箙と量子群

斉藤　義久　（東大数理）

January 18, 2007

e-mail : yosihisa@ms.u-tokyo.ac.jp

1 Introduction

今回の講演の依頼を受けた際、オーガナイザーの方から頂いたお題は、

柏原さんと筆者の共著論文 [KS] を、量子群に関する予備知識を
できるだけ仮定せずに、環論の研究者向けに解説してほしい、

というものであった。[KS] の Main Theorem は量子群の下三角部分代数 U_v^- の結晶基底 (crystal base) を箙 (quiver) の幾何学を用いて実現するというもので、量子群や crystal base についてある程度知っていることを前提にしないと、statement を述べることすらできない。正直なところ、この結果を量子群に関する予備知識を使わずに説明するためにはどうしたらいいのか？と随分迷った、というのが本音である。

とはいえ引き受けた以上何とかしなければいけないわけで、筆者なりの工夫をしてみたつもりだが、環論の研究者の方々にどこまで通じたか、不安の残る点は多々ある。至らなかった点は数多くあると思うが、多少なりとも興味を持って頂ければ幸いに思う。

もともと量子群 (量子包絡環) $U_v = U_v(\mathfrak{g})$ は統計物理におけるある種のモデル (可解格子模型) を解くために導入された、いわば "道具" であったわけだが、１９９０年前後のいくつかの発見を契機として、量子群の研究の方向性は大きく変わっていくことになった。

その一つが Ringel による quiver の表現論との関係の発見 ([R2]) である。Ringel は quiver Γ が A,D,E 型の場合に、Γ の表現の同値類が生成する vector space 上に、表現の extension のデータから定まる積構造を定義し、このようにして定まる代数 (Ringel-Hall algebra) が量子群の下三角部分代数 U_v^- と同型であること証明した。このノートではまず手始めとして、quiver の表現論に関する基本事項を準備した後 (２節)、Ringel による上記の結果の紹介をする (３節)。量子群の定義関係式は複雑で、「なぜそんな定義をするのか？」という疑問は当然湧くことと思う。quiver の表現論というフィルターを通して見ることで、「結構自然な定義なのかも知れない」と思って頂ければ、筆者の意図は十分果たせたことになる。

続く４節では Lusztig による量子群の下三角部分代数 U_v^- の幾何学的実現 ([L1]) を簡単に紹介する。この結果は、上記 Ringel の結果の "幾何学化" と呼ぶべきもので、その際の

key になるアイデアが “convolution 積” である。考えたい algebra を幾何学化することによって、その algebra 自身の構造、および表現論を詳しく調べるという考え方は、Ringel の結果（１９９０年ごろ）以前にすでに知られていた。その典型例は Weyl 群の群環の場合、および Hecke 環の場合である[1]。このような方向性の研究を世界的にリードしていたうちの一人が Lusztig である。彼はそれまでに開発されていた種々の道具を quiver の場合に適用することにより、量子群の幾何学的実現を得た。その意味で Lusztig による [R2] の幾何学化は、上記の結果の quiver version と言うこともできるだろう[2]。またここで用いた convolution 積の考え方は 5 節以降でも重要な役割を果たすことになる。

4 節までが主に A,D,E 型の quiver の表現論を扱っていたのに対し、5 節以降は quiver with relation の話である。今回は特に preprojective algebra の場合を扱う。

まず 5 節で preprojective algebra の表現論に関して知られている事柄を簡単に紹介し、ベキ零な表現全体が作る代数多様体 (nilpotent variety) を導入する。nilpotent variety は、いわば “preprojective algebra のベキ零表現を全部知っている” 多様体であるが、ごく一部の例外を除いて preprojective algebra の表現型は wild であり、そこから preprojective algebra の表現論に関するデータを取り出すことは難しい。しかし nilpotent variety の（代数多様体としての）既約成分全体の作る集合に着目すると、ある特殊な構造が見えてくる。それが crystal structure と呼ばれるものである。

実際の講演時にはオーガナイザーからのリクエストもあり、crystal に関しては殆ど何も話さなかったが、このノートでは 6 節に crystal および crystal base に関する基本事項の説明を加えることにした。crystal base とは、平たく言えば量子群 U_v の表現の $v \to 0$ における基底のことであり、１９９０年代初めに柏原によって導入された ([K1])。$v \to 0$ なる極限をとること、すなわち crystal base を考えることによって、量子群の表現に関する種々の問題が組み合わせ論の問題に翻訳されてしまう。現在では量子群の表現論において crystal base は欠かせない道具の一つとなっている。また crystal とは、crystal base の持つ性質を抽象化することによって得られる概念で、これも柏原により導入された。抽象化することによって、crystal の理論は量子群の表現論の範疇を超えて、さらに広範な応用を持つことになった。有木による Hecke 環の表現論への応用 ([A1],[A2])、Brandan や Kleshchev らによる対称群の moduler 表現への応用 ([BK],[Kl] 等) はその典型的な例である[3]。

７節では、前半で 5 節で導入した既約成分全体の作る集合に crystal の構造が入ることを示す。crystal structue を定義するにあたって、４節で述べた convolution 積の考え方が再び用いいられることになる。７節の後半では、既約成分全体が crystal として量子群の下三角部分 U_v^- の crystal base と同型であるという、[KS] の主定理を紹介する。すでに述べたように preprojective algebra は一般に wild な表現型を持つが、nilpotent variety の既約成分に関する限り、crystal の理論の助けを借りることによって、全体像をコントロールすることが出来るのである。

[1] 挙げるべき文献は数多くあるが、全てを列挙するわけにもいかないのでここでは [CG], [G], [KL1], [KL2], [T] に止める。特に [CG] には詳しい文献表が出ているので、詳しくはそちらを参照されたい。

[2] もちろん、単なるアナロジー以上の結果が含まれていることは、言うまでもない。

[3] [A2] には周辺分野の概説および詳しい文献表が出ている。また本報告集掲載（予定）の飛田さんの解説記事 [飛田] も、併せて参照されるとよいだろう。

また、あとがきに代えて、 8 節に最近の Geiss-Leclerc-Schröer の仕事に関する簡単な紹介を加えた。本文にも書いたが、この周辺は近年活発に研究が行われている分野になっている。

最後に、タイトルにある「箙と量子群」に関連する話題の中で、このノートに書いたことは全体の一部に過ぎないことを注意しておきたい。書けなかったことの中でも重要な事柄は多い。例えば Lusztig による標準基底 (canonical base) の理論や、中島による箙多様体 (quiver variety) の理論等はその最たるものである[4]。これらの話題に全く触れることができなかったのは残念であるが、紙数の都合もあるので、今回は御容赦頂きたい。

• 謝辞　筆者のような門外漢に講演の機会を与えてくださったオーガナイザーの方々に感謝します。特に名古屋大学の伊山修さんには講演内容を練っている段階から議論につき合って頂き、貴重なご意見を頂きました。この場を借りて感謝します。

• 記号に関する注意　このノートでは特に断りのない限り K は単なる体を表すこととする。また algbera A に対して A-module とは常に left module を考えることとする。

量子群に関する文献では q を不定元と思って、量子群を $U_q(\mathfrak{g})$ なる記号で表すのが普通であるが、このノートでは q には別の意味 (有限体の位数) があるので、替わりに v を不定元を表す記号として用い、量子群を $U_v(\mathfrak{g})$ と書くことにした。Lusztig 等、正標数の代数幾何と量子群の関係を論じている文献では比較的よく用いられる記号なので混乱はないと思う。

2　Quiver とその表現

2.1　Quiver の定義

Definition 2.1.1. 以下のデータを与える：
(1) 有限集合 I (頂点の集合) ,
(2) 有限集合 H (矢印の集合) ,
(3) 2 つの写像 $\mathrm{out} : H \to I$, $\mathrm{in} : H \to I$,
(4) H の involution: $\tau \mapsto \overline{\tau}$.

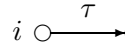
さらにこれらは次の公理を満たすとする:
(a) $\mathrm{in}(\overline{\tau}) = \mathrm{out}(\tau)$ かつ $\mathrm{out}(\overline{\tau}) = \mathrm{in}(\tau)$,
(b) 任意の $\tau \in H$ に対して、$\mathrm{out}(\tau) \neq \mathrm{in}(\tau)$.

このとき、5 つ組 $\mathbf{\Gamma} = (I, H, \mathrm{out}, \mathrm{in}, _)$ を、double quiver と呼ぶ。以下では $\mathbf{\Gamma} = (I, H)$ と略記することにするが、double quiver を考える場合には常に $\mathrm{out}, \mathrm{in}, _$ は指定されているものと考えることにする。

また、H の部分集合 Ω であって、$\Omega \cap \overline{\Omega} = \phi$ かつ $\Omega \cup \overline{\Omega} = H$ を満たすものを、orientation と呼び、 4 つ組 $\Gamma = (I, \Omega, \mathrm{out}, \mathrm{in})$ を quiver と呼ぶ (以下では $\Gamma = (I, \Omega)$ と略記する)。

double quiver $\mathbf{\Gamma} = (I, H)$ に対して、以下のように有限有向グラフを対応させ、$\mathbf{\Gamma}$ とグラフを同一視する。$\tau \in H$ に対して、$i = \mathrm{out}(\tau) \in I$, $j = \mathrm{in}(\tau) \in I$ であるとき、

[4]前者に関しては [L1,2,3], 後者に関しては [N1,2,3] および [中島] を挙げておく。

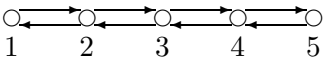


と書く。このとき、定義の条件 (a) は involution: $\tau \mapsto \overline{\tau}$ が「矢印の向きをひっくり返す」という操作を表すことを意味し、条件 (b) は「ある頂点から出発して、自分自身に返ってくる矢印は存在しない (いわゆる no-loop condition)」と言っていることになる[5]。

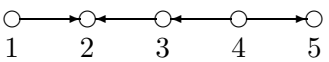
以後しばらくは quiver $\Gamma = (I, \Omega)$ のみを考えることにする。double quiver の方は 5 節以降で登場することになる。

quiver $\Gamma = (I, \Omega)$ に対して、矢印の向きを無視して得られる有限グラフを $|\Gamma|$ と書き、Γ の underlying graph と呼ぶ。

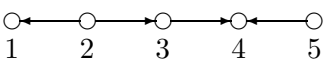
Example 2.1.2.

$\Gamma = (I, H)$:


とする。今の場合 orientation Ω の選び方は全部で $2^4 = 16$ 通りあるが、例えば

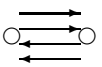
Ω :


をとれば、$\overline{\Omega}$ は

$\overline{\Omega}$:


である。この場合の underlying graph $|\Gamma|$ は A_5 型の Dynkin 図形である。

Example 2.1.3.

$\Gamma = (I, H)$:


とする。矢印に上から $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ と名前を付けよう。この場合 orientation の選び方は 4 つの矢印の中から 2 つを選ぶので全部で 6 通りある[6]。

この場合には involution $\tau \to \overline{\tau}$ の与え方に不定性がある。例えば

$$\overline{\tau}_1 = \tau_3, \qquad \overline{\tau}_2 = \tau_4$$

としてもよいし、

$$\overline{\tau}_1 = \tau_4, \qquad \overline{\tau}_2 = \tau_3$$

としても定義は満たされる。$\Gamma = (I, H)$ は involution のデータまで指定しているものなので、double quiver $\Gamma = (I, H)$ が与えられた時点で「(省略されてはいるけれど) どちらの involution を考えているのか？」まで指定されていることに注意されたい。

[5] 一般に quiver と言う場合には $\Gamma = (I, \Omega)$ を単独で考え、反対向きの矢印を併せて考えることはしない場合が多い。また「頂点集合 I や矢印の集合 H は無限集合であってもよい」とするのが普通である。(一般の quiver と区別するために、今回のようなものは「finite quiver」と呼ばれる。) ただしその場合には、一つの頂点に入ってくる矢印の本数と、出て行く矢印の本数は共に有限であるという条件 (locally finiteness condition) を課す。さらに条件 (b) も普通は課さない。

[6] 例えば τ_1 と τ_2 は全く同じ方向を向いている矢印であるが、これらは区別されていることに注意。

今 involution として前者が与えられているとしよう。例えば $\Omega = \{\tau_1, \tau_2\}$ とすれば、$\overline{\Omega} = \{\tau_3, \tau_4\}$ である。繰り返しになるが、この場合「τ_1 の向きをひっくり返して得られる矢印 $\overline{\tau}_1$」はあくまでも τ_3 なのであって、τ_4 ではない。

2.2 Quiver の表現

Definition 2.2.1. $\Gamma = (I, \Omega)$ を quiver とし、次のような category $M\Omega$ を考える。
object: $\mathbf{V} = (V, B)$. ただし $V = \oplus_{i \in I} V_i$ は K 上の有限次元 I-graded vector space。また $B = (B_\tau)_{\tau \in \Omega}$ は K-linear map $B_\tau : V_{\mathrm{out}(\tau)} \to V_{\mathrm{in}(\tau)}$ $(\tau \in \Omega)$ の組。
morphism: 2 つの object $\mathbf{V} = (V, B)$, $\mathbf{V}' = (V', B')$ に対して、$\mathbf{V}$ から $\mathbf{V}'$ への morphism $\phi = (\phi_i)_{i \in I}$ とは、K-linear map $\phi_i : V_i \to V'_i$ $(i \in I)$ の組であって、任意の $\tau \in \Omega$ に対して、$\phi_{\mathrm{in}(\tau)} B_\tau = B'_\tau \phi_{\mathrm{out}(\tau)}$ が成り立つもののことを言う。
ここで定義した $M\Omega$ を quiver $\Gamma = (I, \Omega)$ の表現の category、$M\Omega$ の object を quiver $\Gamma = (I, \Omega)$ の表現と呼ぶ。

次に category としての $M\Omega$ の性質を列挙しよう。
(a) $\mathbf{V} \in \mathrm{ob}(M\Omega)$ に対して、

$$\underline{\dim}\mathbf{V} := (\dim_K V_i)_{i \in I} \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}$$

