{d-1}\tau^{-\epsilon(R)}$ は $\underline{\mathrm{CM}^{gr}}(R)$ 上のセール函手である．すなわち，$\mathcal{S}$ は双函手的同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N),\mathbb{C})\simeq \underline{\mathrm{Hom}}_R(N,SM),\quad M,N\in\underline{\mathrm{CM}^{gr}}(R),$$

を導く自己同値である．□

11. 次数付き行列因子化の三角圏

$D^{gr}_{Sg}(R)$ はかなり構造がわかりやすい圏 $\underline{\mathrm{CM}^{gr}}(R)$ に帰着されましたが，それでも具体的に対象・準同型を計算するには難しい圏です．より簡単な記述はないのでしょうか？

$R=S/(f)$ で，S は $d+1$ 次元の正則環でした．ですから，任意の次数付き maximal Cohen-Macauley$R$-加群 M は，ある有限階数の次数付き自由 S-加群 F_0 と F_1 を用いて，

$$0\to \tau^{-h}F_1\xrightarrow{f_1} F_0\to M\to 0 \tag{11.1}$$

という，(次数付き S-加群の圏 $\mathrm{gr}-S$ における) 射影的分解を持ちます．とくに，f を掛けるという操作は M 上では 0 を掛けることになるので，次数 0 の S-準同型 $f_0:F_0\to F_1$ であって $f_1f_0=f\cdot\mathrm{Id}_{F_0}$ および $f_0f_1=f\cdot\mathrm{Id}_{F_1}$ となるものをとることができます．このことから，次数付き maximal Cohen-Macauley$R$-加群の研究のために，Eisenbud は行列因子化 **(matrix factorization)** の概念を導入しました．

定義 49. F_0,F_1 を有限階数の次数付き自由 S-加群とします．次数 0 の S-準同型 $f_0:F_0\to F_1$ と次数 2 の S-準同型 $f_1:F_1\to F_0$ で $f_1f_0=f\cdot\mathrm{Id}_{F_0}$ および $f_0f_1=f\cdot\mathrm{Id}_{F_1}$ をみたすものが与えられたとき，

$$\overline{F}:=\left(\ F_0\ \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}}\ F_1\ \right)$$

と書いて，これを次数付き行列因子化と呼ぶ．$g:\overline{F}\to\overline{F'}$ が行列因子化の準同型であるとは，次数 0 の S-準同型 $g_0:F_0\to F_0'$ および $g_1:F_1\to F_1'$ の組 $g=(g_0,g_1)$ が $g_1f_0=f_0'g_0$ と $g_0f_1=f_1'g_1$ をみたすことをいう．

注意 50. 行列因子化 $\overline{F}$ に対して，F_0 の階数と F_1 の階数は等しい．この階数を行列因子化 $\overline{F}$ の階数と呼ぶことにします.

組 (S,f) に対して，加法圏 $\mathrm{MF}^{gr}_S(f)$ を f の次数付き行列因子化とします．F_0 および F_1 の項ごとに定まる完全列により，$\mathrm{MF}^{gr}_S(f)$ に完全圏の構造が導かれ, さらに，

補題 51 ([10])**.** $\mathrm{MF}^{gr}_S(f)$ はフロベニウス圏 □

であることがわかります．

このフロベニウス圏の安定圏 (今の場合ホモトピー圏と呼ばれる) を考えましょう．そのために，0 にホモトピー同値な準同型 (null-homotopic homomorphism) を次のように定義します:

定義 52. 行列因子化の準同型 $g = (g_0, g_1) : \overline{F} \to \overline{F'}$ が 0 にホモトピー同値であるとは，次数 -2 の S-準同型 $\psi_0 : F_0 \to F_1'$ および次数 0 の S-準同型 $\psi_1 : F_1 \to F_0'$ が存在して，$g_0 = f_1'\psi_0 + \psi_1 f_0$ と $g_1 = \psi_0 f_1 + f_0'\psi_1$ が成り立つこと.

$\mathrm{MF}_S^{gr}(f)$ における射影的対象を経由する準同型の全体は，ちょうどこの 0 にホモトピー同値な準同型の全体に一致しています.

