対称群のブルエ予想

AKIHIKO HIDA (飛田明彦)

1. Introduction

有限群の表現論において, 現在重要な問題とされているものに群環の block の間の derived equivalence に関する Broué 予想と呼ばれるものがあります. 対称群の場合は [3], [4] によってこの予想は証明されています.

対称群の場合, [2] で weight が 2 の block について Broué 予想が証明されていますが, そこでは

(i) weight が 2 の block は全て derived equivalnet

(ii) defect group が可換な場合 (つまり $2 < p$ のとき) その中に特別な block で wreath product

$$(S_p \times S_p) \rtimes S_2$$

の block と equivalent になるものが存在する

という 2 点が証明されています. これらと知られている結果をあわせると Broué 予想は証明されたことになります. この (i) (ii) を weight が 2 の場合に限らず一般に証明できれば, 対称群についての Broué 予想は証明されることになります.

(i) の方は Rickard によるもので, (defect group が可換ということと関係なく) 一般の weight の block について成立することが予想されていました. (ii) の特別な block は Rouquier によって見出されたもので, [3] により (weight 2 に限らず) 一般の場合に証明されました. [4] において, (i) が一般の場合に証明され, 対称群についての Broué 予想が証明されたことになります. [4] では (i) の一般の場合に相当する主張が有限一般線形群に対しても示されています. 有限一般線形群 の場合, (ii) の一般の場合に相当する部分は, 宮地兵衛, Turner [8] により証明されています.

[4] では対称群の場合の手法を一般化して, sl_2-categorification という概念を導入しています. これは対称群, (あるいは有限一般線形群) などの有限群だけではなく, Hecke algebra, $\mathfrak{gl}_n$ の category $\mathcal{O}$ や代数群の rational representation なども範囲に含むものです.

ここでは, 対称群の場合を例にとり sl_2-categorification と derived equivalence について (上の (i) の一般の場合にあたる部分) の解説を試みます.

なお, 筆者の力不足のため, 誤解している部分や不正確なところもあると思います. 特に次の点お詫びします.

- パラメーター q が 1 の場合に限定してしまったこと
- affine Lie algebra $\hat{sl}_p$ の作用やクリスタルグラフとの関係に触れない様にしたため不自然な記述になっていること
- minimal categorification に関する部分 Theorem 4.6 (これは重要で興味ある部分だと思うのですが) の証明を略してしまったこと

sl_2-categorification の対象としては上にもあるように, 初めから Lie theory と何らかの関係があるものが多い訳ですが, Lie theory とは関係無い有限群の block や有限次元多元環の場合に適用されることもあればおもしろいのではないか, などと素人考えですが思ったりしています.

以下, 2 章では有限群の block と Broué 予想について簡単に述べます. 3 章では対称群の表現についてごく簡単に述べます. 4 章では対称群の場合を例に sl_2-categorification について説明し, derived equivalence に関する主結果を述べ, 5 章で主定理を証明します. Broué 予想について詳しくは [6] を, 対称群の表現については, [1], [5], [7] などを参照してください.

最後になりましたが, 伊山さん他お世話になりました方々にこの場を借りまして御礼申し上げます. ありがとうございました.

2. 有限群のブロックと Brauer 対応

G を有限群, k を正標数 p の代数的閉体とする. 群環 kG の中心

$$Z(kG) = \{x \in kG \mid xy = yx,\ \forall y \in kG\}$$

の原始べき等元を kG の block という. つまり, $b \in Z(kG)$, $b \neq 0$, $b^2 = b$ となる b で, $b = b_1 + b_2$, $b_i \in Z(kG)$, $b_i^2 = b_i$, $b_1 b_2 = 0$ ならば $b_1 = 0$ または $b_2 = 0$ となるもののことである. 対応するイデアル kGb を block と呼ぶこともある.

G の部分群 H に対して,

$$(kG)^H = \{x \in kG \mid h^{-1}xh = x,\ \forall h \in H\}$$

とおく. $K \leq H \leq G$ に対して,

$$Tr_K^H : (kG)^K \longrightarrow (kG)^H$$

を

$$Tr_K^H(x) = \sum_{h \in K\backslash H} h^{-1}xh$$

と定義する.

b を kG の block とすると, $b \in Z(kG) = (kG)^G$ である. $b \in Tr_D^G((kG)^D)$ となる部分群 D で極小なものを b の defect group という. これは共役を除き一意的に決まる p-部分群である.