を $\mathbf{V}$ の dimensiom vector と呼ぶ。$M\Omega$ は dimension vector から定まる graded structure を持つ。すなわち $M\Omega_d$ $(d \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0})$ を $\underline{\dim}\mathbf{V} = d$ を満たすものからなる $M\Omega$ の full subcategory とすると、$M\Omega = \oplus_{d \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}} M\Omega_d$ が成り立つ。
(b) $M\Omega$ は abelian category である。したがって "simple object"、"indecomposable object" 等の概念が意味を持つ[7]。念のため正確な定義を述べておこう。$\mathbf{V} \in \mathrm{ob}(M\Omega)$ が simple であるとは、非自明な subrepresentation を持たないということである。また $\mathbf{V}$ が indecomosable であるとは「$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2$ ならば $\mathbf{V}_1 = \mathbf{0}$ または $\mathbf{V}_2 = \mathbf{0}$」を満たすこと言う。ここで $\mathbf{0}$ は V として 0 次元 vector space $\{0\}$、B として 0-map の組をとって定義される quiver の表現である。
特に $M\Omega$ は丁度 $|I|$ 個の simple objects $\mathbf{F}_{i,\Omega} = (V(i), B(i))$ を持ち、それらは以下のようなものである：
$V(i) = \oplus_{j \in I} V(i)_j$ は $V(i)_i = K$, $V(i)_j = \{0\}$ $(j \neq i)$ なる 1 次元の I-graded vector space。$B(i) = (B(i)_\tau)_{\tau \in \Omega}$ は 0-map の組。
(c) 一般に $M\Omega$ は semisimple category ではない。つまり indecomposable だが simple でない object が存在する。

Example 2.2.2.

$$\Gamma = (I, \Omega) \ : \ \underset{1}{\circ} \xrightarrow{\tau} \underset{2}{\circ}$$

として、$\mathbf{V} = (K \xrightarrow{\mathrm{id}} K)$ とすれば $\underline{\dim}\mathbf{V} = (1, 1)$ で、これは indecomposable object である。また $\mathbf{F}_{2,\Omega} = (0 \xrightarrow{0} K)$ とすると、これは simple object である。$\phi_1 : K \to \{0\}$ を 0-map、$\phi_2 : K \xrightarrow{\sim} K$ を同型写像とするとき、図式

[7] より正確には indecomposable object への分解の一意性も成り立つ。

$$\begin{array}{ccc} \{0\} & \xrightarrow{0} & K \\ {\scriptstyle \phi_1=0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_2} \\ K & \xrightarrow{\mathrm{id}} & K \end{array}$$

は可換である。すなわち $\mathbf{F}_{2,\Omega} \hookrightarrow \mathbf{V}$ であり、$\mathbf{V}$ は非自明な subobject を持つので simple ではない。

一方 $\mathbf{F}_{1,\Omega} = (K \xrightarrow{0} \{0\})$ とすると、これも simple object である。I-graded vector space としては $K \oplus \{0\} \hookrightarrow K \oplus K$ であるが、図式

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{0} & \{0\} \\ {\scriptstyle \phi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_2} \\ K & \xrightarrow{\mathrm{id}} & K \end{array}$$

を可換にする $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ は $(0,0)$ しかない。したがって $\mathbf{F}_{1,\Omega}$ は $\mathbf{V}$ の subobject ではない。しかし $\mathbf{V}$ から $\mathbf{F}_{1,\Omega}$ への非自明な morphism は存在する。実際、図式

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{0} & \{0\} \\ {\scriptstyle \psi_1}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \psi_2=0} \\ K & \xrightarrow{\mathrm{id}} & K \end{array}$$

は任意の $\psi_1 \in \mathrm{Hom}_K(K,K)$ に対して可換となる。(ψ_2 の方は自動的に 0-map となる。) 非自明な $\psi = (\psi_1, 0) : \mathbf{V} \to \mathbf{F}_1$ に対し、$\mathrm{Ker}\psi$ は先の $\mathbf{F}_{2,\Omega}$ と同型になる。言い換えれば abelian category $M\Omega$ における split しない完全系列

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{F}_{2,\Omega} \xrightarrow{\phi} \mathbf{V} \xrightarrow{\psi} \mathbf{F}_{1,\Omega} \longrightarrow \mathbf{0}$$

が存在するということになる。

上記のように simple object が非常に簡単に書き下せるのに比べて、indecomposable object をリストアップすることは一般には非常に難しい[8]。しかし quiver の形を限定した場合には次の結果が知られている。

Theorem 2.2.3 (Gabriel). quiver $\Gamma = (I, \Omega)$ は connected と仮定する。
(1) $M\Omega$ が有限個の indecomposable object を持つことと、$|\Gamma|$ が A,D,E 型の Dynkin 図形であることは同値である。
(2) $|\Gamma|$ が A,D,E 型の Dynkin 図形であるとする。対応する (A,D,E 型の) positive root の集合を Δ_+、simple root の集合を $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ とし、$Q = \oplus_{i\in I}\mathbb{Z}\alpha_i$ を root lattice とする。また $M\Omega$ の indecomposable object $\mathbf{V} = (V, B)$ に対して、以下のように Q の元を対応させる :

$$\mathbf{V} \mapsto \sum_{i\in I} (\dim_K V_i)\alpha_i \in Q.$$

このとき、上の対応は $M\Omega$ の indecomposable object の同型類と Δ_+ の間の 1 対 1 対応を与える。さらに simple object の同型類と simple root の集合 $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ が 1 対 1 に対応する。

[8] というより、普通は出来ない。

Remark． この定理の強力なところは（$|\Gamma|$ が A,D,E 型の Dynkin 図形であるという制約付きではあるが），indecomposable object が dimension vector を決めるだけで（同型類を除いて）一意的に決まってしまい、さらにそれが Δ_+ という、体 K の取り方には全く関係のないデータでコントロールされているという点にある。特に強調したいのは「体 K の取り方には関係のないデータ」ということである。$M\Omega$ の方は quiver Γ の体 K の表現の category を考えているのであって、その構造は K の取り方に通常は依存する（以下の Example 2.2.6 を参照）。それが「A,D,E なら K の取り方に関係なくいつでも同じ」と言っているわけで、こんな都合のいい話はこれ以外ではあり得ない。この点は後々も重要になるので、是非心にとめておいて頂きたい。

Example 2.2.4. 最も簡単なケースとして

$$\Gamma = (I, \Omega) \ : \ \underset{1}{\circ} \xrightarrow{\tau} \underset{2}{\circ} \qquad (|\Gamma| \text{ は } A_2 \text{ 型 Dynkin 図形})$$

を考えよう。この場合の Γ の表現 $\mathbf{V} = (V, B)$ は、$V = V_1 \oplus V_2$ と $B = B_\tau \in \mathrm{Hom}_K(V_1, V_2)$ の組である。$V_i \ (i = 1, 2)$ の次元を d_i とすれば $B \in \mathrm{Mat}(d_2, d_1; K)$ としてよい。ここに $\mathrm{Mat}(d_2, d_1; K)$ は K-係数の $d_2 \times d_1$ 行列全体を表す。

2 つの表現 $\mathbf{V} = (V, B)$ と $\mathbf{V}' = (V', B')$ が同型であるということは、同型写像 $\phi_i : V_i \xrightarrow{\sim} V_i' \ (i = 1, 2)$ であって $\phi_2 B = B' \phi_1$ を満たすものが存在する、ということであった。したがって表現の同型類は、$\mathrm{Mat}(d_2, d_1; K)$ に右から $GL(d_1, K)$、左から $GL(d_2, K)$ を作用させたときの、$GL(d_1, K) \times GL(d_2, K)$-orbit と 1 対 1 に対応するが、これは行列 B の rank を求める操作に他ならない。

今の場合 $|\Gamma|$ は A_2 型 Dynkin 図形だから、$\Delta^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}$ であり、対応する indecomposable な Γ の表現は

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\leftrightarrow (K \xrightarrow{0} \{0\}) \\ \alpha_2 &\leftrightarrow (\{0\} \xrightarrow{0} K) \\ \alpha_1 + \alpha_2 &\leftrightarrow (K \xrightarrow{\mathrm{id}} K) \end{aligned}$$

である。この場合の simple objects は $\mathbf{F}_{1,\Omega},\ \mathbf{F}_{2,\Omega}$ であるが、これらはそれぞれ simple roots $\alpha_1,\ \alpha_2$ に対応している。

Example 2.2.5.

$$\Gamma = (I, \Omega) \ : \ \underset{1}{\circ} \longrightarrow \underset{2}{\circ} \longrightarrow \underset{3}{\circ} \qquad (|\Gamma| \text{ は } A_3 \text{ 型 Dynkin 図形})$$

この場合は

$$\Delta^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\} \ (6 \text{ 個}).$$

したがって indecomposable object は（同型を除いて）全部で 6 種類ある。

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\leftrightarrow (K \xrightarrow{0} \{0\} \xrightarrow{0} \{0\}), & \alpha_1 + \alpha_2 &\leftrightarrow (K \xrightarrow{\mathrm{id}} K \xrightarrow{0} \{0\}), \\ \alpha_2 &\leftrightarrow (\{0\} \xrightarrow{0} K \xrightarrow{0} \{0\}), & \alpha_2 + \alpha_3 &\leftrightarrow (\{0\} \xrightarrow{0} K \xrightarrow{\mathrm{id}} K), \\ \alpha_3 &\leftrightarrow (\{0\} \xrightarrow{0} \{0\} \xrightarrow{0} K), & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &\leftrightarrow (K \xrightarrow{\mathrm{id}} K \xrightarrow{\mathrm{id}} K). \end{aligned}$$

Example 2.2.6. $|\Gamma|$ が A,D,E 型の Dynkin 図形でない場合の例として

$$\Gamma = (I, \Omega) \ : \ 1 \ \underset{\tau_2}{\overset{\tau_1}{\rightrightarrows}} \ 2 \quad \left(\ |\Gamma| = \circ\!\!=\!\!=\!\!\circ \ , \ \tilde{A}_1 \text{ 型 affine 図形 } \right)$$

を考えよう。この Γ を Kronecker quiver という。Γ の表現の構造は非常に詳しく調べられているが (例えば [ARS] 参照)、話がややこしくなってしまうので $\underline{\dim}\mathbf{V} = (1,1)$ となる表現 $\mathbf{V} = (V, B)$ のみ考えることにする。

この場合 $V = K \oplus K$ であるので、$B_{\tau_i} \in K \cong \mathrm{Hom}_K(K, K)$ $(i = 1, 2)$ としてよい。(ただし $B = (B_{\tau_1}, B_{\tau_2})$) また表現の同型類は

$$\mathrm{Hom}_K(K, K) \oplus \mathrm{Hom}_K(K, K) \cong K \oplus K$$

への、$GL(K) \times GL(K) \cong K^\times \times K^\times$ の作用に関する orbit と 1 対 1 に対応する。この作用に関する quotient をとれば

$$(K \oplus K)/(K^\times \times K^\times) \cong [(0,0)] \sqcup \mathbb{P}^1(K)$$

となる。$[(0,0)]$ に対応する Γ の表現は

$$(K \underset{0}{\overset{0}{\rightrightarrows}} K)$$

であるが、これは 2 つの simple object の直和 $\mathbf{F}_{1,\Omega} \oplus \mathbf{F}_{2,\Omega}$ に同型であり、indecomposable ではない。一方 $\mathbb{P}^1(K)$ の点を同次座標で $[a_1; a_2] \in \mathbb{P}^1(K)$ とかくことにすれば、この点に対応する Γ の表現は

$$(K \underset{a_2}{\overset{a_1}{\rightrightarrows}} K)$$

である。$a_1,\ a_2$ は同時には 0 にならず、これは常に indecomposable な表現である。したがって $\underline{\dim}V = (1,1)$ となる Kronecker quiver Γ の indecomposable な表現の同型類は "$\sharp(\mathbb{P}^1(K))$ 個" あり、dimension vector を決めても一意的には定まらない。言い方を換えれば、Γ の indecomposable な表現の同型類の個数は K の位数に依ってしまう、ということになる。これは A,D,E では起こりえなかった現象である[9]。

2.3 Path algebra とその表現

Definition 2.3.1. (1) quiver $\Gamma = (I, \Omega)$ に対して、

$$\mathcal{P}_N = \{p = (\tau_N, \cdots, \tau_1) \in \Omega^N \mid \mathrm{in}(\tau_k) = \mathrm{out}(\tau_{k+1}) \text{ for any } 1 \leq k \leq N-1\}$$

とし、$p = (\tau_N, \cdots, \tau_1) \in \mathcal{P}_N$ を長さ N の path と呼ぶ[10]。以下では $p = \tau_N \cdots \tau_1$ と略記する。また $N = 0$ の場合には $\mathcal{P}_0 = I$ とし、その元を長さ 0 の path と呼ぶ。区別のため $i \in I$ を長さ 0 の path と思う場合には e_i と書くことにする。
(2) path $p = \tau_N \cdots \tau_1$ に対し $\mathrm{out}(p) = \mathrm{out}(\tau_1)$, $\mathrm{in}(p) = \mathrm{in}(\tau_N)$ と定める。長さ 0 の path e_i

[9] というより、A,D,E が特別というべき。
[10] 特に Ω の元は長さ 1 の path である。

に関しては $\mathrm{out}(e_i) = \mathrm{in}(e_i) = i$ とする。2 つの path p_1, p_2 に対し、$\mathrm{in}(p_2) = \mathrm{out}(p_1)$ であるとき p_1 と p_2 は合成可能であるといい、新しく作られる path p_1p_2 を p_1 と p_2 の合成と呼ぶ。
(3) 長さ 0 以上の path 全体で張られる K 上の vector space $K[\Gamma]$ に、積構造を

$$p_1 \cdot p_2 = \begin{cases} p_1p_2, & (\,p_1 \text{ と } p_2 \text{ は合成可能}\,), \\ 0, & (\,\text{それ以外}\,) \end{cases}$$

によって定める。このようにして得られる K 上の associative algebra $K[\Gamma]$ を Γ の path algebra という。

$K[\Gamma]$ に関して簡単にわかる性質をいくつか述べよう。長さ 0 の path たちは

$$e_i^2 = e_i, \quad e_ie_j = 0 \ (i \neq j)$$

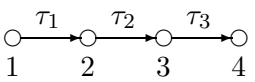
なる性質を持つ。つまり e_i たちは互いに直交するベキ等元である。また原始的であることも明らかであろう。さらに

$$1 = \sum_{i \in I} e_i$$

は $K[\Gamma]$ の単位元である。したがってこの式は 1 の原始ベキ等元分解を与える。
また $K[\Gamma]$ が有限次元であることと、Γ が oriented cycle を持たないことは同値である。ここで oriented cycle とは長さ 2 以上の path p であって、$\mathrm{out}(p) = \mathrm{in}(p)$ であるものをいう。

Example 2.3.2.