定義 53. フロベニウス圏 $\mathrm{MF}_S^{gr}(f)$ の安定圏 (ホモトピー圏) を $\mathrm{HMF}_S^{gr}(f)$ であらわす．

$\mathrm{HMF}_S^{gr}(f)$ は自然に三角圏の構造を持ちますが，とくに対応

$$\overline{F} = \left(F_0 \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}} F_1 \right) \mapsto M := \mathrm{Coker}(f_1) \tag{11.2}$$

を考えることで，$\mathrm{HMF}_S^{gr}(f)$ と $\underline{\mathrm{CM}^{gr}}(R)$ は三角同値になります．よって，今までの結果をまとめると次のようになります．

命題 54 ([10][15])**.** $\mathrm{HMF}_S^{gr}(f)$ と $\underline{\mathrm{CM}^{gr}}(R)$ と $D_{Sg}^{gr}(R)$ は自然に三角同値となり，とくに自己同値函手 τ と整合的．

これらの圏の自己同値 T, τ の作用に関しては次の節でもう少し詳しく述べることにします．

12. A_∞-圏の導来圏としての次数付き行列因子化の三角圏

この節では $\mathrm{HMF}_S^{gr}(f)$ の構造をより詳しく見てみましょう．行列因子化を調べることは，具体的に自由加群の基底を取ることで，まさに文字通り，S-に成分をもつ行列のなす線型代数に帰着されます．これは，$\mathrm{HMF}_S^{gr}(f)$ を A_∞-圏 (S, f) の導来圏として解釈するということに他なりません．この観点からもう一度記述してみましょう．

定義 55. 組 (Q, G) が，(S, f) に対するサイズ r の次数付きねじれ複体 **(graded twisted complex)** であるとは,

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & Q_{-+} \\ Q_{+-} & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_{\pm\mp} \in \mathcal{M}_{2r\times 2r}(S), \quad Q^2 = f \cdot \mathrm{Id}_{2r\times 2r}, \tag{12.1}$$

$$G = \mathrm{diag}(\frac{2a_1}{h}, \ldots, \frac{2a_r}{h}, \frac{2b_1}{h} - 1, \ldots, \frac{2b_r}{h} - 1), \quad a_i, b_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, r, \tag{12.2}$$

$$2E(Q) - GQ + QG = Q \tag{12.3}$$

を満たすもののことする.

例 56. $S := \mathbb{C}[x]$, $f(x) := x^{l+1}$, $R := S/(f)$ とする.

$$M_{i,j} := \left(\begin{pmatrix} 0 & x^{l+1-i} \\ x^i & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{diag}\left(\frac{2i}{l+1}, \frac{2(i+j)}{l+1} - 1 \right) \right), i = 0, \ldots, l+1, j \in \mathbb{Z}, \tag{12.4}$$

は $(\mathbb{C}[x], x^{l+1})$ に対する次数付きねじれ複体である.

定義 **57.** 二つの次数付きねじれ複体に対して準同型の空間を

$$\mathrm{Hom}\left((Q,G),(Q',G')\right) :=$$
$$\left\{\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{++} & 0 \\ 0 & \Phi_{--} \end{pmatrix}, \Phi_{\pm\pm} \in M_{2r'\times 2r}(S) \mid Q'\Phi - \Phi Q = 0, 2E(\Phi) - G'\Phi + \Phi G = 0\right\}/\sim$$

で定める．ここで $\Phi \sim 0$ とは, ある $\Psi \in M_{2r'\times 2r}(S)$ があって，$\Phi = Q'\Psi + \Psi Q$ となることとする.

定義 **58.** 次数付きねじれ複体 (Q,G) の全体を対象, 上で定めた $\mathrm{Hom}((Q,G),(Q',G'))$ を射の集合とすることで加法圏が定まる. これを $D^b_{\mathbb{Z}}(S,f)$ と書く.