Theorem 2.1 (Brauer の第一主定理)**.** *D を G の p-部分群, $N_G(D)$ を D の正規化群とする. このとき, defect group が D の kG の block と defect group が D の $kN_G(D)$ の block との間に一対一の対応がある.*

b を kG の block で defect group が D のもの, b' を b の Brauer 対応 (上の定理で b に対応する $kN_G(D)$ の block) とする. defect group が正規部分群の場合, つまり, $kN_G(D)b'$ はかなりわかりやすい状況となっている. そこで, $kN_G(D)b'$ から kGb の情報を得られるか, $kN_G(D)b'$ と kGb の関係はどうなっているかということが問題となる.

Conjecture 2.2 (Broué)**.** *D が可換群の場合, kGb と $kN_G(D)b'$ は derived equivalent.*

n 次対称群 S_n の場合の状況を見てみよう. b_i $(i = 1, 2)$ を kS_{n_i} の block, D_i を b_i の defect group, N_i を S_{n_i} での D_i の正規化群, b_i' を kN_i での b_i の Brauer 対応とする. もし $D_1 \cong D_2$ ならば kN_1b_1' と kN_2b_2' は Morita equivalent であることがわかる. よってこ

の予想を証明するためには次の 2 つを証明すればよい.

(1) 対称群 S_n $(n = 1, 2, \cdots)$ の block で defect group が同型なものは全て derived equivalent.

(2) defect group が可換 のときには, その中に Brauer 対応と derived equivalent なものがある.

(2) は [3] の結果である. ここでは [4] による (1) について解説していくことにする.

3. 対称群の表現

対称群のモヂュラー表現について必要な事項をごく簡単に述べる.

自然数の分割

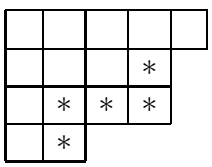
n を自然数とし, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq 0$, $\sum \alpha_i = n$ となるとき α を n の partition という. 任意の k に対して, $\#\{j \mid \alpha_j = k\} < p$ となるとき, α を p-regular partiton という. $\square$ を上から左端をそろえて α_1 個, α_2 個, $\dots$ と並べた図を Young 図形という. 以下 partition と Young 図形を同一視することもある. α (の Young 図形) の (上から) i 行 (左から)j 列の node (i, j) に対して, その p-residue を $j - i \mod p$ と定義する.

Example 3.1. $p = 3$ の場合.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 0 & \cdots \\ 2 & 0 & 1 & & \\ 1 & 2 & 0 & & \end{array}$$

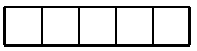
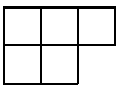
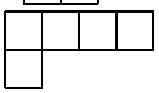
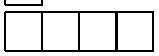
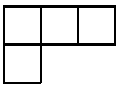
α の node (i, j) に対して, i 行の右端から j 列の一番下までの連続した p 個を p-rim hook という.

Example 3.2. $p = 5$, $\alpha = (5442)$. $*$ の部分が 5-rim hook の例.



α から p-rim hook を取り除いていくと, p-rim hook のない図形に到達する. それを α の p-core, p-rim hook を取り除く回数を weight という. (p-rim hook の取り方によらず決まる).

Example 3.3. $p=2$, $n=4,5$, 2-regular partition の場合.

α	Young 図形	2-core	weight
(5)			2
(32)			2
(41)			1
(4)		$\emptyset$	2
(31)		$\emptyset$	2

対称群の block

simple kS_n-module の同型類は n の p-regular partition と一対一に対応していることが知られている. α に対応する kS_n-module を D^α で表す. 2 つの simple kS_n-module D^α と D^β が同じ block に属するのは α と β の p-core が同じときである. つまり, 対称群の block は p-core と weight で決まる訳である. また, 2 つの block の defect group が同型となるのは weight が等しいときである.

b を kS_n の block で p-core が τ, weight w とする. $t=n-wp$ とおくと τ は t の partition である. b の defect group D を適当にとると, 次の様になる.

$$S_{wp}\times S_t\leq S_n,\quad D\in \mathrm{Syl}_p(S_{wp})$$
$$N_{S_n}(D)=N_{S_{wp}}(D)\times S_t.$$

kS_nb の Brauer 対応は

$$kN_{S_{wp}}(D)\bigotimes_k kS_tb_\tau$$

である. $kN_{S_{wp}}(D)$ はひとつの block しか持たない. b_τ は p-core τ, weight 0 の kS_t の block で kS_tb_τ は simple algebra であり,

$$kN_{S_{wp}}(D)\bigotimes_k kS_tb_\tau$$

は $kN_{S_{wp}}(D)$ と Morita equivalent になっている.

対称群の weight w の block について, defect group が可換となるのは $w<p$ のときである. 特に p が小さい場合はほとんど可換とはならない.