$\Gamma = (I, \Omega)$:



長さ 0 の path：$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
長さ 1 の path：$\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$
長さ 2 の path：$\{\tau_2\tau_1, \tau_3\tau_2\}$
長さ 3 の path：$\{\tau_3\tau_2\tau_1\}$
長さ 4 以上の path は存在しない。

よって $K[\Gamma]$ は 1 0 次元。また単位元は $1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$。

quiver Γ の表現を考えることと、path algebra $K[\Gamma]$ の (有限次元) module を考えることは、実質同じことである。実際、$\mathbf{V} = (V, B)$ を Γ の表現としよう。path $p = \tau_N \cdots \tau_1$ に対して、$B_p = B_{\tau_N} \cdots B_{\tau_1} \in \mathrm{End}(V)$ を対応させることにより、V を $K[\Gamma]$-module と思うことができる。逆に $K[\Gamma]$-module$V$ が与えられたとする。すなわち準同型 $\rho : K[\Gamma] \to \mathrm{End}(V)$ が与えられたとする。各 $i \in I$ に対して $V_i = e_iV$ と置く。$1 = \sum_{i \in I} e_i$ だから、$V = \oplus_{i \in I} V_i$ である。Ω は長さ 1 の path の集合であるので、$\tau \in \Omega$ に対して $\rho(\tau) \in \mathrm{End}(V)$ が定まるが、$V_i = e_iV$ であったのことに注意すると、$\rho(\tau) : V_{\mathrm{out}(\tau)} \to V_{\mathrm{in}(\tau)}$ と思うことができる。そこで $B_\tau = \rho(\tau)$ と置けば、quiver の表現 $\mathbf{V} = (V, B)$ が定まる。
したがって Gabriel の定理は

「indecomposable $K[\Gamma]$-module の同型類が有限個であることと、
$|\Gamma|$ が A,D,E 型の Dynkin 図形であることは同値である」

と言ってもよい。以後断り無しに quiver の表現と path algebra の表現を同一視して考えることにする。

2.4 Variety of modules

$V = \sum_{i\in I} V_i$ を K 上の I-graded vactor space、先の場合にならって $\underline{\dim} V = (\dim_K V_i)_{i\in I}$ を V の dimension vector と呼ぶことにしよう。

$$E_{V,\Omega} = \bigoplus_{\tau\in\Omega} \mathrm{Hom}_K(V_{\mathrm{out}(\tau)}, V_{\mathrm{in}(\tau)})$$

とし、$E_{V,\Omega}$ の元を $B = (B_\tau)_{\tau\in\Omega}$ と書くことにすれば、組 $\mathbf{V} = (V, B)$ は $M\Omega_d$ の object である。(ただし $d = \underline{\dim} V$。) すなわち $E_{V,\Omega}$ は $d = \underline{\dim} V$ なる quiver $\Gamma = (I, \Omega)$ の表現全体と思うことができる。その意味で $E_{V,\Omega}$ のことを $\mathrm{mod}(K[\Gamma], V)$ とも書き、variety of modules (of $K[\Gamma]$) と呼ぶ[11]。

代数群 $G_V = \prod_{i\in I} GL(V_i)$ は以下のようにして $E_{V,\Omega}$ に自然に作用する:$g = (g_i)_{i\in I} \in G_V$ として、

$$(B_\tau) \mapsto (g_{\mathrm{in}(\tau)} B_\tau g_{\mathrm{out}(\tau)}^{-1}).$$

このとき次の 1 対 1 対応はあきらかであろう:

$$\begin{aligned} \{E_{V,\Omega}\text{の } G_v\text{-orbit}\} &\longleftrightarrow \{M\Omega_d\text{の同型類 }\} \\ &\longleftrightarrow \{\underline{\dim} = d \text{ となる } K[\Gamma]\text{-module の同型類 }\}. \end{aligned}$$

3 Ringel-Hall algberas

この節では K は有限体 $\mathbb{F}_q$ ($q = p^m, p$ は素数)、quiver $\Gamma = (I, \Omega)$ の underlying graph $|\Gamma|$ は A,D,E 型の Dynkin 図形であると仮定する。(以下、このような quiver を A,D,E 型の quiver と呼ぶことにする。)

3.1 定義

Definition 3.1.1. $R\Omega$ を $M\Omega$ の object の同型類 $[\mathbf{V}]$ を基底とする $\mathbb{C}$-vector space とし、$R\Omega$ に積 $*$ を以下のように定義する:

$$[\overline{\mathbf{V}}] * [\mathbf{V}'] = \sum_{\mathbf{V}} g(\mathbf{V}; \overline{\mathbf{V}}, \mathbf{V}')[\mathbf{V}].$$

ただし

$$g(\mathbf{V}; \overline{\mathbf{V}}, \mathbf{V}') = \sharp\{\mathbf{W} \text{ は } \mathbf{V} \text{ の部分表現} \mid \mathbf{W} \cong \mathbf{V}' \text{かつ } \mathbf{V}/\mathbf{W} \cong \overline{\mathbf{V}}\}.$$

[11] とはいってもこの場合は単なる vector space である。後で本当に"variety"になる場合を扱う。(preprojective algebra の節を参照のこと。)

定義から $R\Omega$ は単位元 $\mathbf{1} = [\mathbf{0}]$ を持つ associative algebra であることがわかる。$R\Omega$ を ($\Gamma = (I, \Omega)$ に付随する) Ringel-Hall algebra と呼ぶ。

また $R\Omega_d$ を $\underline{\dim}\mathbf{V} = d$ を満たす同型類で張られる $R\Omega$ の部分空間とすると、各 $R\Omega_d$ は有限次元の vector space で、

$$R\Omega = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^I} R\Omega_d$$

が成り立つ。

$K = \mathbb{F}_q$ であるから、$g(\mathbf{V}; \overline{\mathbf{V}}, \mathbf{V}')$ は常に有限の数であることに注意されたい。

Remark . 今回は Ringel-Hall algebra $R\Omega$ を $|\Gamma|$ が A,D,E 型の Dynkin 図形の場合に限って導入したが、係数体 K が有限体であれば特に A,D,E にこだわらずとも一般の quiver に対して $R\Omega$ を定義することは可能である[12]。では「A,D,E に話を限定する意味はどこにあるのか？」というと、その理由の一つは Gabriel の定理にある。2.2 節の Remark でも述べたが、Gabriel の定理によれば $M\Omega$ の indecomposable object の "形" は体 K の取り方に依存せず、dimension vector だけで同型類を除いて一意的に定まる。したがって A,D,E ならば、quiver の表現 $\mathbf{V}$,$\mathbf{V}'$,$\overline{\mathbf{V}}$ の "形" を K の取り方に依らずに指定することができ、さらに有限体の範囲で K をいろいろ取り替えた時に、構造定数 $g(\mathbf{V}; \overline{\mathbf{V}}, \mathbf{V}')$ たちを比べることが意味を持つ。区別のために $K = \mathbb{F}_q$ とした場合の構造定数を $g(\mathbf{V}; \overline{\mathbf{V}}, \mathbf{V}')^{\mathbb{F}_q}$ と書こう。このとき $\mathbb{Z}$ 係数の多項式 $\mathbf{g}(\mathbf{V}; \overline{\mathbf{V}}, \mathbf{V}')(v) \in \mathbb{Z}[v]$ が存在して、

$$g(\mathbf{V}; \overline{\mathbf{V}}, \mathbf{V}')^{\mathbb{F}_q} = \mathbf{g}(\mathbf{V}; \overline{\mathbf{V}}, \mathbf{V}')(q)$$

となることが知られている。この多項式 $\mathbf{g}(\mathbf{V}; \overline{\mathbf{V}}, \mathbf{V}')(v)$ を Hall polynomial と呼ぶ。このようなことが成り立てば、有限体の位数 q をあたかもパラメータののように扱うことができるし、(位数 1 の体が存在しないにもかかわらず) $v = 1$ を代入することが可能となる。実際、後で紹介する「量子群との関係」の背後にはこのような事実があり、"$v = 1$ を代入する" ことによって $R\Omega$ が、A,D,E 型の有限次元 simple Lie algebra の nilpotent radical $\mathfrak{n}$ の universal enveloping algebra $U(\mathfrak{n})$ と同型になることが知られている。しかしこんなうまい話は A,D,E でないと成立しない[13]。

$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{i,\Omega}$ を $M\Omega$ の simple object、$i \overset{\tau}{\circ\!\!\longrightarrow\!\!\circ}\ j$ であるとき[14]、$\mathbf{F}_{ij} = (V, B)$ を

$$V_k = \begin{cases} \mathbb{F}_q, & k = i \text{ or } j, \\ \{0\}, & \text{otherwise}, \end{cases} \qquad B_\mu = \begin{cases} \mathrm{id}, & \mu = \tau, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

とする。これは indecomposable な表現である。

Lemma 3.1.2. $i \overset{\tau}{\circ\!\!\longrightarrow\!\!\circ}\ j$のとき、
(1) $[\mathbf{F}_i] * [\mathbf{F}_j] = [\mathbf{F}_j] * [\mathbf{F}_i] + [\mathbf{F}_{ij}]$.
(2) $[\mathbf{F}_i] * [\mathbf{F}_{ij}] = q[\mathbf{F}_{ij}] * [\mathbf{F}_i], \quad [\mathbf{F}_{ij}] * [\mathbf{F}_j] = q[\mathbf{F}_j] * [\mathbf{F}_{ij}]$.
(3) $[\mathbf{F}_i] * [\mathbf{F}_i] * [\mathbf{F}_j] - (q+1)[\mathbf{F}_i] * [\mathbf{F}_j] * [\mathbf{F}_i] + q[\mathbf{F}_j] * [\mathbf{F}_i] * [\mathbf{F}_i] = 0$,
$[\mathbf{F}_i] * [\mathbf{F}_j] * [\mathbf{F}_j] - (q+1)[\mathbf{F}_j] * [\mathbf{F}_i] * [\mathbf{F}_j] + q[\mathbf{F}_j] * [\mathbf{F}_j] * [\mathbf{F}_i] = 0$.

[12]さらに言えば relation 付きの quiver であっても構わない。
[13]ここで述べたことの一部なら、cyclic quiver でも成立する。
[14]今 $|\Gamma|$ は A,D,E 型の Dynkin 図形であると仮定しているので、i と j が connected であるとすると、このような状況しか起こりえない。

Proof. (3) が (1), (2) から従うことはすぐにわかる。したがって (1), (2) を示せばよい。
(1): まず左辺を計算する。$\mathbf{V}$ が $g(\mathbf{V};\mathbf{F}_i,\mathbf{F}_j)\neq 0$ を満たすとすると、$\underline{\dim}\mathbf{V}=(1,1)$ でなければならない。この条件を満たすのは $\mathbf{V}=\mathbf{F}_i\oplus\mathbf{F}_j$ か $\mathbf{V}=\mathbf{F}_{ij}$ のいずれかである[15]。どちらの場合も $\mathbf{V}$ は $\mathbf{F}_j$ を submodule として持ち、かつ埋め込み $\mathbf{F}_j\hookrightarrow\mathbf{V}$ は一意的に定まる。さらに $\mathbf{V}/\mathbf{F}_j\cong\mathbf{F}_i$ も成り立つ。したがってどちらの場合も $g(\mathbf{V};\mathbf{F}_i,\mathbf{F}_j)=1$ であり、

$$[\mathbf{F}_i]*[\mathbf{F}_j]=[\mathbf{F}_{ij}]+[\mathbf{F}_i\oplus\mathbf{F}_j]$$

を得る。

次に右辺を計算しよう。まず第 1 項であるが、先と同様に $g(\mathbf{V};\mathbf{F}_j,\mathbf{F}_i)\neq 0$ ならば $\underline{\dim}\mathbf{V}=(1,1)$ でなければならず、候補になりうるのは $\mathbf{F}_i\oplus\mathbf{F}_j$ か $\mathbf{F}_{ij}$ のいずれかである。今度の場合、$\mathbf{F}_i\oplus\mathbf{F}_j$ は $\mathbf{F}_i$ を submodule として持つ (さらに埋め込み $\mathbf{F}_i\hookrightarrow\mathbf{F}_i\oplus\mathbf{F}_j$ は一意的で、$(\mathbf{F}_i\oplus\mathbf{F}_j)/\mathbf{F}_i\cong\mathbf{F}_i$) が、$\mathbf{F}_i$ は $\mathbf{F}_{ij}$ の submodule ではない。よって

$$[\mathbf{F}_j]*[\mathbf{F}_i]=[\mathbf{F}_i\oplus\mathbf{F}_j]$$

が成り立ち、これで等式が示された。
(2): どちらも同じように示せるので、第 1 式のみ示す。まず左辺を計算する。$g(\mathbf{V};\mathbf{F}_i,\mathbf{F}_{ij})\neq 0$ ならば $\underline{\dim}\mathbf{V}=(2,1)$ でなければならず、候補になりうるのは $\mathbf{F}_i^{\oplus 2}\oplus\mathbf{F}_j$ か $\mathbf{F}_i\oplus\mathbf{F}_{ij}$ のいずれかである。このうち $\mathbf{F}_i^{\oplus 2}\oplus\mathbf{F}_j$ は $\mathbf{F}_{ij}$ を submodule として持たないことから除外される。そこで埋め込み $\mathbf{F}_{ij}\hookrightarrow\mathbf{F}_i\oplus\mathbf{F}_{ij}$ の数を数えればよいことになる。quiver の表現としては

$$\mathbf{F}_{ij}=(\mathbb{F}_q\xrightarrow{\mathrm{id}}\mathbb{F}_q),\qquad \mathbf{F}_i\oplus\mathbf{F}_{ij}=(\mathbb{F}_q^{\oplus 2}\xrightarrow{B_\tau}\mathbb{F}_q)$$