圏 $D^b_{\mathbb{Z}}(S,f)$ は次に定義する二つの自己同値 T および τ を持ちます．

定義 **59.** サイズ r の次数付きねじれ複体 (Q,G) に対して, サイズ r の次数付きねじれ複体 $T(Q,G)$ を次のように定める :

$$T(Q,G) := \left(\begin{pmatrix} 0 & -Q_{+-} \\ -Q_{-+} & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{diag}\left(\frac{2b_1}{h}, \ldots, \frac{2b_r}{h}, \frac{2(a_1+h)}{h} - 1, \ldots, \frac{2(a_r+h)}{h} - 1\right)\right). \tag{12.5}$$

定義 **60.** サイズ r の次数付きねじれ複体 (Q,G) に対して, サイズ r の次数付きねじれ複体 $\tau(Q,G)$ を次のように定める :

$$\tau(Q,G) := \left(Q, G + \frac{2}{h}\right). \tag{12.6}$$

定義から，これら二つの自己同値の間には関係 $T^2 = \tau^h$ が成り立ちます．

定義 **61.** $\Phi \in \mathrm{Hom}((Q,G),(Q',G'))$ に対して, 写像錐 $C(\Phi) = (Q_{C(\Phi)}, G_{C(\Phi)})$ を次で定める :

$$Q_{C(\Phi)} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Q_{+-} & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{++} & Q'_{-+} \\ -Q_{-+} & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_{--} & Q'_{+-} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_{C(\Phi)} := \tag{12.7}$$
$$\mathrm{diag}\left(\frac{2b_1}{h}, \ldots, \frac{2b_r}{h}, \frac{2a'_1}{h}, \ldots, \frac{2a'_r}{h}, \frac{2(a_1+h)}{h} - 1, \ldots, \frac{2(a_r+h)}{h} - 1, \frac{2b'_1}{h} - 1, \ldots, \frac{2b'_r}{h} - 1\right).$$

これらの準備の下，次のことが成立します:

定理 **62.** $D^b_{\mathbb{Z}}(S,f)$ は, T を移動函手,

$$(Q,G) \xrightarrow{\Phi} (Q',G') \to Cone(\Phi) \to T(Q,G)$$

を完全三角形とする三角圏の構造を持つ. とくに，自由加群の基底を取るという操作によって，自己同値函手 τ と整合的で自然な三角同値 $\mathrm{HMF}^{gr}_S(f) \simeq D^b_{\mathbb{Z}}(S,f)$ がある．

注意 63. 三角圏 $D^b_{\mathbb{Z}}(S,f)$ は，組 (S,f) を弱 A_∞-圏とみなしたとき，この弱 $A_\infty-$ 圏の $\mathbb{Z}$-同変な有界導来圏そのものを具体的に記述したものです．したがって，Bondal-Kapranov によって導入された強化三角圏 **(enhanced triangulated category)**[2] と呼ばれる「よいクラスの」三角圏となっています．

準備に時間がかかりましたが, これで正確に主張を述べることができました.

定理 64. これまでに導入した 4 つの三角圏は互いに三角同値 :

$$D^{gr}_{Sg}(R) = D^b(\mathrm{gr}{-}R)/D^b(\mathrm{grproj}{-}R) \simeq \underline{\mathrm{CM}^{gr}}(R) \simeq \mathrm{HMF}^{gr}_S(f) \simeq D^b_{\mathbb{Z}}(S, f). \tag{12.8}$$

これらの三角圏はセール函手 $\mathcal{S} = T^{d-1}\tau^{-\epsilon(R)}$ をもち，とくに，$\mathcal{S}$ は $\mathcal{S}^h = T^{h(d-1)-2\epsilon(R)}$ を満たす． □

セール函手 $\mathcal{S}$ が $\mathcal{S}^h = T^{n'}, h, n' \in \mathbb{Z}$ を満たすような三角圏は，次元 $n := n'/h$ を持つ分数的カラビ・ヤウ **(fractional Calabi–Yau)** 的三角圏であると呼ばれます．というのも，射影的代数多様体 X の連接層の有界複体のなす導来圏 $D^b(\mathrm{coh}X)$ を考えたとき，そのセール函手 $\mathcal{S}_X$ は X の標準束 K_X を用いて，$\mathcal{S}_X(\cdot) \simeq T^{\dim_{\mathbb{C}} X} \circ K_X \otimes \cdot$ と書け，とくに X がカラビ・ヤウ多様体ならば $\mathcal{S}_X \simeq T^{\dim_{\mathbb{C}} X}$ となるからです．