Example 3.4. $p=2$ とする.

(1) kS_4 (これ自身がひとつの block). (2-core $\emptyset$, weight 2.) simple module は 2 つ $D^{(4)}$, $D^{(31)}$ で k 上の次元は 1, 2 である. projective indecomposable module の構造は次の様になっている. $D^{(4)}=1$, $D^{(31)}=2$ とそれぞれ次元で略記する. P_i を i の projective cover とする.

$$P_1=\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & 2\\ 2 & & 1\\ & 1 & \end{pmatrix},\quad P_2=\begin{pmatrix} & 2 & \\ 1 & & 2\\ 1 & & \\ & 2 & \end{pmatrix}$$

(2) kS_5 の principal block (自明な表現の属する block). (2-core (1), weight 2). simple module は $D^{(5)}$, $D^{(32)}$ で次元は 1, 4.

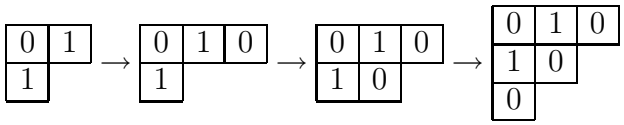
$$P_1 = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & 4 \\ 4 & & 1 \\ 1 & & 1 \\ 1 & & 4 \\ 4 & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

どちらの block も defect group D は位数 8 の二面体群 (非可換) であり Brauer 対応は kD である. これらの 2 つの block は derived equivalent であるが kD とは derived equivalent ではない.

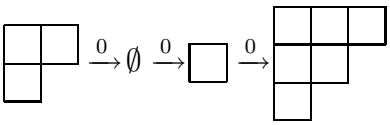
Functor E, F

$i = 0, 1, \ldots, p-1$ とする. b を kS_n の block で p-core κ, b' を kS_{n+1} の block で p-core κ' とする. core が κ である n の partition λ と core が κ' である $n+1$ の partition λ' で λ に residue が i の node を付け加えると λ' となるようなものがあるとき, $b \xrightarrow{i} b'$ とかくことにする.

Example 3.5. $p = 2$, $i = 0$ とする. partition の列



に対して, 2-core (または block) の列.



$b \xrightarrow{i} b'$ のとき 2 つの functor を,

$$E_i = b'kS_{n+1}b \bigotimes_{kS_n b} - : kS_n\text{-mod} \longrightarrow kS_{n+1}\text{-mod}$$

$$F_i = bkS_{n+1}b' \bigotimes_{kS_{n+1}b'} - : kS_{n+1}\text{-mod} \longrightarrow kS_n\text{-mod}$$

と定義する. $b \xrightarrow{i} b'$ となる b または b' がないときは 0 とする. このとき,

$$\mathrm{Ind}_{S_n}^{S_{n+1}} = \bigoplus E_i, \quad \mathrm{Res}_{S_n}^{S_{n+1}} = \bigoplus F_i$$

であり E_i と F_i は互いに (left and right) adjoint の関係にある. block の列

$$b_0 \xrightarrow{i} b_1 \xrightarrow{i} \cdots \xrightarrow{i} b_n$$

($b' \xrightarrow{i} b_0$, $b_n \xrightarrow{i} b''$ となるような b', b'' はないとする) があるとする. このとき, $0 \leq l \leq n$ に対し

$$b_l \overset{i}{\sim} b_{n-l}$$

とかくことにする. このとき weight が同じ block について次が知られている.

Theorem 3.6. *b, b' を対称群の block で weight が同じものとする. $0 \leq i_0, \ldots, i_{m-1} \leq p-1$ と block $b_1, \ldots, b_{m-1}$ で*

$$b \overset{i_0}{\sim} b_1 \overset{i_1}{\sim} \cdots \overset{i_{m-1}}{\sim} b'$$

となるものが存在する.

よって, 対称群の weight が同じ block は全て derived equivalent であることをいうためには, $b \overset{i}{\sim} b'$ ならば 2 つの block は derived equivalent であることを示せばよい.