であったことを思い出そう。このとき埋め込み $\phi=(\phi_i,\phi_j):\mathbf{F}_{ij}\hookrightarrow\mathbf{F}_i\oplus\mathbf{F}_{ij}$ は、$\phi_1:\mathbb{F}_q\hookrightarrow\mathbb{F}_q^{\oplus 2}$ と $\phi_2:\mathbb{F}_q\cong\mathbb{F}_q$ の組である。話を簡単にするために、まず graded vector space としての埋め込みの数を数えると、ϕ_2 の方は同型写像だから 1 通りしかないが、$\phi_1:\mathbb{F}_q\hookrightarrow\mathbb{F}_q^{\oplus 2}$ の方は $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ 分の可能性がありうる。つまり埋め込み方は $\sharp\{\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)\}=q+1$ 通りある。きちんと数えるために $\mathbb{F}_q^{\oplus 2}$ の基底を固定して B_τ が $(1\ 0)$ と行列表示 (1×2 行列) されたとしよう。このとき上の $q+1$ 通りの埋め込み $\mathbb{F}_q\hookrightarrow\mathbb{F}_q^{\oplus 2}$ は以下のような行列表示

$$\phi_1^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad \phi_1^{(k)}=\begin{pmatrix}1\\k-1\end{pmatrix}\quad (1\leq k\leq q)$$

によって与えられる。これが quiver の表現の morphism になっているためには、図式

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{F}_q & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{F}_q\\ {\scriptstyle\phi_1^{(k)}}\downarrow & & \|\\ \mathbb{F}_q^{\oplus 2} & \xrightarrow{B_\tau} & \mathbb{F}_q\end{array}$$

が可換にならなければならないが、$B_\tau=(1\ 0)$ であったので $k=0$ の場合には可換になりえない。(他の場合は OK。) ゆえに quiver の表現としての埋め込みは全部で q 通りある。また $(\mathbf{F}_i\oplus\mathbf{F}_{ij})/\mathbf{F}_{ij}\cong\mathbf{F}_i$ であるので、以上より

$$[\mathbf{F}_i]*[\mathbf{F}_{ij}]=q[\mathbf{F}_i\oplus\mathbf{F}_{ij}]$$

[15] (同型類を除いて) このようなものに限ることは Gabriel の定理が保証してくれる。

となることがわかる。

一方右辺の $[\mathbf{F}_{ij}]*[\mathbf{F}_i]$ の方であるが、左辺の場合と同様の議論により $g_{\mathbf{V};\mathbf{F}_{ij},\mathbf{F}_i}\neq 0$ ならば $\mathbf{V}=\mathbf{F}_i\oplus\mathbf{F}_{ij}$ でなければならないことがわかる。今度の場合は埋め込み $\mathbf{F}_i\hookrightarrow\mathbf{F}_i\oplus\mathbf{F}_{ij}$ の数を数えることになる。前の計算と同じ記号の下に

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{F}_q & \xrightarrow{0} & \{0\}\\ {\scriptstyle\phi_1^{(k)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 0}\\ \mathbb{F}_q^{\oplus 2} & \xrightarrow{B_\tau} & \mathbb{F}_q\end{array}$$

なる図式が可換になることが要請されるが、これを満たすのは $k=0$ の場合のみである。すなわち埋め込みは 1 通りしかない。したがって

$$[\mathbf{F}_{ij}]*[\mathbf{F}_i]=[\mathbf{F}_i\oplus\mathbf{F}_{ij}]$$

となる。以上を合わせて第 1 式を得る。□

また次の成立は容易である。

Lemma 3.1.3. 頂点 i と j が Γ の中で connected でないならば、

$$[\mathbf{F}_i]*[\mathbf{F}_j]=[\mathbf{F}_j]*[\mathbf{F}_i].$$

Proof. 両辺は $[\mathbf{F}_i\oplus\mathbf{F}_j]$ に等しい。 □

さらに次が成立する：

Proposition 3.1.4. $R\Omega$ は $\mathbf{F}_i$ $(i\in I)$ で生成される。

証明のためにはさらなる議論が必要になるので、ここでは省略する (例えば [R1], [L1] 等を参照) [16]。

3.2 Twisted Ringel-Hall algebras

この節と次節で、前節で定義した Ringel-Hall algebra $R\Omega$ と量子群との関係について述べる。そのために $R\Omega$ の積を以下のように modify する。

$$[\overline{\mathbf{V}}]\cdot[\mathbf{V}']=q^{\frac{1}{2}\langle\langle[\overline{\mathbf{V}}],[\mathbf{V}']\rangle\rangle}[\overline{\mathbf{V}}]*[\mathbf{V}'].$$

ここで $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ は

$$\langle\langle[\overline{\mathbf{V}}],[\mathbf{V}']\rangle\rangle=\sum_{i\in I}(\dim_{\mathbb{F}_q}\overline{V}_i)(\dim_{\mathbb{F}_q}V_i')-\sum_{\tau\in\Omega}(\dim_{\mathbb{F}_q}\overline{V}_{\mathrm{out}(\tau)})(\dim_{\mathbb{F}_q}V'_{\mathrm{in}(\tau)})$$

によって定まる $R\Omega$ 上の bilinear form で、Euler-Ringel form と呼ばれる[17]。

[16] 例えば [L1] では reflection functor と量子群の PBW 型基底を使って、この事実を証明している。
[17] もちろん symmetric ではない。

Remark． 次の等式が知られている：

$$\begin{aligned}\langle\langle[\overline{\mathbf{V}}],[\mathbf{V}']\rangle\rangle &= \dim_{\mathbb{F}_q}\mathrm{Hom}_{M\Omega}(\overline{\mathbf{V}},\mathbf{V}')-\dim_{\mathbb{F}_q}\mathrm{Ext}^1_{M\Omega}(\overline{\mathbf{V}},\mathbf{V}')\\ &= \sum_{k\geq 0}(-1)^k\dim_{\mathbb{F}_q}\mathrm{Ext}^k_{M\Omega}(\overline{\mathbf{V}},\mathbf{V}').\end{aligned}$$

本質的なのは第 1 の等式で、第 2 の等式は path algebra $\mathbb{F}_q[\Gamma]$ が hereditary であることから従う。

以後煩雑になるので、同型類 $[\mathbf{V}]$ を $\mathbf{V}$ と略記する。積を modify した $(R\Omega,\cdot)$ に対して前節の結果を書き直しておこう。

Corollary 3.2.1. (1) $(R\Omega,\cdot)$ は $\mathbf{F}_i=\mathbf{F}_{i,\Omega}$ $(i\in I)$ で生成される、単位元を持つ $\mathbb{C}$ 上の associative algebra である。
(2) $\mathbf{F}_i$ $(i\in I)$ は次の関係式を満たす：

$$\mathbf{F}_i\mathbf{F}_j=\mathbf{F}_j\mathbf{F}_i,\quad (\,i\text{ と }j\text{ は }\Gamma\text{ の中で connected でない}\,),$$

$$\mathbf{F}_i^2\mathbf{F}_j-(q^{1/2}+q^{-1/2})\mathbf{F}_i\mathbf{F}_j\mathbf{F}_i+\mathbf{F}_j\mathbf{F}_i^2=0,\quad (\,i\text{ と }j\text{ は }\Gamma\text{ の中で connected}\,).$$

注目したいのは (2) の第 2 式である。$(R\Omega,*)$ の積は (もちろん) 矢印がどっち向きか？ということに依存しており、結果として得られる関係式 (Lemma 3.1.2 の (3)) も i と j に対して対称ではない。一方、積を modify した $(R\Omega,\cdot)$ では (積の定義自身は矢印の方向に依存するが) 結果として得られる関係式 (2) は向きには依存せず、i と j がつながっているかどうか (つまり Γ ではなく、underlying graph $|\Gamma|$ のみの情報) だけで決まってしまうわけである。

Definition 3.2.2. 積を modify した $(R\Omega,\cdot)$ を twisted Ringel-Hall algebra と呼ぶ。

3.3 量子群との関係

A,D,E 型の quiver $\Gamma=(I,\Omega)$ に対して、行列 $A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ を次のように定める：

$$a_{ij}=\begin{cases}2, & i=j,\\ -(\,i\text{ と }j\text{ を結ぶ矢印の本数}\,), & i\neq j.\end{cases}$$

容易にわかるように、これは A,D,E 型の Cartan 行列である。

Definition 3.3.1. (1) 生成元 $e_i,f_i,t_i^{\pm}$, $(i\in I)$ と以下の関係式で定義される $\mathbb{Q}(v)$ 上の単位元 1 を持つ assoiative algebra U_v を量子包絡環 (quantized universal envepoping algebra) という[18]。

(i) $t_it_j=t_jt_i,\quad t_it_i^{-1}=t_i^{-1}t_i=1.$

(ii) $t_ie_jt_i^{-1}=v^{a_{ij}}e_j,\quad t_if_jt_i^{-1}=v^{-a_{ij}}f_j.$

[18]通常、量子包絡環 U_v のことを「量子群」と呼ぶ。

(iii) $e_if_j - f_je_i = \delta_{ij}\frac{t_i - t_i^{-1}}{v - v^{-1}}$.

(iv) $i \neq j$ のとき、

$$\begin{cases} e_ie_j = e_je_i, & (a_{ij} = 0), \\ e_i^2e_j - (v + v^{-1})e_ie_je_i + e_je_i^2 = 0, & (a_{ij} = -1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_if_j = f_jf_i, & (a_{ij} = 0), \\ f_i^2f_j - (v + v^{-1})f_if_jf_i + f_jf_i^2 = 0, & (a_{ij} = -1). \end{cases}$$

(2) f_i $(i \in I)$ で生成される U_v の $\mathbb{Q}(v)$-subalgebra を U_v^- と書く。

Remark． (1) "$v \to 1$ の極限" をとることにより[19]、$U_v \to U(\mathfrak{g})$。つまり U_v は $U(\mathfrak{g})$ の v-analogue である。ここで $\mathfrak{g}$ は対応する $\mathbb{C}$ 上の A,D,E 型の有限次元 simple Lie algebra、$U(\mathfrak{g})$ はその universal enveloping algbera。例えば A_n 型なら

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s}l_{n+1} = \{X \in \mathrm{Mat}(n+1, \mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

(2) U_v^- は f_i $(i \in I)$ で生成され、

$$\begin{cases} f_if_j = f_jf_i, & (a_{ij} = 0), \\ f_i^2f_j - (v + v^{-1})f_if_jf_i + f_jf_i^2 = 0, & (a_{ij} = -1). \end{cases}$$

を基本関係式とする $\mathbb{Q}(v)$ 上の単位元 1 を持つ assoiative algebra である。
(3) U_v^- は $U(\mathfrak{n}_-)$ の v-analogue である。ここに $\mathfrak{n}_-$ は maximal nilpotent subalgebra と呼ばれる $\mathfrak{g}$ の Lie subalgebra で[20]、例えば A_n 型なら

$$\mathfrak{n}_- = \{X \in \mathfrak{s}l_{n+1} \mid X \text{ は狭義下三角行列 }\}$$

となる。その意味で、$\mathfrak{n}_-$ を下三角 Lie subalgebra と呼ぶこともある。また、一般に $U(\mathfrak{n}_-)$ は f_i $(i \in I)$ で生成され、

$$\begin{cases} f_if_j = f_jf_i, & (a_{ij} = 0), \\ f_i^2f_j - 2f_if_jf_i + f_jf_i^2 = 0, & (a_{ij} = -1). \end{cases}$$

を基本関係式とする $\mathbb{C}$ 上の単位元 1 を持つ assoiative algebra であることが知られている。これは (2) で述べた U_v^- の基本関係式に形式的に $v = 1$ を代入した式、そのものである。U_v^- は U_v の下三角部分代数とも呼ばれる。

1 次元の complex vector space $\mathbb{C}$ を

$$v \cdot z = q^{1/2}z, \quad (z \in \mathbb{C})$$

[19]定義関係式に安直に $v = 1$ を代入することは出来ない (例えば式の分母に $v - v^{-1}$ が現れているので、発散してしまう) ので、うまく極限をとる必要がある。

[20]まじめに書き出すと長くなるのでここでは正確な定義は述べない。詳しくは Lie algebra の教科書を参照のこと。

によって $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-module と見なしたものを $\mathbb{C}_{q^{1/2}}$ と書く。また

$$U^-_{q^{1/2}} = U^-_v \otimes_{\mathbb{Z}[v,v^{-1}]} \mathbb{C}_{q^{1/2}}$$

とおく[21]。

Theorem 3.3.2 (Ringel). $\mathbb{C}$-algebra の同型 $\Psi_\Omega : U^-_{q^{1/2}} \to R\Omega$ であって、

$$\Psi_\Omega(f_i) = \mathbf{F}_{i,\Omega}$$

を満たすものが一意的に存在する。

Proof. Corollary 3.2.1 から、Ψ_Ω が全射準同型であることはすぐにわかる。したがって Ψ_Ω が単射であることを言えばよい。

Q を対応する A,D,E 型の root lattice、α_i $(i \in I)$ を simple root とし、$U^-_{q^{1/2}}$ の生成元 f_i の weight を $-\alpha_i \in Q$ と定める。このとき $U^-_{q^{1/2}}$ は分解

$$U^-_{q^{1/2}} = \bigoplus_{\alpha \in Q_-} \left(U^-_{q^{1/2}}\right)_\alpha$$

を持つ。ここに $Q_- = \oplus_{i\in I} \mathbb{Z}_{\leq 0}\alpha_i$ である。また $\alpha \in Q_-$ に対し

$$\left(U^-_{q^{1/2}}\right)_\alpha := \{X \in U^-_{q^{1/2}} \mid X \text{ の weight} = \alpha\}$$

と定める。これを weight $\alpha \in Q_-$ の weight space と呼ぶ。任意の $\alpha \in Q_-$ に対し、weight space は有限次元であることに注意されたい。

一方 $R\Omega$ も dimension vector による次数付け $R\Omega = \oplus R\Omega_d$ を持っており各 $R\Omega_d$ は有限次元だった。ここで

$$\mathbb{Z}^I_{\geq 0} \ni d = (d_i) \longleftrightarrow \alpha = -\sum_{i\in I} d_i\alpha_i \in Q_-$$

によって $\mathbb{Z}^I_{\geq 0}$ と Q_- を同一視すると、Ψ_Ω が両者の次数付けを保つ写像であることがわかる。対応する各次数空間はともに有限次元であるが、簡単な考察から両者の次元は等しいことがわかる。Ψ_Ω が全射であることはすでに知っているので、ゆえに単射である。 □