正規ウェイト系 W に付随する，特異点を定める多項式 f_W を一つ固定します．そしてこれまでに定義した同値な三角圏 (のいずれか) を $\mathcal{T}_W$ であらわします．つまり

$$\mathcal{T}_W := D^{gr}_{Sg}(R_W) = \underline{\mathrm{CM}^{gr}}(R_W) \simeq \mathrm{HMF}^{gr}_S(f_W) \simeq D^b_{\mathbb{Z}}(S, f_W) \tag{12.9}$$

とします．すると $d = 2$ なので，$\mathcal{T}_W$ は次元 $(h - 2\epsilon_W)/h = n_W$ を持つ分数的カラビ・ヤウ的三角圏となります．正規ウェイト系の節において，有理数 n_W を次元と呼んだ理由が少し伝わったでしょうか．

13. 予想

いよいよ $\mathcal{T}_W$ が満たすべき性質を正確に述べられる直前まで来ました．まず主張を述べるために言葉を準備します．

定義 65. $\mathbb{C}$-線型な三角圏 $\mathcal{T}$ の対象 $\mathcal{E}$ が $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{E}, T^p\mathcal{E}) = 0, (p \neq 0)$ および $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = \mathbb{C}$ を満たすとき，$\mathcal{E}$ は **exceptional** であると呼ばれる. exceptional な対象の列 $(\mathcal{E}_0, \ldots, \mathcal{E}_n)$ がすべての p と $i > j$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{E}_i, T^p\mathcal{E}_j) = 0$ を満たすとき，列 $(\mathcal{E}_0, \ldots, \mathcal{E}_n)$ は **exceptional collection** と呼ばれる．exceptional collection$(\mathcal{E}_0, \ldots, \mathcal{E}_n)$ を含む最小の三角圏が $\mathcal{T}$ と同値となるとき，$(\mathcal{E}_0, \ldots, \mathcal{E}_n)$ は **full** である，または $\mathcal{T}$ は full exceptional collection を持つといわれる．

さらに，exceptional collection $(\mathcal{E}_0, \ldots, \mathcal{E}_n)$ が，すべての i, j および 0 以外のすべての p に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{E}_i, T^p\mathcal{E}_j) = 0$ を満たすとき，それは **strongly exceptional collection** であると呼ばれる．

特異点に対して位相的ミラー対称性がホモロジー的ミラー対称性に持ち上がるならば，$\mathcal{T}_W$ は次の性質を持つはずです．

予想 66 ([14])**.** 正規ウェイト系 W は双対ウェイト系 W^* を持つとする．

(1) $\mathcal{T}_W$ は *full strongly exceptional collection* $(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_{\mu^*_W})$ を持つ．したがって，$A := \mathrm{End}(\mathcal{E})$, $\mathcal{E} := \oplus_{i=1}^{\mu_{W^*}} \mathcal{E}_i$ とおいたとき，次の三角同値が成り立つ :

$$\mathcal{T}_W \simeq D^b(\mathrm{mod}{-}A). \tag{13.1}$$

(2) 格子の同型

$$(K_0(\mathcal{T}_W), \chi + {}^t\chi) \simeq (H_2(X_{W^*,1}, \mathbb{Z}), -I) \tag{13.2}$$

が成り立つ，ここで，$\chi(\mathcal{E}, \mathcal{F}) := \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_W}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ とする．

この予想を示すことができれば，齋藤恭司の問題に肯定的に答えることができます．

14. 主結果

現在のところ，以下に述べるいくつかの結果が得られています．

定理 67 ([7])**.** $\epsilon_W = 1$ ならば前節の予想は正しい．とくに A は対応する型の Dynkin 箙の経路代数 (path algebra)．□