$sl_2(\mathbb{Q})$ の表現
Lie algebra

$$sl_2(\mathbb{Q}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{Q},\ a+d=0 \right\}$$

の基底を

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = [e,f] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とする. 有限次元 $sl_2(\mathbb{Q})$-module V と $\lambda \in \mathbb{Z}$ に対して

$$V_\lambda = \{v \in V \mid hv = \lambda v\}$$

とおくと

$$V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$$

となっている. $s = exp(-f)exp(e)exp(-f)$ とおくとこれは V 上の線形写像として意味を持ち

$$s : V_{-\lambda} \xrightarrow{\sim} V_\lambda$$

となる. $v \in V_{-\lambda}$ ならば

$$sv = \sum_r (-1)^r \frac{e^{\lambda+r}}{(\lambda+r)!} \frac{f^r}{r!} v$$

である.
b_j を kS_{m+j} の block,

$$b_0 \xrightarrow{i} b_1 \xrightarrow{i} \cdots \xrightarrow{i} b_n$$

($b' \xrightarrow{i} b_0$, $b_n \xrightarrow{i} b''$ となる b, b'' はない) とする.

$$A = \bigoplus_j kS_{m+j} b_j$$

$$E_i = \bigoplus E_i, \ F_i = \bigoplus F_i : A\text{-mod} \longrightarrow A\text{-mod}$$

とする. $K_0(A\text{-mod})$ を Grothendieck group とする.

Theorem 3.7. $V = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(A\text{-}mod)$ とする.

$$e \mapsto [E_i], \quad f \mapsto [F_i]$$

により V は $sl_2(\mathbb{Q})$-*module* となり

$$V_{-n+2j} = \mathbb{Q} \bigotimes_{\mathbb{Z}} K_0(kS_{m+j}b_j\text{-mod})$$

である.

この V への $sl_2(\mathbb{Q})$ の作用を考えると 上記の sv の形から

$$D^b(kS_{m+l}b_l\text{-mod}) \simeq D^b(kS_{m+n-l}b_{n-l}\text{-mod})$$

を与える complex が推測される. ($\lambda = n - 2l$ とおくと $V_{-\lambda} = \mathbb{Q} \otimes K_0(kS_{m+l}b_l\text{-mod})$, $V_\lambda = \mathbb{Q} \otimes K_0(kS_{m+n-l}b_{n-l}\text{-mod})$ である.) $\frac{e^{\lambda+r}}{(\lambda+r)!}$, $\frac{f^r}{r!}$ に対応する functor

$$E^{(\lambda+r)}, \quad F^{(r)}$$

を構成し, 次のような complex を考えることになる.

$$\longrightarrow E^{(\lambda+r)}F^{(r)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^{(\lambda+1)}F \longrightarrow E^{(\lambda)} \longrightarrow 0$$

詳しくは次章で述べることにする.

Functor F_i の別の記述
先に定義した F_i の別の定義の仕方に触れておこう.

$$L_n = (1n) + (2n) + \cdots + (n-1, n) \in kS_n$$

を Jucys-Murphy element という. $(1n)$ は 1 と n を入れ替える互換である. $M \in kS_n$-mod に対して, L_n の固有値 i についての広義固有空間を考えると,

$$F_i(M) = \{m \in M \mid (L_n - i)^k m = 0, k \gg 0\}$$

となっている. L_n は S_{n-1} と可換なのでこれは確かに kS_{n-1}-module である.

4. sl_2-CATEGORIFICATION

sl_2-categorification の設定と定義
A を k 上の有限次元多元環, $\mathcal{A} = A$-mod とする.

Definition 4.1 (sl_2-categorification for $q = 1$)**.** 次のデータが与えられたとき, それらを sl_2-categorification on $\mathcal{A}$ という.

- $a \in k$
- exact functor $E, F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, E と F は互いに (左と右両方の) adjoint
- $e \mapsto [E]$, $f \mapsto [F]$ により $V = \mathbb{Q} \otimes K_0(\mathcal{A})$ は $sl_2(\mathbb{Q})$-module
- $S \in \mathcal{A}$ が simple ならばその同型類 $[S] \in V$ について $[S] \in V_\lambda$, $\exists \lambda \in \mathbb{Z}$
- $X \in \mathrm{End}(E)$, $T \in \mathrm{End}(E^2)$ で次をみたすもの

$$(ET) \circ (TE) \circ (ET) = (TE) \circ (ET) \circ (TE)$$

$$T^2 = \mathrm{Id}$$

$$(XE) \circ T = T \circ (EX) + \mathrm{Id}$$

- $X - a$ は locally nilpotent

V の weight 分解 $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ に対応して $\mathcal{A}$ も分解する. つまり, $\mathcal{A}_\lambda = \{M \in \mathcal{A} \mid [M] \in V_\lambda\}$ とおくと

$$\mathcal{A} = \bigoplus_\lambda \mathcal{A}_\lambda$$

となる. この状況で equivalence

$$D^b(\mathcal{A}_{-\lambda}) \simeq D^b(\mathcal{A}_\lambda), \quad K^b(\mathcal{A}_{-\lambda}) \simeq K^b(\mathcal{A}_\lambda)$$

が存在する, というのが主結果 (Theorem 4.7) である.