4 Convolution 積と Lusztig による量子群の幾何学的構成

前節で quiver の表現論と量子群との関係について紹介した。しかし考えている quiver Γ の表現は一般のものではなく、

(a) 係数体 K は有限体 $\mathbb{F}_q$ である。

[21] やっていることは「$v = q^{1/2}$ を代入する」ということである。こんなことをしてしまって発散が起きないかが心配になるが、1 のベキ根以外の値を代入する場合には問題は起きないことが知られている。いま q は素数のベキだから $v = q^{1/2}$ を代入しても問題はない。

(b) タイプは A,D,E 型に限る。

との制限があった。これに対応して量子群の方も現れるのは A,D,E 型の場合だけで、しかもパラメータ v は generic ではなく $v = q^{1/2}$ との制約が付くことになっていた。

話を一般化するためには、これらの制約は可能なら外したいわけだが、この節では (a) の制約をどうやって外すか？と言う問題を中心に考えたい。そのための基本的なアイデアが以下に述べる Convolution 積である。

4.1 Convolution 積

まず一般的な言葉の準備をする。M, N 有限集合、$\phi : M \to N$ を M から N への写像とする。また $\mathbb{C}(M)$, $\mathbb{C}(N)$ を M および N 上の $\mathbb{C}$-valued function 全体のなす有限次元 vector space とする。このとき

$$\phi_! : \mathbb{C}(M) \to \mathbb{C}(N), \qquad \phi^* : \mathbb{C}(N) \to \mathbb{C}(M)$$

をそれぞれ

$$\phi_!(f)(n) = \sum_{m \in \phi^{-1}(n)} f(m), \qquad \phi^*(g)(m) = g(\phi(m))$$

と定める[22]。

$\Gamma = (I, \Omega)$ を A,D,E 型の quiver、V を $K = \mathbb{F}_q$ 上の I-graded vector space で、$\underline{\dim} V = d$ なるものとする。$\mathbb{C}^{G_V}(E_{V,\Omega})$ を $E_{V,\Omega}$ 上の $\mathbb{C}$-valued G_V-invariant function 全体のなす $\mathbb{C}$-vector space とし、$\mathbf{K}_{\Omega,d} := \mathbb{C}^{G_V}(E_{V,\Omega})$ とおく。このとき

$$\mathbf{K}_{\Omega,d} = \bigoplus_{\mathcal{O}:\text{orbit}} \mathbb{C}\chi_{\mathcal{O}}$$

が成り立つ。ここに $\chi_{\mathcal{O}} \in \mathbf{K}_{\Omega,d}$ は

$$\chi_{\mathcal{O}}(B) = \begin{cases} 1, & (B \in \mathcal{O}), \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

なる関数で、$\mathcal{O}$ の特性関数と呼ばれる。

$E_{V,\Omega}$ 上の G_V-orbit と $M\Omega_d$ の同型類の間に 1 対 1 対応があったことを思い出して、orbit $\mathcal{O}$ に対応する $M\Omega_d$ の同型類を $[\mathbf{V}_{\mathcal{O}}]$ と書こう。このとき対応 $\chi_{\mathcal{O}} \mapsto [\mathbf{V}_{\mathcal{O}}]$ は $\mathbb{C}$-vector space としての同型

$$\mathbf{K}_{\Omega,d} = \bigoplus_{\mathcal{O}} \mathbb{C}\chi_{\mathcal{O}} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\mathcal{O}} \mathbb{C}[\mathbf{V}_{\mathcal{O}}] = R\Omega_d$$

を誘導する。したがって $\mathbf{K}_\Omega = \oplus_d \mathbf{K}_{\Omega,d}$ とおけば、$\mathbf{K}_\Omega$ と $R\Omega$ は $\mathbb{C}$-vector space として同型である。

[22] 前者は direct image with compact support あるいは proper direct image、後者は pull back と呼ばれる。

次に $\mathbf{K}_\Omega$ に積構造を定めよう。$V,\ V',\ \overline{V}$ を $\mathbb{F}_q$ 上の I-graded vector space で、dimension vector がそれぞれ $d,\ d',\ \overline{d}$ であるものとする。また $d = d' + \overline{d}$ を仮定する。以後このような I-graded vector space の組 $(V, V', \overline{V})$ を 3 つ組の I-graded vector space と呼ぶことにする[23]。

以下の diagram を考える：

$$(\bigstar) \qquad E_{\overline{V},\Omega} \times E_{V',\Omega} \xleftarrow{p_1} E_1 \xrightarrow{p_2} E_2 \xrightarrow{p_3} E_{V,\Omega}.$$

ただし

$$E_1 = \left\{ (B, \overline{\phi}, \phi') \;\middle|\; \begin{array}{l} B \in E_{V,\Omega}, \\ 0 \to V' \xrightarrow{\phi'} V \xrightarrow{\overline{\phi}} \overline{V} \to 0 \\ \text{は } I\text{-graded vector space の完全系列かつ}, \\ B(\mathrm{Im}\phi') \subset \mathrm{Im}\phi'. \end{array} \right\},$$

$$E_2 = \left\{ (B, W) \;\middle|\; \begin{array}{l} B \in E_{V,\Omega}, \\ W \text{ は } V \text{ の } I\text{-graded subspace で } \underline{\dim} W = d' \\ \text{かつ}, B(W) \subset W \text{ を満たすもの}. \end{array} \right\}$$

ここで V の I-graded subspace W が $B \in E_{V,\Omega}$ に対し $B(W) \subset W$ であるとは、任意の $\tau \in \Omega$ に対し $B_\tau(W_{\mathrm{out}(\tau)}) \subset W_{\in(\tau)}$ を満たすことをいう。

$(B, \overline{\phi}, \phi') \in E_1$ が与えられると、自然に $\overline{B} \in E_{\overline{V},\Omega}$ と $B' \in E_{V',\Omega}$ が誘導される。このとき $p_1(B, \overline{\phi}, \phi') = (\overline{B}, B')$ とおく。また $p_2(B, \overline{\phi}, \phi') = (B, \mathrm{Im}\phi')$, $p_3(B, W) = B$ と定義する。

Definition 4.1.1. $\overline{f} \in \mathbf{K}_{\Omega,\overline{d}},\ f' \in \mathbf{K}_{\Omega,d'}$ に対し、

$$\overline{f} * f' = (p_3)_!(p_2)_\flat(p_1)^*(\overline{f} \otimes f')$$

と定める。この $*$ を convolution 積と呼ぶ。ただし $(p_2)_\flat = \frac{1}{\sharp(G_{\overline{V}}) \times \sharp(G_{V'})}(p_2)_!$。

Remark . $(p_2)_\flat$ は次のような性質を持つ morphism として一意的に特徴づけることが出来る：任意の $\overline{f} \in \mathbf{K}_{\Omega,\overline{d}},\ f' \in \mathbf{K}_{\Omega,d'}$ に対し

$$(p_2)^*(p_2)_\flat(p_1)(\overline{f} \otimes f') = (p_1)^*(\overline{f} \otimes f'). \tag{4.1.1}$$

4.2 Ringel-Hall algebra 再論

3 節では量子群との関係を見るために twisted Ringel-Hall algebra $(R\Omega, \cdot)$ を導入したが、q のベキがずれているために話がややこしくなるので、この節では twist しない Ringel-Hall algebra $(R\Omega, *)$ を扱うことにする。

4.1 節で導入した $\mathbf{K}_\Omega$ の convolution 積 $*$ に関して次が成り立つ：

[23] これはここだけの呼び方である。

Proposition 4.2.1. (1) 任意の $\overline{f} \in \mathbf{K}_{\Omega,\overline{d}}$, $f' \in \mathbf{K}_{\Omega,d'}$ に対し、$\overline{f} * f' \in \mathbf{K}_{\Omega,d}$ である。すなわち $*$ は $\mathbf{K}_\Omega$ 上に積を定める。
(2) $(\mathbf{K}_\Omega, *)$ は単位元を持つ $\mathbb{C}$ 上の associative algebra で、自然な同型 $\mathbf{K}_\Omega \cong R\Omega$ は $\mathbb{C}$-algebra としての同型を与える。

Proof. (1) は比較的易しいので、(2) のみ示す。まず次の claim を準備する。

Claim. $(B, W) \in E_2$ に対して $(B, \overline{\phi}_0, \phi'_0) \in p_2^{-1}(B, W)$ を 1 つ固定する。さらに $(\overline{B}_0, B'_0) = p_1(B, \overline{\phi}_0, \phi'_0)$ とおく。このとき

$$(p_2)_\flat (p_1)^* (\overline{f} \otimes f')(B, W) = \overline{f}(\overline{B}_0) f'(B'_0)$$

である。

Proof of Claim. 定義から

$$(p_2)_\flat (p_1)^* (\overline{f} \otimes f')(B, W) = \frac{1}{\sharp(G_{\overline{V}}) \times \sharp(G_{V'})} \sum_{(B, \overline{\phi}, \phi') \in p_2^{-1}(B,W)} (p_1)^* (\overline{f} \otimes f')(B, \overline{\phi}, \phi').$$

$(B, \overline{\phi}, \phi') \in p_2^{-1}(B, W)$ であること、$\overline{g} \in G_{\overline{V}}$, $g' \in G_{V'}$ が存在して $\overline{\phi} = \overline{g} \cdot \overline{\phi}_0$, $\phi' = g' \cdot \phi'_0$ と書けることは同値なので、

$$\text{右辺} = \frac{1}{\sharp(G_{\overline{V}}) \times \sharp(G_{V'})} \sum_{\overline{g} \in G_{\overline{V}}, g' \in G_{V'}} (p_1)^* (\overline{f} \otimes f')(B, \overline{g} \cdot \overline{\phi}_0, g' \cdot \phi'_0).$$

$\overline{f}$, f' はそれぞれ、$G_{\overline{V}}$ および $G_{V'}$ の作用に関して不変な関数だったので、等式を得る。□

Proposition の証明に戻ろう。(2) を証明するためには $(V, V', \overline{V})$ を I-graded space の 3 つ組、$\mathcal{O} \subset E_{V,\Omega}$, $\overline{\mathcal{O}} \subset E_{\overline{V},\Omega}$, $\mathcal{O}' \subset E_{V',\Omega}$ を orbits として[24]、

$$\chi_{\overline{\mathcal{O}}} * \chi_{\mathcal{O}'} = \sum_{\mathcal{O} \subset E_{V,\Omega}} G(\mathcal{O}; \overline{\mathcal{O}}, \mathcal{O}') \chi_{\mathcal{O}}$$

によって $G(\mathcal{O}; \overline{\mathcal{O}}, \mathcal{O}')$ を定めるとき、

$$G(\mathcal{O}; \overline{\mathcal{O}}, \mathcal{O}') = g(\mathbf{v}_{\mathcal{O}}; \mathbf{v}_{\overline{\mathcal{O}}}, \mathbf{v}_{\mathcal{O}'})$$

を示せばよい。

[24] あまりいい記号とは言えないが、ここでは $\overline{\mathcal{O}}$ は $E_{\overline{V},\Omega}$ の orbit を表しており、$\mathcal{O} \subset E_{V,\Omega}$ の closure ではないことに注意されたい。

$B \in \mathcal{O}$, $(B,W) \in p_3^{-1}(B)$ とする。Claim の証明と同じ記号を用いれば、

$$\begin{aligned}(p_2)_\flat(p_1)^*(\chi_{\overline{\mathcal{O}}} \otimes \chi_{\mathcal{O}'})(B,W) &= \chi_{\overline{\mathcal{O}}}(\overline{B}_0)\chi_{\mathcal{O}'}(B'_0) \\ &= \begin{cases} 1, & (\overline{B}_0 \in \overline{\mathcal{O}} \text{ かつ } B'_0 \in \mathcal{O}'), \\ 0, & (\text{otherwise}). \end{cases}\end{aligned}$$

$\overline{B}_0 \in \overline{\mathcal{O}}$ かつ $B'_0 \in \mathcal{O}'$ であることと、$(B,W) \in p_2p_1^{-1}(\overline{\mathcal{O}} \times \mathcal{O}')$ が同値であることに注意すると、

$$\begin{aligned}G(\mathcal{O}; \overline{\mathcal{O}}, \mathcal{O}') &= \chi_{\overline{\mathcal{O}}} * \chi_{\mathcal{O}'}(B) \\ &= \sum_{(B,W) \in p_3^{-1}(B)} (p_2)_\flat(p_1)^*(\chi_{\overline{\mathcal{O}}} \otimes \chi_{\mathcal{O}'})(B,W) \\ &= \sum_{(B,W) \in p_3^{-1}(B) \cap p_2p_1^{-1}(\overline{\mathcal{O}} \times \mathcal{O}')} 1 \\ &= \sharp\{p_3^{-1}(B) \cap p_2p_1^{-1}(\overline{\mathcal{O}} \times \mathcal{O}')\}.\end{aligned}$$

一方、$[\mathbf{V}_{\mathcal{O}}] = [(V,B)]$ であることに注意すると、定義から

$$g(\mathbf{v}_{\mathcal{O}}; \mathbf{v}_{\overline{\mathcal{O}}}, \mathbf{v}_{\mathcal{O}'}) = \sharp\{p_3^{-1}(B) \cap p_2p_1^{-1}(\overline{\mathcal{O}} \times \mathcal{O}')\}$$

であることはすぐにわかる。よって示された。 □

4.3 Lusztig による量子群の幾何学的構成へ

前節で示した Proposition 4.2.1 は、自然な同型 $\mathbf{K}_\Omega \cong R\Omega$ によって $R\Omega$ 上に定まる積構造と $\mathbf{K}_\Omega$ 上の convolution 積が同一視できることを言っている。一見するとこれは単に「書き換え」を行っただけであって、それ以上でもそれ以下でもないようにも思えるが、実はそうではない。convolution 積 $*$ の構成をもう一度整理すると、$*$ とは diagram(★) から定まる写像

$$(\natural) \qquad \mathbb{C}(E_{\overline{V},\Omega}) \otimes \mathbb{C}(E_{V',\Omega}) \xrightarrow{p_1^*} \mathbb{C}(E_1) \xrightarrow{(p_2)_\flat} \mathbb{C}(E_2) \xrightarrow{(p_3)_!} \mathbb{C}(E_{V,\Omega})$$