系 68. 正規ウェイト系 W が I 型のとき，前節の予想は正しい．□

定理 69 ([8])**.** $\epsilon_W = -1$ かつ $g_W = 0$ となる正規ウェイト系 W に対して，三角圏 $\mathcal{T}_W$ は *full strongly exceptional collection* を持つ．とくに W が双対ウェイト系 W^* を持つとき，格子の同型 $(K_0(\mathcal{T}_W), \chi + {}^t\chi) \simeq (H_2(X_{W^*,1}, \mathbb{Z}), -I)$ が成り立つ．□

これらの定理は，行列因子化を具体的に計算することで「非常に良い振る舞いをする対象」を予想される格子の階数の個数見つけて，次にそれらが生成する充満部分三角圏が実は全体に一致するということを示す，という方法で証明されます．全体に一致することを証明する部分において，「$M \in \mathrm{CM}^{gr}(R)$ が，$i \neq d$ のとき $\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, M) \simeq 0$ をみたすならば，M は標準加群 (の次数ずらし) の直和である」ということを用います．

一方で，$\mathrm{tor}{-}R$ を長さ有限の次数付き R-加群のなす $\mathrm{gr}{-}R$ の充満部分圏とするとき，Orlov は $\mathrm{gr}{-}R$, $\mathrm{grproj}{-}R$, $\mathrm{tor}{-}R$ という三つのカテゴリーの「大小関係」を比較するというアイデアから次の構造定理を示しています:

定理 70 ([10])**.** (1) $\epsilon(R) > 0$ のとき，$D^b(\mathrm{gr}{-}R/\mathrm{tor}{-}R) \simeq \left\langle \tau^{-\epsilon(R)+1}R, \ldots, R, D^{gr}_{Sg}(R) \right\rangle$.
(2) $\epsilon(R) = 0$ のとき，$D^b(\mathrm{gr}{-}R/\mathrm{tor}{-}R) \simeq D^{gr}_{Sg}(R)$.
(3) $\epsilon(R) < 0$ のとき，$D^{gr}_{Sg}(R) \simeq \left\langle R/\mathfrak{m}, \ldots, \tau^{-\epsilon(R)+1}R/\mathfrak{m}, D^b(\mathrm{gr}{-}R/\mathrm{tor}{-}R) \right\rangle$.
□

さて，正規ウェイト系に対して標識 $A_W = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ という概念を定義していました. 標識 A_W に基づき定義されるアーベル群

$$\oplus_{i=1}^r \mathbb{Z}\vec{x}_i \,/(\alpha_i \vec{x}_i - \alpha_j \vec{x}_j; i, j = 1, \ldots, r) \tag{14.1}$$

を次数に持つ環，A_W-次数付き環，を次のように定義します:

$$R_{A_W,\lambda} := \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_r]/I_{A_W,\lambda}, \quad I_{A_W,\lambda} := (X_1^{\alpha_1} - X_2^{\alpha_2} + \lambda_i X_i^{\alpha_i}; i = 3, \ldots, r)\,, \tag{14.2}$$

ここで，$\lambda_3 := 1$, $\lambda_i (4 \leq i \leq r)$ は $\mathbb{P}^1 \backslash \{0, 1, \infty\}$ の相異なる $r-3$ 点とし，各変数 X_i は A_W-次数 $\vec{x}_i$ を持つとします．

この $\mathbb{P}^1 \backslash \{0, 1, \infty\}$ の相異なる $r-3$ 点 λ_i を固定することで，正規ウェイト系に付随する特異点を定める多項式 f_W を固定することができます．これを $f_{W,\lambda}$, そして $R_{W,\lambda} := \mathbb{C}[x, y, z]/(f_{W,\lambda})$ と書くことにしましょう．

注意 71. W が双対 W^* を持つときには $r = 3$ なので, パラメーター λ は現れず，したがって三角圏 $\mathcal{T}_W$ は f_W の取り方によりません．