Example 4.2. 対称群の block の場合. $0 \leq a \leq p-1$ とする. b_j を kS_{m+j} の block,

$$b_0 \xrightarrow{a} b_1 \xrightarrow{a} \cdots \xrightarrow{a} b_n$$

($b' \xrightarrow{a} b_0$, $b_n \xrightarrow{a} b''$ となる b, b'' はない) とする.

$$A = \bigoplus kS_{m+j}b_jB_j, \quad \mathcal{A} = A\text{-mod}$$

$$E = \bigoplus E_a = \bigoplus (b_j kS_{m+j}b_{j-1} \bigotimes_{kS_{m+j-1}b_{j-1}} -)$$

$$F = \bigoplus F_a = \bigoplus (b_{j-1} kS_{m+j}b_j \bigotimes_{kS_{m+j}b_j} -)$$

とおく. E, F が互いに adjoint であること, $sl_2(\mathbb{Q})$ の $V = \mathbb{Q} \otimes K_0(\mathcal{A})$ への作用については既にみた. $X \in \mathrm{End}(E)$ と $T \in \mathrm{End}(E^2)$ は次のように定義する. block をかけたり直和をとることを省略して書き, functor $kS_t \otimes_{kS_{t-1}} -$, $kS_t \otimes_{kS_{t-2}} -$ を bimodule kS_t と同一視する.

$$X : kS_t \longrightarrow kS_t$$

は L_t の右からの積,

$$T : kS_t \longrightarrow kS_t$$

は $s_{t-1} = (t-1, t)$ の右からの積と定義する. このとき関係式,

$$(ET) \circ (TE) \circ (ET) = (TE) \circ (ET) \circ (TE)$$

は $s_{t-1}s_ts_{t-1} = s_ts_{t-1}s_t$ より,

$$T^2 = \mathrm{Id}$$

は $s_t^2 = 1$ より,

$$(XE) \circ T = T \circ (EX) + \mathrm{Id}$$

は $L_ts_{t-1} = s_{t-1}L_{t-1} + 1$ よりわかる. また $(X - a)$ が locally nilpotent であることは L_t を用いた F の記述からわかる. 以上により (a, E, F, X, T) は $\mathcal{A}$ 上の sl_2-categorification となっている.

Degenerate Hecke algebra

k-algebra $\mathcal{H}_n$ を次のように定義する. 生成元は,

$$T_1, \ldots, T_{n-1}, X_1, \ldots, X_n$$

関係式は

$$T_i^2 = 1, \quad T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1}$$
$$T_iT_j = T_jT_i \ (|i-j| > 1)$$

$$X_iX_j = X_jX_i, \quad X_iT_j = T_jX_i \ (i-j \neq 0,1)$$

$$X_{i+1}T_i = T_iX_i + 1$$

で与えられる. $T_1, \ldots, T_{n-1}$ の生成する subalgebra は kS_n と同型であり (以下同一視することもある), $X_1, \ldots, X_n$ の生成する subalgebra は多項式環 $k[X_1, \ldots, X_n]$ である.

Functor $E^{(\tau,n)}$, $F^{(\tau,n)}$

(a, E, F, X, T) を $\mathcal{A}$ 上の sl_2-categorification とする.

$$\gamma_n : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathrm{End}(E^n)$$

を

$$T_i \mapsto E^{n-i-1}TE^{i-1}$$

$$X_i \mapsto E^{n-i}XE^{i-1}$$

と定義する. E, T, X の関係式と $\mathcal{H}_n$ の関係式より, $M \in \mathcal{A}$ に対して,

$$\gamma_n(M) : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathrm{End}(E^n(M))$$

は k-algebra hom. であり $E^n(M)$ は right $\mathcal{H}_n$-module となる.

$$\tau = 1 \text{ または } \mathrm{sgn} : S_n \longrightarrow k$$

を自明な表現または符号表現とする.

$$c_n^\tau = \sum_{w \in S_n} \tau(w)w \in kS_n \subseteq \mathcal{H}_n$$

$$E^{(\tau,n)} = E^n c_n^\tau$$

と定義する.

$$E^n \cong \bigoplus E^{(\tau,n)} \ (n! \text{ 個の直和})$$

となっている. 同様に $F^{(\tau,n)}$ も定義される.