を群作用で不変な部分 $\mathbf{K}_{\Omega,\overline{d}} \otimes \mathbf{K}_{\Omega,d'} = \mathbb{C}^{G_{\overline{V}}}(E_{\overline{V},\Omega}) \otimes \mathbb{C}^{G_{V'}}(E_{V',\Omega})$ に制限して得られるものなのであった。

今までは K は有限体と仮定してきたが、ここから $K = \overline{\mathbb{F}}_q$ としよう。

$$(\bigstar) \qquad E_{\overline{V},\Omega} \times E_{V',\Omega} \xleftarrow{p_1} E_1 \xrightarrow{p_2} E_2 \xrightarrow{p_3} E_{V,\Omega}$$

を考えるだけならば K を有限体とする必要はないので、$K = \overline{\mathbb{F}}_q$ でも (もちろん)well-defined である。$K = \overline{\mathbb{F}}_q$ にすることのメリットは代数幾何が使えるということにある。この利点を活用して、今まで考えてきた $E_{V,\Omega}$ 上の G_V-invariant fuction の代わりに $E_{V,\Omega}$ 上の G_V-equivariant な sheaf を考えることにする[25]。つまり各 $E_{V,\Omega}$ たちの上に G_V-equivariant

[25]もちろん $\mathbb{F}_q$ のままでも代数幾何的な手法は使えないことはないが、代数閉体でないと使える道具がはるかに少なくなる。また $\mathbb{F}_q$ のままで sheaf を考えることもできるが、空間自身が有限個の点集合になってしまうため、つまらないものになってしまう。その点からも $\overline{\mathbb{F}}_q$ まで広げないと面白くない。

な sheaf を乗せて、diagram($\natural$) の sheaf version を考えようとわけである。sheaf に対しても"pull back"や"proper direct image"等の操作は行うことができるので、拡張を考えることが可能となる。

ただし、単に拡張するだけでは意味がないわけで、もとの Ringel-Hall algebra との関係がどうなっているのかをきちんと見なければならない。話を少し戻そう。前節までで考えてきた diagram は $\mathbb{F}_q$-rational point の作る diagram

$$E_{\overline{V},\Omega}(\mathbb{F}_q) \times E_{V',\Omega}(\mathbb{F}_q) \xleftarrow{p_1} E_1(\mathbb{F}_q) \xrightarrow{p_2} E_2(\mathbb{F}_q) \xrightarrow{p_3} E_{V,\Omega}(\mathbb{F}_q)$$

と思うことができる。これに対応して orbit も、全て $\mathbb{F}_q$-rational point を考えることになる。$B \in \mathcal{O}(\mathbb{F}_q)$ に対し、$Z := p_3^{-1}(B) \cap p_2 p_1^{-1}(\overline{\mathcal{O}} \times \mathcal{O}') \subset E_2$ とおく。Proposition 4.2.1 の証明の中で述べたことから、Ringel-Hall algebra の積 $*$ を定める構造定数 $G(\mathcal{O}; \overline{\mathcal{O}}, \mathcal{O}') = g(\mathbf{v}_{\mathcal{O}}; \mathbf{v}_{\overline{\mathcal{O}}}, \mathbf{v}_{\mathcal{O}'})$ は、Z の $\mathbb{F}_q$-rational point の数、$\sharp\{Z(\mathbb{F}_q)\}$ と一致する。

正標数の代数幾何からいくつか言葉を準備をする。一般に X を $\mathbb{F}_q$ 上定義された variety とする。このとき X は Frobenius action, $Fr : x \mapsto x^q$ で閉じており、X の $\mathbb{F}_q$-rational points $X(\mathbb{F}_q)$ は Frobenius action の固定点全体と一致する。さらに l を p と異なる素数として、Frobenius action は l-進 cohomology 群の間の写像 $Fr^* : H_c^*(X, \overline{\mathbb{Q}}_l) \to H_c^*(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ を誘導する。このとき次が知られている：

Theorem 4.3.1 (Trace formula). X がある "よい条件" を満たせば、

$$\sharp(X(\mathbb{F}_q)) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \mathrm{tr}\left(Fr^* : H_c^i(X, \overline{\mathbb{Q}}_l) \to H_c^i(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)\right)$$

が成り立つ[26]。

この定理を我々の場合に適用すれば、

$$\begin{aligned} g(\mathbf{v}_{\mathcal{O}}; \mathbf{v}_{\overline{\mathcal{O}}}, \mathbf{v}_{\mathcal{O}'}) &= \sharp(Z(\mathbb{F}_q)) \\ &= \sum_{i \geq 0} (-1)^i \mathrm{tr}\left(Fr^* : H_c^i(Z, \overline{\mathbb{Q}}_l) \to H_c^i(Z, \overline{\mathbb{Q}}_l)\right) \end{aligned}$$

となる。つまり $R\Omega$ の積 $*$ の構造定数を幾何学的に記述するためには、全ての cohomology 群のデータが必要となるわけで、そのためには単独の sheaf を考えるのではなく、sheaf の complex を考えないといけなくなる。実際 Lusztig による量子群の幾何学的構成では perverse sheaf という、ある種の良い条件をみたす sheaf の comlpex を $E_{V,\Omega}$ の上に乗せて diagram ($\natural$) の類似を考える。

もう少し具体的に言おう。まず $E_{V,\Omega}$ 上の sheaf の complex のなす bounded derived category を $\mathcal{D}(E_{V,\Omega})$ とし、G_V-equivariant かつ "ある種の良い条件" をみたす $\overline{\mathbb{Q}}_l$-sheaf の comlpex

$$\mathcal{F}^\bullet = (\cdots \to \mathcal{F}^{i_1} \to \mathcal{F}^i \to \mathcal{F}^{i+1} \to \cdots)$$

[26] $X(\mathbb{F}_q)$ は Frobenius action の固定点全体だったので、この定理は Frobenius action に関する不動点定理であると言ってもよい。

のなす $\mathcal{D}(E_{V,\Omega})$ の full subcategory $\mathcal{Q}_{V,\Omega}$ を考える[27] 。そこで $\overline{\mathcal{F}}^\bullet \in \mathcal{Q}_{\overline{V},\Omega}$, $\mathcal{F}'^\bullet \in \mathcal{Q}_{V',\Omega}$ に対して

$$\overline{\mathcal{F}}^\bullet \circ \mathcal{F}'^\bullet := (p_3)_!(p_2)_\flat(p_1)^*(\overline{\mathcal{F}}^\bullet \boxtimes \mathcal{F}'^\bullet)[d_1 - d_2] \tag{4.3.1}$$

と定める。ここで $(p_3)_!$, $(p_1)^*$ はそれぞれ proper direct image, pull back で、$(p_2)_\flat$ は (4.1.1) と同様の条件で一意的に決まる operation。また $\boxtimes$ は exterior tensor product、$d_i \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, 2)$ は p_i の fiber の次元で、$[d_1 - d_2]$ は complex の shift を表す。

$\mathcal{Q}_{V,\Omega}$ の Grothendieck 群を $\mathcal{K}_{V,\Omega}$ とおき、さらに dimension vector を可能な限り走らせて、直和

$$\mathcal{K}_\Omega := \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}} \mathcal{K}_{V,\Omega}$$

を考える。(ただし $d = \underline{\dim} V$.) 定義から $\mathcal{K}_\Omega$ は $\mathbb{Z}$-module であるが、v の作用を

$$v \cdot \mathcal{F}^\bullet := \mathcal{F}^\bullet[1]$$

で定めれば、$\mathcal{K}_\Omega$ は $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-module の構造を持つ。このとき $\mathcal{K}_\Omega$ に積 $\circ$ を (4.3.1) によって定めると、次が成り立つ。

Theorem 4.3.2 (Lusztig). $(\mathcal{K}_\Omega, \circ)$ は単位元を持つ $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ 上の associative algebra である。

特に $V = V(i)$ $(i \in I)$ の場合を考えよう。念のため思い出しておくと $V(i)$ は i 成分のみ 1 次元で、残りの成分が全て $\{0\}$ であるような 1 次元の I-graded vector space である。このとき $E_{V(i),\Omega}$ は 1 点からなる集合である[28]。したがって $E_{V(i),\Omega}$ 上の $\overline{\mathbb{Q}}_l$-sheaf を考えるということは、単なる $\overline{\mathbb{Q}}_l$-vector space を考えることに他ならない。そこで次のような $E_{V(i),\Omega}$ 上の $\overline{\mathbb{Q}}_l$-sheaf の complex ($= \overline{\mathbb{Q}}_l$-vector space の complex) を考える：

$$\mathcal{F}^\bullet_{i,\Omega} := (\cdots \to 0 \to 0 \to \mathcal{F}^0_{i,\Omega} \to 0 \to 0 \to \cdots), \quad \mathcal{F}^0_{i,\Omega} = \overline{\mathbb{Q}}_l.$$

このとき $\mathcal{F}^\bullet_{i,\Omega} \in \mathcal{Q}_{V(i),\Omega}$ となっている。

Theorem 4.3.3 (Lusztig). 写像 $U_v^- \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(v) \otimes_{\mathbb{Z}[v,v^{-1}]} \mathcal{K}_\Omega$ を

$$f_i \mapsto \mathcal{F}^\bullet_{i,\Omega} \quad \text{for any } i \in I$$

によって定める[29]。このとき上の写像は well-defined で、さらに $\mathbb{Q}(v)$-algbera としての同型を与える。

---

[27] 正確な定義を書くと長くなるので、ここでは省略する。詳しくは [L2],[L3] 等を参照のこと。一言だけコメントしておくと、category $\mathcal{Q}_{V,\Omega}$ は complex の shift で不変で、$E_{V,\Omega}$ 上の G_V-equivariant な preverse sheaves を含んでいる。

[28] 零写像のみ。

[29] U_v^- は f_i $(i \in I)$ で生成されることに注意。

これでやっと「(a) の制約をどうやって外すか？」との問題の答が得られた。すなわち quiver の幾何学と量子群との関係は「係数体 K が有限体 $\mathbb{F}_q$ である」、「量子群のパラメータ v は $v = q^{1/2}$ である」との仮定を外したレベルでも成り立っているわけである。

「ちょっと待った！Ringel-Hall algebra との関係はどうなっちゃったのか？」と思われる方もいるだろう。もちろん忘れてしまったわけではなく、上の定理から Ringel-Hall algebra の話に戻ることができる。まず考えている $E_{V,\Omega}$ 上の sheaf の $\mathbb{F}_q$-rational point 上での stalk をとる。この stalk 上で Frobenious action の trace を考えることによって $\mathbb{F}_q$-rational points 上の関数を作ることができるが、実はこの関数が $\mathbf{K}_{\Omega,d}$ の元を与えることがわかる[30]。このとき (4.3.1) で定めた積 $\circ$ は、twisted Ringel-Hall algebra $(R\Omega, \cdot)$ の積構造と compatible になっていて、Theorem 3.3.2 を復活させるという仕組みになっている。

Remark． (1) このようにして「(a) の制約を外す問題」に 1 つの解答が得られたわけだが、実は同時に「(b) の制約を外す問題」に対しても答えが得られたことになっている。上の Theorem 4.3.3 は quiver $\Gamma = (I, \Omega)$ が A,D,E 型の場合の定理であるが、A,D,E との制約を外して一般の quiver から出発しても全く同様の結果が得られることが知られている。([L2],[L3]) その場合の対応する量子群については、6.2 節で詳しく述べることにする。
(2) 今の話は $K = \overline{\mathbb{F}}_q$ とした場合の話だったが、ここまでくると $K = \mathbb{C}$ としてもよいことが知られている。その場合 Frobenuis action や $\mathbb{F}_q$-rational points との関係等、正標数の代数幾何の深い結果が使えなくなってしまうが、その代わり perverse shaves とある種の D-module（ regular holonomic D-modules ）との categorical equivalence[31]を用いて、D-module の理論が使えるようになるというメリットがある。

5 Preprojective algebras

5.1 定義と基本的な性質

この節からは double quiver $\Gamma = (I, H)$ を考える。また $K = \mathbb{C}$ とする。

$\Gamma = (I, H)$ は必ず oriented cycle を持っているので、path algebra $\mathbb{C}[\Gamma]$ は常に無限次元である。orientation Ω 一つ固定して quiver $\Gamma = (I, \Omega)$ を考える。また $\varepsilon : H \to \{\pm\}$ を

$$\varepsilon(\tau) = \begin{cases} +1, & (\tau \in \Omega), \\ -1, & (\tau \in \overline{\Omega}) \end{cases}$$

とおく。各 $i \in I$ に対して

$$r_i := \sum_{\tau \in H,\ \mathrm{out}(\tau)=i} \varepsilon(\tau)\overline{\tau}\tau \in \mathbb{C}[\Gamma]$$

とし、r_i $(i \in I)$ たちで生成される $\mathbb{C}[\Gamma]$ の両側 ideal を J とおく。

[30] このような対応は "sheaf-function dictionary" とも呼ばれ、その筋ではよく知られた対応である (例えば [D] 参照)。
[31] Riemann-Hilbert 対応と呼ばれるもの。関係する文献は多いが、ここでは [谷堀] を挙げておく。

Definition 5.1.1. $P(\Gamma) = \mathbb{C}[\Gamma]/J$ を (Γ の) preprojective algebra という。

$V = \oplus_{i\in I} V_i$ を $\mathbb{C}$ 上の I-graded vector space とし、

$$X_V := \bigoplus_{\tau\in H} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathrm{out}(\tau)}, V_{\mathrm{in}(\tau)})$$

とおく。X_V には $G_V = \prod_{i\in I} GL(V_i)$ が自然に作用する。

Definition 5.1.2. (1) 次で定義される X_V の closed subvariety $\mathrm{mod}(P(\Gamma), V)$ を $P(\Gamma)$ の variety of modules という：

$$\mathrm{mod}(P(\Gamma), V) := \left\{ B \in X_V \;\middle|\; \sum_{\tau\in H,\ \mathrm{out}(\tau)=i} \varepsilon(\tau) B_{\overline{\tau}} B_\tau = 0 \quad \text{for any } i \in I \right\}.$$