定理 72 ([9])**.** $g_W = 0$ ならば，次の代数的スタックとしての同型がある*:*

$$\mathcal{C}_{W,\lambda} \simeq \mathcal{C}_{A_W,\lambda}. \tag{14.3}$$

つまり，次のアーベル圏としての圏同値が成り立つ*:*

$$\mathrm{gr}{-}R_{W,\lambda}/\mathrm{tor}{-}R_{W,\lambda} \simeq \mathrm{gr}{-}R_{A_W,\lambda}/\mathrm{tor}{-}R_{A_W,\lambda}. \tag{14.4}$$

□

とくに Geigle-Lenzing の結果 [6] により，$D^b(\mathrm{coh}(\mathcal{C}_{A_W,\lambda}))$ が full strongly exceptional collection を持つことが知られています．よって，これらの結果を合わせると，次のことがわかります：

系 73 ([9])**.** $g_W = 0$ のとき，$\mathcal{T}_W$ は *full exceptional collection* を持つ． □

15. おわりに

前節のあたりまで書いたところでこの原稿の締め切りが過ぎてしまいました．必要最小限のことは書きましたが，$\epsilon_W = -1$ のときの有限次元代数の具体的表示，関係式をもつ箙の経路代数，のことや，三角圏 $\mathcal{T}_W$ 上に自然に定まる Bridgeland-Douglas 安定性条件・t-構造のことなど，まだまだ多くの書くべきことが残ってしまいました．

大変申し訳ありませんが，今回は残念ながらここで筆を置くことにします．可能ならもう少し詳しく書いたものをそのうちどこかのホームページに置きたいと考えています．

References

[1] M. Auslander and I. Reiten, *Almost split sequences for Z-graded rings*, Singularities, representation of algebras, and vector bundles (Lambrecht, 1985), 232–243, Lecture Notes in Math., 1273, Springer, Berlin, 1987.

[2] A. Bondal and M. Kapranov, *Enhanced triangulated categories*, Math. USSR Sbornik, Vol.70, (1991) No.1, 93–107.

[3] R. Buchweitz, *Maximal Cohen-Macaulay modules and Tate-cohomology over Gorenstein rings*, a note.

[4] I. V. Dolgachev, *Conic quotient singularities of complex surfaces*, (Russian) Funkcional. Anal. i Prilo v zen. 8 (1974), no. 2, 75–76.

[5] A. M. Gabrielov, *Dynkin diagrams of unimodal singularities*, (Russian) Funkcional. Anal. i Prilo v zen. 8 (1974), no. 3, 1–6.

[6] W. Geigle and H. Lenzing, *A class of weighted projective curves arising in representation theory of finite-dimensional algebras*, Singularities, representation of algebras, and vector bundles (Lambrecht, 1985), 9–34, Lecture Notes in Math., 1273, Springer, Berlin, 1987.

[7] H. Kajiura, K. Saito and A. Takahashi, *Matrix Factorizations and Representations of Quivers II: type ADE case*, math.AG/0511155, to appear in Adv. Math..

[8] ———, *Categories of matrix Factorizations for exceptional singularities*, in preparation.

[9] ———, *Weighted projective lines associated to regular weight systems*, in preparation.

[10] D. Orlov, *Derived categories of coherent sheaves and triangulated categories of singularities*, math.AG/0503632

[11] K. Saito, *Duality for Regular Systems of Weights*, Asian. J. Math. **2** no.4 (1998) 983-1048.

[12] ———, *Around the Theory of the Generalized Weight System: Relations with Singularity Theory, the Generalized Weyl Group and Its Invariant Theory, Etc.*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) Vol.183 (1998) 101- 143.

[13] A. Takahashi, *K. Saito's Duality for Regular Weight Systems and Duality for Orbifoldized Poincaré Polynomials*, Commun. Math. Phys. **205** (1999) 571-586.

[14] ———, *Matrix Factorizations and Representation of Quivers I*, math.AG/0506347.

[15] Y. Yoshino, *Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 146, Cambridge University Press, Cambridge, 1990. viii+177 pp.

Research Institute for Mathematical Sciences
Kyoto University
Kyoto, Kyoto 606-8502 JAPAN

E-mail address: atsushi@kurims.kyoto-u.ac.jp