Minimal categorification

$a \in k$, $\mathcal{H}_n$ を degenerate Hecke algebra, $\mathfrak{m}_n = (X_1 - a, \ldots, X_n - a)$ を $k[X_1, \ldots, X_n]$ の極大イデアルとする. さらに,

$$\mathfrak{n}_n = \mathfrak{m}_n^{S_n} \subseteq Z(\mathcal{H}_n)$$

を S_n-不変式の全体,

$$\bar{\mathcal{H}}_n = \mathcal{H}_n/\mathcal{H}_n\mathfrak{n}_n$$

$$\bar{\mathcal{H}}_{i,n} = (\mathcal{H}_i + \mathcal{H}_n\mathfrak{n}_n)/\mathcal{H}_n\mathfrak{n}_n \cong \mathcal{H}_i/\mathcal{H}_i \cap \mathcal{H}_n\mathfrak{n}_n$$

とおく.

Proposition 4.3. $\bar{\mathcal{H}}_n$ は有限次元の *simple algebra* でその次元は $(n!)^2$ である. $\bar{\mathcal{H}}_{i,n}$ は *local symmetric k-algebra* である.

$B_i = \bar{\mathcal{H}}_{i,n}$ とおく. subalgebra の列

$$k = B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_n = \bar{\mathcal{H}}_n$$

に対して,

$$\mathcal{A}(n) = \bigoplus B_i\text{-mod}$$

$$E = \bigoplus (B_i \bigotimes_{B_{i-1}} -), \quad F = \bigoplus (B_i \bigotimes_{B_i} -)$$

$X \in \mathrm{End}(E)$ は X_i の右からの積, $T \in \mathrm{End}(E^2)$ は T_{i-1} の右からの積, と定義する.

Proposition 4.4. この (a, E, F, X, T) は *sl_2-categorification on $\mathcal{A}(n)$* となる *(minimal categorification* と呼ぶ*)*. $\mathbb{Q} \otimes K_0(\mathcal{A}(n))$ は $n+1$ 次元の *simple $sl_2(\mathbb{Q})$-module* である.

Minimal categorification $\mathcal{A}(n)$ と一般の $\mathcal{A}$

(a, E, F, X, T) を $\mathcal{A}$-上の sl_2-categorification, U を simple ($\in \mathcal{A}$), $FU = 0$, $E^n U \neq 0$, $E^{n+1}U = 0$ とする.

Proposition 4.5.

$$\gamma_i(U) : \mathcal{H}_i \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(E^i U)$$

から同型

$$\bar{\mathcal{H}}_{i,n} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(E^i U)$$

が得られる.

$B_i = \bar{\mathcal{H}}_{i,n}$ とおくと, $E^i U$ は right B_i-module となり,

$$R_U = \bigoplus (E^i U \bigotimes_{B_i} -) : \mathcal{A}(n) \longrightarrow \mathcal{A}$$

は sl_2-categorification の morphism というものになっている.

Rickard's complex

(a, E, F, X, T) を $\mathcal{A}$-上の sl_2-categorification とする. $\lambda \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\Theta_\lambda : C^b(\mathcal{A}_{-\lambda}) \longrightarrow C^b(\mathcal{A}_\lambda)$$

を次のように定義する. $r \geq 0, \lambda + r \geq 0$ のとき,

$$\Theta_\lambda^{-r} = E^{(\mathrm{sgn}, \lambda+r)} F^{(1,r)} : \mathcal{A}_{-\lambda} \longrightarrow \mathcal{A}_\lambda$$

他のときは 0 とする. adjoint (E, F) の counit $\varepsilon : EF \longrightarrow \mathrm{Id}$ から

$$E^{\lambda+r-1} E F F^{r-1} \longrightarrow E^{\lambda+r-1} F^{r-1}$$

が得られ, その制限として,

$$d^{-r} : \Theta_\lambda^{-r} = E^{(\mathrm{sgn}, \lambda+r)} F^{(1,r)} \longrightarrow \Theta_\lambda^{-(r-1)} = E^{(\mathrm{sgn}, \lambda+r-1)} F^{(1,r-1)}$$

とすると

$$\Theta_\lambda : \cdots \longrightarrow \Theta_\lambda^{-r} \xrightarrow{d^{-r}} \Theta_\lambda^{-r+1} \longrightarrow \cdots$$

は functor の complex となる. total complex をとることにより,

$$\Theta_\lambda : C^b(\mathcal{A}_{-\lambda}) \longrightarrow C^b(\mathcal{A}_\lambda), \quad \Theta = \bigoplus \Theta_\lambda : C^b(\mathcal{A}) \longrightarrow C^b(\mathcal{A})$$

が得られ, 構成に用いた全ての functor は exact なので,

$$\Theta : K^b(\mathcal{A}) \longrightarrow K^b(\mathcal{A}), \quad \Theta : D^b(\mathcal{A}) \longrightarrow D^b(\mathcal{A})$$

が得られる.