(2) 以下で定義される X_V の closed subvariety $\Lambda_V = \mathrm{mod}^0(P(\Gamma), V)$ を $P(\Gamma)$ の variety of nilpotent modules もしくは nilpotent variety という：

$$\Lambda_V = \mathrm{mod}^0(P(\Gamma), V) := \{ B \in \mathrm{mod}(P(\Gamma), V) \mid B \text{ は nilpotent} \}.$$

ただし $B = (B_\tau) \in X_V$ が nilpotent であるとは、ある $N > 0$ が存在して、任意の長さ N の path $p = \tau_N \cdots \tau_1$ に対し $B_{\tau_N} \cdots B_{\tau_1} = 0$ が成り立つことをいう。

次の lemma は容易である。

Lemma 5.1.3. $\mathrm{mod}(P(\Gamma), V)$, $\mathrm{mod}^0(P(\Gamma), V)$ はともに G_V-stable である。

V を $P(\Gamma)$-module とする。このとき自然な射影 $\mathbb{C}[\Gamma] \to P(\Gamma)$ により、V を $\mathbb{C}[\Gamma]$-module と見なすことができる。$\mathbb{C}[\Gamma]$ に関しては 2.3 節で述べた path algebra の一般論が適用できる。つまり $V_i = e_i V$ $(i \in I)$ とおくことで、V に I-graded vector space の構造が入る。したがって $X_V = \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathrm{out}(\tau)}, V_{\mathrm{in}(\tau)})$ を考えることができる。$B = (B_\tau)_{\tau\in H} \in X_V$ をとれば (V, B) は Γ の表現である。このとき $P(\Gamma)$ を factor するための条件を書き下せば

$$\sum_{\tau\in H,\ \mathrm{out}(\tau)=i} \varepsilon(\tau) B_{\overline{\tau}} B_\tau = 0 \quad \text{for any } i \in I$$

となる。このことと Lemma 5.1.3 を併せれば、自然な 1 対 1 対応

$$\{\mathrm{mod}(P(\Gamma), V) \text{ の } G_V\text{-orbit}\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{dimension vector が } \underline{\dim} V \text{ と等しく} \\ \text{なるような } P(\Gamma)\text{-module の同型類} \end{array} \right\}$$

があることがわかる。

$P(\Gamma)$ について知られている性質をいくつか列挙しておく。

Proposition 5.1.4.
(1) 次の 3 条件は同値[32]。
  (a) $P(\Gamma)$ は有限次元。
  (b) Γ の underlying graph $|\Gamma|$ が A,D,E 型の Dynkin 図形。
  (c) 任意の V に対して、$\mathrm{mod}(P(\Gamma),V)=\mathrm{mod}^0(P(\Gamma),V)$.
(2) $P(\Gamma)$ が有限表現型であることと、$|\Gamma|$ が A_n $(n\leq 4)$ 型の Dynkin 図形であることは同値。また $P(\Gamma)$ の表現型が tame であることと、$|\Gamma|$ が A_5 もしくは D_4 の Dynkin 図形であることは同値[33]。

また次の Proposition は、任意の $P(\Gamma)$ に対して成り立つ著しい性質である (See [C1])。

Proposition 5.1.5. V, W を任意の有限次元 $P(\Gamma)$-module とするとき、

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{P(\Gamma)}(V,W)=\dim \mathrm{Ext}^1_{P(\Gamma)}(W,V).$$

5.2 $\mathbf{mod}(P(\Gamma),V)$ の既約成分

$P(\Gamma)$ の表現論を調べようと思う場合には、前節に述べた 1 対 1 対応

$$\{\mathrm{mod}(P(\Gamma),V)\text{ の }G_V\text{-orbit}\}\longleftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\text{dimension vector が }\underline{\dim}V\text{ と等しく}\\ \text{なるような }P(\Gamma)\text{-module の同型類}\end{array}\right\}$$

より、本来なら $\mathrm{mod}(P(\Gamma),V)$ の G_V-orbit を調べなければならない。しかし Proposition 5.1.4 で述べたように $P(\Gamma)$ の表現型は、ごく一部の例外を除いてほとんどの場合 wild である。今の場合 $K=\mathbb{C}$ としているので、$\mathrm{mod}(P(\Gamma),V)$ の G_V-orbit と $P(\Gamma)$-module の同型類の間に 1 対 1 対応があることは分かっても、これらはほとんどコントロールが出来ない。したがって「G_V-orbit を直接調べるのはあまり得策ではない」と考えられる[34]。

とはいえ $\mathrm{mod}(P(\Gamma),V)$ 自身の性質を調べることによって、$P(\Gamma)$ の表現論に関する何らかのデータを引き出せることは間違いない。$\mathrm{mod}(P(\Gamma),V)$ は variety であるので、その既約成分の構造を調べるのは基本的な問題である。以下この点に関して知られている事実を簡単に紹介する。

我々の考えている $\mathrm{mod}(P(\Gamma),V)$ は V の dimension vector だけで決まるので

$$\mathrm{Irr}(\mathrm{mod}(P(\Gamma),d))=\mathrm{Irr}(\mathrm{mod}(P(\Gamma),V))\quad(d=\underline{\dim}V)$$

とも書いてもよい。$\Lambda\in\mathrm{Irr}(\mathrm{mod}(P(\Gamma),d))$ が indecomposable $P(\Gamma)$-modules からなる部分集合を稠密に含むとき、Λ は indecomposable であるという。また $\mathrm{ind}(\mathrm{Irr}(\mathrm{mod}(P(\Gamma),d)))$ で $\mathrm{mod}(P(\Gamma),d)$ の indecomposable な既約成分全体の集合を表す。さらに

$$\mathrm{Irr}(P(\Gamma))=\bigsqcup_{d\in\mathbb{Z}^I_{\geq 0}}\mathrm{Irr}(\mathrm{mod}(P(\Gamma),d)),$$

[32](a) と (b) の同値性は quiver の表現論ではよく知られた事実である (例えば [Rei] 参照)。(b)⇒(c) は Lusztig ([L2]) による。逆向きは Crawley-Boevey ([C2]) による。
[33]このことを誰が最初に証明したかは知らないが、詳しい話は例えば [DR] に出ている。ちなみに筆者はこの事実を [GLS1] で知った。
[34]これはあくまでも筆者の個人的意見である。

$$\mathrm{ind}(\mathrm{Irr}(P(\Gamma))) = \bigsqcup_{d\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^I} \mathrm{ind}(\mathrm{Irr}(\mathrm{mod}(P(\Gamma),d)))$$

とおく。

V^i $(1 \leq k \leq m)$ を $P(\Gamma)$-modules とし、$\Lambda_k \in \mathrm{Irr}(\mathrm{mod}(P(\Gamma), V^k))$ とする。$V = \oplus_{k=1}^m V^k$ とし、

$$\Lambda_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda_m = \left\{ x \in \mathrm{mod}(P(\Gamma), V)) \;\middle|\; \begin{array}{c} x \cong x_1 \oplus \cdots \oplus x_m, \\ x_k \in \Lambda_k \ (1 \leq k \leq m) \end{array} \right\}$$

とおく。このとき閉包 $\overline{\Lambda_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda_m}$ は $\mathrm{mod}(P(\Gamma), V))$ の既約な subvariety であるが、一般に $\mathrm{mod}(P(\Gamma), V))$ の既約成分になるとは限らない。この点に関して Crawly-Boevey は次の命題を証明した。

Proposition 5.2.1 ([C2]). $\Lambda \in \mathrm{Irr}(P(\Gamma))$ に対して、$\Lambda_k \in \mathrm{ind}(\mathrm{Irr}(P(\Gamma)))$ が存在して、

$$\Lambda = \overline{\Lambda_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda_m}$$

が成り立つ。さらに Λ_k たちは順番の並べ替えを除いて一意的に定まる。

これを既約成分 Λ の canonical decomposition という。

2 つの既約成分 $\Lambda_1,\ \Lambda_2 \in \mathrm{Irr}(P(\Gamma))$ に対し、

$$\mathrm{ext}^1(\Lambda_1, \Lambda_2) := \min\left\{ \dim \mathrm{Ext}^1_{P(\Gamma)}(y_1, y_2) \mid (y_1, y_2) \in \Lambda^1 \times \Lambda^2 \right\}$$

とおく。このとき $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ の dence open subset Z が存在して、任意の $(y_1, y_2) \in Z$ に対し $\dim \mathrm{Ext}^1_{P(\Gamma)}(y_1, y_2) = \mathrm{ext}^1(\Lambda_1, \Lambda_2)$ が成り立つ。すなわち $\mathrm{ext}^1(\Lambda_1, \Lambda_2)$ は $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ の generic な点における Ext^1 の次元であるといってよい。このとき次が成り立つ。

Proposition 5.2.2 ([C2]). 与えられた既約成分 $\Lambda_k \in \mathrm{Irr}(P(\Gamma))$ $(1 \leq k \leq m)$ に対して、次は同値。
(a) $\overline{\Lambda_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda_m} \in \mathrm{Irr}(P(\Gamma))$.
(b) 任意の $k \neq l$ に対して $\mathrm{ext}^1(\Lambda_k, \Lambda_l) = 0$.

この 2 つの命題によって $\mathrm{Irr}(P(\Gamma))$ の全体像がおぼろげに見えてくる。つまり基本になるのは $\mathrm{ind}(\mathrm{Irr}(P(\Gamma)))$ であって、それらを ext^1 が 0 になるように足し上げていけば全体が尽くされるという仕組みになっている[35]。

したがって $\mathrm{ind}(\mathrm{Irr}(P(\Gamma)))$ を調べることに問題が還元されたことになるが、それでも一般の quiver に対してはほとんど手がつけられない問題である。

5.3 Λ_V の既約成分

前節で $\mathrm{Irr}(P(\Gamma))$ の既約成分について論じたが、この節ではさらに制約を加えて nilpotent variety $\Lambda_V = \mathrm{mod}^0(P(\Gamma), V)$ を詳しく調べることにする。ベキ零 (nilpotent) な表現だけを考えると、もちろん考える表現のクラスを狭めてしまうので $P(\Gamma)$ の表現全体を考える

[35] 「G_V-orbit の分類問題 = $P(\Gamma)$-modules の同型類の分類問題」の既約成分版と言ってよいだろう。

ことにならないというデメリットはあるもの、その分（6節と7節で詳しく説明するように）“crystal structre” と呼ばれる構造によって Λ_V の variety としての既約成分たちをコントロールすることができるようになる。

先走って言うと次のようなストーリーになっている。まず A,D,E の場合の Ringel-Hall algebra の話を思い出して頂きたい。この場合 path algebra $K[\Gamma]$ の indecomposable modules は対応する root 系の positive root の集合 Δ_+ でパラメトライズされていた。$\alpha \in \Delta_+$ に対応する indecomposable module を V_α と書くことにすれば、任意の $K[\Gamma]$-module V に対して同型

$$V \cong \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} V_\alpha^{\oplus c_\alpha}$$

が存在し、各 $c_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は一意的に定まる。したがって vector space としての $R\Omega$ の定義を $K[\Gamma]$-modules の言葉で言い直せば

$$R\Omega = \bigoplus_{c=(c_\alpha) \in Z_{\geq 0}^N} \mathbb{C}\left[\bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} V_\alpha^{\oplus c_\alpha}\right]$$

となる。（ただし $N = \sharp(\Delta_+)$。）一方 algebra としての $R\Omega$ は（indecomposable module たちではなく）simple module たち、V_{α_i} $(i \in I)$ で生成されていたことを思い出そう（Proposition 3.1.4 参照）[36]。つまり、algebra の生成系としては indecomposable module たちを全部知っている必要はなく、simple module たちさえ知っていればよいのである。

Λ_V の既約成分全体を考えた場合にも、実は同じことが起こる。つまり $P(\Gamma)$ の simple module に対応する既約成分たちから、全体がある意味で生成されてしまう。$P(\Gamma)$ の表現型は一般には wild だから、indecompozable なものを全てリストアップすることは不可能であるが、simple なものならば、それは quiver の頂点の個数分しかなく、構造もきわめて簡単である。もちろん simple なものから生成された既約成分たちが、nilpotent variety の既約成分全体に一致することは自明ではなく、この証明に “crystal structure” が本質的な役割を果たす[37]。詳しい話は 6 節以降に譲ることにして、以下では Γ が特別な場合に Λ_V の既約成分の具体型を見ていこう。

Remark． 5.2 節で述べた話は nilpotent variety に制限しても意味を持つことに注意されたい。そこで次のような問題を考えよう：

> V_k $(k = 1, 2)$ を I-graded vector space として、$\Lambda_i \in \mathrm{Irr}(\Lambda_{V_i})$ をとる。
> このとき $\overline{\Lambda_1 \oplus \Lambda_2} \subset \Lambda_{V_1 \oplus V_2}$ は、いつ $\Lambda_{V_1 \oplus V_2}$ の既約成分を与えるか？

この問題に対して Geiss-Leclerc-Schröer は、“dual semicanonical basis” を用いて 1 つの解答を与えた ([GLS1])。この点に関しては crystal structure の話をした後で、もう一度触れることにする（8 節参照）。

---

[36] 3.1 節では Γ の表現の category の言葉で書いているので、simple object は $\mathbf{F}_{i,\Omega}$ としていた。Γ の表現と $K[\Gamma]$-module の同一視の下に、両者は同じものを表している。

[37] Proposition 3.1.4 を証明するためには本当は indecomposable module たちを全部知っている必要がある。（その意味では上に述べたことにはウソがある。）しかし “crystal structure” の助けを借りると indecomposable module たちを全部知っている必要はなく、simple なものから全体が生成されることが証明できてしまう。

5.4 A,D,E の場合

この場合は $\Lambda_V = \mathrm{mod}(P(\Gamma), V))$ なので、nilpotency condition は自動的に満たされることに注意しよう。$\Gamma = (I, H)$ の orientation Ω' を任意に選んだとき、次の分解があることは明らかであろう。

$$X_V = E_{V,\Omega'} \oplus E_{V,\overline{\Omega}'}. \tag{5.4.1}$$

自然な射影 $X_V \twoheadrightarrow E_{V,\Omega'}$ を Λ_V に制限して得られる写像 $\pi_{\Omega'} : \Lambda_V \to E_{V,\Omega'}$ とする。このとき次が成り立つ。