Theorem 4.6. *minimal categorification* $\mathcal{A}(n)$ の場合. $\lambda = n - 2l$ に対して,

$$\Theta_\lambda : 0 \longrightarrow \Theta_\lambda^{-l} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Theta_\lambda^0 \longrightarrow 0$$

となり, *homology* については $i \neq -l$ のとき $H^i(\Theta_\lambda) = 0$ であり, $H^{-l}(\Theta_\lambda)$ は同値

$$\mathcal{A}(n)_{-\lambda} \simeq \mathcal{A}(n)_\lambda$$

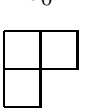
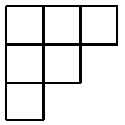
を与えている.

Theorem 4.7. 一般の $\mathcal{A}$ の場合.

$$\Theta : K^b(\mathcal{A}) \simeq K^b(\mathcal{A}), \quad D^b(\mathcal{A}) \simeq D^b(\mathcal{A})$$

$$\Theta_\lambda : K^b(\mathcal{A}_{-\lambda}) \simeq K^b(\mathcal{A}_\lambda), \quad D^b(\mathcal{A}_{-\lambda}) \simeq D^b(\mathcal{A}_\lambda)$$

Example 4.8. $p = 2$, $\mathcal{A} = \oplus_{j=0}^3 kS_{3+j}b_j$-mod とする. ただし,

n	3	4	5	6
kS_n の block	b_0	b_1	b_2	b_3
core		$\emptyset$		

とする.

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{-3} \oplus \mathcal{A}_{-1} \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_3$$

となっている.

$$\Theta_1 : D^b(kS_4b_1\text{-mod}) \longrightarrow D^b(kS_5b_2\text{-mod})$$

は

$$b_2kS_5b_0c_2^{\mathrm{sgn}} \bigotimes_{kS_3b_0} b_0kS_4b_1 \longrightarrow b_2kS_5b_1$$

で与えられる. $c_2^{\mathrm{sgn}} = 1 - (45)$ である. 4 次元の simple kS_5-module の projective cover を P_4, 2 次元の simple kS_4-module の projective cover を Q_2 とおくと左側の項 (degree -1) は

$$P_4 \bigotimes_k Q_2^*$$

と同型である.

5. 定理の証明

ここでは Theorem 4.6 を仮定して Theorem 4.7 の証明の概略を述べる.

$$\Theta : C^b(\mathcal{A}) \longrightarrow C^b(\mathcal{A})$$

に対してその adjoint $\Theta^\vee$ があり, その counit の mapping cone

$$\Theta\Theta^\vee \longrightarrow \mathrm{Id} \longrightarrow Z \longrightarrow$$

を考える. $Z : C^b(\mathcal{A}) \longrightarrow C^b(\mathcal{A})$ である. $D^b(\mathcal{A}) \longrightarrow D^b(\mathcal{A})$ の functor として $Z = 0$ であることを示そう.

Lemma 5.1. $U \in \mathcal{A}$ が *simple* で $FU = 0$ ならば, 任意の $i \geq 0$ について $K^b(\mathcal{A})$ において $Z(E^iU) = 0$ である.

Proof. $E^nU \neq 0$, $E^{n+1}U = 0$ とする.

$$R_U : \mathcal{A}(n) \longrightarrow \mathcal{A}$$

から

$$R_U : K^b(\mathcal{A}(n)) \longrightarrow K^b(\mathcal{A})$$

が得られる. $\mathcal{A}(n)$ での Rickard complex を Θ', Z に相当するものを Z' で表すことにする. Theorem 4.6 より $K^b(\mathcal{A}(n))$ において $Z'(B_i) = 0$ がわかる. 図式

$$\begin{array}{ccc} K^b(\mathcal{A}(n)) & \xrightarrow{R_U} & K^b(\mathcal{A}) \\ {\scriptstyle Z'}\downarrow & & {\scriptstyle Z}\downarrow \\ K^b(\mathcal{A}(n)) & \xrightarrow{R_U} & K^b(\mathcal{A}) \end{array}$$

は可換であり, $R_U(B_i) = E^iU$ であったので $Z(E^iU) = 0$ となる. □

Lemma 5.2. $D^b(\mathcal{A}) \longrightarrow D^b(\mathcal{A})$ の *functor* として $Z = 0$.

Proof. $C \in D^b(\mathcal{A})$, $Z(C) \neq 0$ と仮定する. Z の adjoint $Z^\vee$ に対して, $C' = Z^\vee Z(C)(\neq 0)$ とおく. $H^n(C') \neq 0$ となる最少の n をとる. $F^i(H^n(C')) \neq 0$, $F^{i+1}(H^n(C')) = 0$ として simple $U \subseteq F^i(H^n(C'))$ をとると $FU = 0$ である.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E^iU, H^n(C')) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, F^i(H^n(C'))) \neq 0$$

なので

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(E^iU, C'[n]) \neq 0$$

となる. しかし Lemma 5.1 より

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(E^iU, Z^\vee Z(C)[n]) \simeq \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(E^iU, Z^\vee Z(C[n]))$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(ZE^iU, Z(C[n])) = 0.$$

□

次に $\Theta : K^b(\mathcal{A}) \simeq K^b(\mathcal{A})$ のために $K^b(\mathcal{A})$ の functor としても $Z = 0$ であることを示す.

Lemma 5.3. $M \in \mathcal{A}$ とする. ある有限次元 k-*algebra* A', A'-mod 上の sl_2-*categorification* と *functor* (sl_2-*categorification* の *morphism* といわれるもの)

$$R : A'\text{-mod} \longrightarrow \mathcal{A}$$

で M が $R(A')$ の直和因子になるものが存在する.

Proof. $N = \oplus_{i,j} E^i F^j M$ とおき $N = \oplus_\lambda N_\lambda$, $N_\lambda \in \mathcal{A}_\lambda$ と分解する.

$$A'_\lambda = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(N_\lambda), \quad A' = \bigoplus A'_\lambda$$

とする.

$$E' = \bigoplus_\lambda (\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N_{\lambda+2}, EN_\lambda) \bigotimes_{A'_\lambda} -)$$

$$F' = \bigoplus_\lambda (\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N_{\lambda-2}, FN_\lambda) \bigotimes_{A'_\lambda} -)$$

を用いて A'-mod に sl_2-categorification を決めることができる.

$$R = \bigoplus (N_\lambda \bigotimes_{A'_\lambda} -) : A'\text{-mod} \longrightarrow \mathcal{A}$$

とすればよい. □

Lemma 5.4. $K^b(\mathcal{A})$ の *functor* として $Z = 0$ である.

Proof. $M \in \mathcal{A}$ に対して $K^b(\mathcal{A})$ において $Z(M) = 0$ を示せば十分である. Lemma 5.3 の

$$R : A'\text{-mod} \longrightarrow \mathcal{A}$$

をとる. A'-mod で Z に相当するものを Z'' とすると Lemma 5.2 より $D^b(A'\text{-mod})$ において $Z''(A') = 0$ である. しかし $Z''(A') \in K^b(A'\text{-proj})$ であるから $K^b(A'\text{-proj})$ において $Z''(A') = 0$ であり, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} K^b(A'\text{-proj}) & \xrightarrow{R} & K^b(\mathcal{A}) \\ {\scriptstyle Z''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Z} \\ K^b(A'\text{-proj}) & \xrightarrow{R} & K^b(\mathcal{A}) \end{array}$$

と M は $R(A')$ の直和因子であることから $K^b(\mathcal{A})$ において $Z(M) = 0$ を得る. □

References

[1] 有木進, $A^{(1)}_{r-1}$ 型量子群の表現論と組み合わせ論, 上智大学数学講究録 43 (2000).

[2] J. Chuang, *The derived categories of some blocks of symmetric groups and a conjecture of Broué*, J. Algebra 217 (1999), 114-155.

[3] J. Chuang and R. Kessar, *Symmetric groups, wreath products, Morita equivalences, and Broué's abelian defect group conjecture*, Bull. London Math. Soc. 34 (2002), 174-184.

[4] J. Chuang and R. Rouquier, *Derived equivalence for symmetric groups and sl_2-categorification*, Annals of Math., to appear.

[5] A. Kleshchev, Linear and projective representations of symmetric groups, Cambridge tracts in mathematics 163, Cambridge University Press (2005).

[6] S. König and A. Zimmermann, Derived equivalences for group rings, Lecture Notes in Mathematics 1685, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1998).

[7] A. Lascoux, B. Leclerc and J.-Y. Thibon, *Hecke algebras at roots of unity and crystal bases of quantum affine algebras*, Commun. Math. Phys. 181 (1996), 205-263.
[8] W. Turner, *Equivalent blocks of finite general linear groups in non-describing characteristic*, J. Algebra 247 (2002), 244-267.

Faculty of Education
Saitama University (埼玉大学教育学部)
Shimo-Okubo 255, Sakura-ku, Saitama city
338-8570 JAPAN
E-mail address: ahida@math.edu.saitama-u.ac.jp