Proposition 5.4.1 (Lusztig [L2]). $\Gamma = (I, \Omega)$ を A,D,E 型の quiver ととする。このとき任意に与えられた orientation Ω' に対して、次の 1 対 1 対応がある。

$$\mathrm{Irr}(\Lambda_V) \cong \left\{ \overline{\pi_{\Omega'}^{-1}(\mathcal{O}_{\Omega'})} \mid \mathcal{O}_{\Omega'} \text{ は } E_{V,\Omega'} \text{ の } G_V\text{-orbit} \right\}.$$

つまり $\Lambda \in \mathrm{Irr}(\Lambda_V)$ は、必ず $\overline{\pi_{\Omega'}^{-1}(\mathcal{O}_{\Omega'})}$ なる形をしており、しかも Ω' を決めれば $\mathcal{O}_{\Omega'}$ は一意的に定まる。もちろん最初に取った Ω と、任意に選んだ Ω' は一切関係はない。

集合としての記述という意味ではこれで十分なのだが、以下では $\pi_{\Omega'}^{-1}(\mathcal{O}_{\Omega'})$ がどんなものかをより幾何学的な立場から説明したい。例によって言葉の準備から始めよう。

X を manifold、$Y \subset X$ をその submanifold とする。このとき Y 上の vector bundle の完全列

$$0 \longrightarrow T^*_Y X \longrightarrow Y \times_X T^*X \longrightarrow T^*Y \longrightarrow 0 \tag{5.4.2}$$

によって定まる Y 上の vector bundle $T^*_Y X$ を Y の conormal bundle という。ここで T^*X (*resp.* T^*Y) は X (*resp.* Y) の cotangent bundle、$Y \times_X T^*X$ は Y と T^*X の X 上の fiber product と呼ばれる Y 上の vector bundle で、以下のように定まるものである: $y \in Y$ とすると、$Y \subset X$ だから $y \in X$ とも思える。そこで $y \in X$ における T^*X の fiber $T^*_y X$ を考えて、これを各 $y \in Y$ の上に乗せたものが $Y \times_X T^*X$ である。

$Y \subset X$ だから、各 $y \in Y (\subset X)$ に対して、接空間の自然な埋め込み $T_y Y \hookrightarrow T_y X$ が存在する。この dual を取ることで、自然な全射

$$T^*_y X \twoheadrightarrow T^* yY$$

が定まる。完全列 (5.4.2) の $Y \times_X T^*X \longrightarrow T^*Y$ は、このように定まる Y 上の vector bundle の全射である。conormal bundle $T^*_Y X$ は、この kernel として定まる。すなわち各 $y \in Y$ に対して、y 上の fiber が

$$\mathrm{Ker}(T^*_y X \twoheadrightarrow T^* yY)$$

であるような vector bundle が $T^*_Y X$ である。

X の次元を d_X、Y の次元を d_Y とすれば、各 $y \in Y$ に対する cotangent space $T^*_y X$ および $T^* yY$ の次元はそれぞれ $d_X,\ d_Y$ である。よって conormal bundle $T^*_Y X$ の $y \in Y$ における fiber の次元は

$$\dim \mathrm{Ker}(T^*_y X \twoheadrightarrow T^* yY) = d_X - d_Y$$

である。Y が d_Y 次元であったので、多様体としての $T^*_Y X$ の次元は

$$(d_X - d_Y) + d_Y = d_X,$$

つまり、$(\dim T^*X)/2 = \dim X$ に等しい。

我々の話に戻ろう。まず分解 (5.4.1) があったことを思いだそう。$E_{V,\overline{\Omega}}$ は自然に $(E_{V,\Omega'})^*$ と同一視することができるので、これにより X_V を $E_{V,\Omega'}$ の cotangent bundle $T^*E_{V,\Omega'}$ と同一視することができる：

$$X_V \cong T^*E_{V,\Omega'}.$$

より正確に言えば以下のようになる。一般に E を vector space とするとき $T^*E = E \oplus E^*$ 上には

$$\omega_0((x,\xi),(x',\xi')) := \xi(x') - \xi'(x) \quad ((x,\xi),\ (x',\xi') \in E \oplus E^*)$$

によって定まる非退化な skew symmetric bilinear form (symplectic form) が存在する。一方 X_V 上の bilinear form ω を

$$\omega(B,B') := \sum_{\tau \in H} \varepsilon(\tau)\mathrm{tr}(B_{\overline{\tau}}B_{\tau'})$$

とすると、ω は X_V 上の非退化な symplectic form を定める。そこで (X_V,ω) と $(T^*E_{V,\Omega'},\omega_0)$ を symplectic form 付きの vector space (symplectic vector space) として同一視する。

ここまでの議論では $X_V \cong E_{V,\Omega'} \oplus (E_{V,\Omega'})^*$ で十分であり、あえて cotangent bundle を持ち出す理由はないようにも思えるが、もちろんそれには意味がある。$\mathcal{O}_{\Omega'}$ を $E_{V,\Omega'}$ の G_V-orbit としよう。$\mathcal{O}_{\Omega'}$ は $E_{V,\Omega'}$ の submanifold ではないが、上にのべたのと同様な議論で、conormal bundle $T^*_{\mathcal{O}_{\Omega'}}E_{V,\Omega'}$ を考えることができる。このとき次がわかる。

Lemma 5.4.2 (Lusztig [L2]). Γ が A,D,E 型ならば、

$$\pi_{\Omega'}^{-1}(\mathcal{O}_{\Omega'}) = T^*_{\mathcal{O}_{\Omega'}}E_{V,\Omega'}.$$

つまり Γ が A,D,E 型ならば $\mathrm{Irr}(\Lambda_V)$ の各元は、orbit の conormal bundle の閉包 $\overline{T^*_{\mathcal{O}_{\Omega'}}E_{V,\Omega'}}$ なる形をしているわけである。各 $\overline{T^*_{\mathcal{O}_{\Omega'}}E_{V,\Omega'}}$ は、次元が $\dim E_{V,\Omega'} = (\dim X_V)/2$ なる既約な variety で、しかも G_V の作用で不変である。しかし単独の G_V-orbit ではなく、preprojective algbera $P(\Gamma)$ の表現の同型類と対応しているわけではない。

しかし $E_{V,\Omega'}$ の G_V-orbit $\mathcal{O}_{\Omega'}$ とは 1 対 1 に対応している (Proposition 5.4.1 参照)。したがって $\Gamma' = (I,\Omega')$ とするとき、path algebra $\mathbb{C}[\Gamma']$ の表現の同型類とも 1 対 1 に対応していることになる。さらに $\Gamma = (I,\Omega)$ を指定する orientation Ω と Ω' は無関係であることに注意されたい。いうなれば、各 $\Gamma' = (I,\Omega')$ たちの表現の同型類を、preprojective algebra $P(\Gamma)$ の nilpotent variety の既約成分 $\mathrm{Irr}(\Lambda_V)$ が “統括” しているわけで、この点は非常に面白い。

5.5 Kronecker quiver の場合

A,D,E 以外の例として Kronecker quiver $\Gamma = (I, \Omega)$ の場合を見てみよう。ただし quiver に関する記号は Example 2.2.6 と同じものを用いることとする。一般化してしまうと話がややこしくなってしまうので Example 2.2.6 の場合と同様に $\underline{\dim} V = (1,1)$ の場合に限ることにする。

まず

$$\begin{aligned} X_V &= E_{V,\Omega} \oplus E_{V,\overline{\Omega}} \\ &\cong (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \oplus (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \end{aligned}$$

に注意する。したがって $B = (B_{\tau_1}, B_{\tau_2}, B_{\overline{\tau}_1}, B_{\overline{\tau}_2}) \in X_V$ の各成分は全て $\mathbb{C}$ の元と思ってよい。簡単な計算から

$$\Lambda_V \cong \big(\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \{0\} \times \{0\}\big) \cup \big(\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}\big) \tag{5.5.1}$$

となることがわかり、これが Λ_V の既約分解を与える。同一視 $X_V \cong T^*E_{V,\Omega}$ の下に

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \{0\} \times \{0\} \cong T^*_{E_{V,\Omega}} E_{V,\Omega}$$

となる。つまり (5.5.1) の右辺の第 1 項は $T^*E_{V,\Omega}$ の zero-section である。

一方第 2 項の方は、$E_{V,\Omega}$ の 1 点 $\{(0,0)\}$ の conormal bundle になっている：

$$\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \cong T^*_{\{(0,0)\}} E_{V,\Omega}.$$

この場合、A,D,E 型の場合のような Λ_V の既約成分と $E_{V,\Omega}$ の G_V-orbit との 1 対 1 対応はないが、実はある種の対応関係がある。まず $E_{V,\Omega}$ は $[a_1; a_2] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ でパラメトライズされる G_V-orbit たち (以下これを $\mathcal{O}_{[a_1;a_2]}$ と書く) と、1 点 $\{(0,0)\}$ からなる G_V-orbit (以下これを $\mathcal{O}_0$ と書く) わかれてることに注意する (Example 2.2.6 参照):

$$E_{V,\Omega} = \left(\bigcup_{[a_1;a_2] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \mathcal{O}_{[a_1;a_2]} \right) \cup \mathcal{O}_0.$$

右辺の第 1 項をまとめて S と書くことにすれば、S は dimension vector が $(1,1)$ であるような Γ の indecompozable な表現を “すべて束ねて” できる、G_V-不変な $E_{V,\Omega}$ の部分集合である。このとき

$$T^*_{E_{V,\Omega}} E_{V,\Omega} = \overline{T^*_S E_{V,\Omega}}, \quad T^*_{\{(0,0)\}} E_{V,\Omega} = T^*_{\mathcal{O}_0} E_{V,\Omega} = \overline{T^*_{\mathcal{O}_0} E_{V,\Omega}}$$

となる。

上記の S の意味についてもう少し考えてみることにしよう。以下、いくつか未定義用語が出てくるが、詳しい定義等は有限次元代数の表現論の教科書[38]を参照して頂きたい。

Kronecker quiver $\Gamma = (I, \Omega)$ の Auslander-Reiten quiver を $\Gamma_{\mathbb{C}[\Gamma]}$ と書く。このとき $\Gamma_{\mathbb{C}[\Gamma]}$ の中には regular components と呼ばれる connected components があることが知ら

[38] 例えば [R1] など。

れている。１つ１つの regular component は A_∞ 型 quiver と同型になっており（これを homogenious tube と呼ぶ）、全体として $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$-family をなしている。$[a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に対応する homogenious tube の一番端に現れる頂点に対応する Γ の表現の同型類（このような表現を quasi-simple moudule と言うことがある）には、上に述べた $\mathcal{O}_{[a_1:a_2]}$ が対応する。したがって S は homogenious tube の一番端に現れる quasi-simple moudule たちを全部集めてきたもの、ということができる。

今までの話は $\underline{\dim} V = (1,1)$ とした場合の話だったが、より一般の dimension vector を持つ表現の場合も同様である。すなわち $\Lambda \in \mathrm{Irr}(\Lambda_V)$ に対して、Y なる G_V-不変な $E_{V,\Omega}$ の部分集合が存在して $\Lambda = \overline{T^*_Y E_{V,\Omega}}$ の形に書ける。さらにこの Y は、一般には単独の G_V-orbit ではなく、homogenious tube の頂点に現れる表現の同型類たち（$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$-family）を束ねたようなものと、preprojective component もしくは preinjective component の頂点に対応する単独の G_V-orbit の合併集合になっている[39]。

6 Crystals

$\Gamma = (I, H)$ を一般の double quiver とする。ただし「一般」といっても、finiteness condition と no-loop condition は仮定していることに注意されたい。

このような仮定の下に orientation$\Omega \subset H$ を１つ fix して quiver $\Gamma = (I, \Omega)$ を考え、さらに preprojective algebra $P(\Gamma)$ の nilpotent variety Λ_V を考える。この節では Λ_V の既約成分 $\mathrm{Irr}(\Lambda_V)$ の構造を調べる道具として、crytsal の概念を導入する。既約成分と crystal の具体的な対応については次節（７節）に譲ることにして、今節では基本的な用語の説明をする。

6.1 Kac-Moody Lie algebra

一般的なセッティングで話を始める。詳しくは [Kac], [谷崎] 等の Kac-Moody Lie algebra の教科書を参照されたい。

Definition 6.1.1. I を有限集合とし、整数係数の $\sharp I \times \sharp I$-行列 $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ が以下の条件を満たすとき、一般化 Cartan 行列という。
(1) $a_{ii} = 2$ for all $i \in I$.
(2) $a_{ij} \geq 0$ if $i \neq j$.
(3) $a_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_{ji} = 0$.
特に正整数係数の対角行列 $D = \mathrm{diag}(m_i \mid i \in I)$ が存在して、DA が対称行列となるとき、A は対称化可能（symmetrizable）であるという。

以下、特に断らない限り A は symmetrizable であると仮定する。

与えられた A に対して、抽象的に次元が $(2\sharp I - \mathrm{rank} A)$ の $\mathbb{C}$-vector space $\mathfrak{h}$ を考える。

[39] 少なくとも $\tilde{A}_n$ 型の場合には同様の記述が知られている。それ以外でも表現型が tame であれば、同様の話があってもおかしくはないと思うが、$\tilde{D}_n$, $\tilde{E}_n$ 等の場合に完全に書き下したものがあるかどうかは知らない。それ以外の一般の場合になってしまうと、そもそも $\Gamma = (I, \Omega)$ の表現型が wild になってしまうので、Auslander-Reiten quiver の構造自体よくわからない。

Definition 6.1.2. $\mathfrak{h}$ の一次独立な部分集合 $\Pi^\vee = \{h_i \mid i \in I\}$ と、$\mathfrak{h}$ の dual space $\mathfrak{h}^*$ の一次独立な部分集合 $\Pi = \{\alpha_i \mid i \in I\}$ が条件：

$$\alpha_j(h_i) = a_{ij} \text{ for any } i, j \in I$$

を満たすとき、3 つ組 $\Phi = (\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ を一般化 Catran 行列 A の実現という。

実現 $\Phi = (\mathfrak{h}, \{\alpha_i\}_{i\in I}, \{h_i\}_{i\in I})$ は同型を除いて一意的に定まることが知られている。ただし 2 つの実現 $(\mathfrak{h}, \{\alpha_i\}_{i\in I}, \{h_i\}_{i\in I})$, $(\mathfrak{h}', \{\alpha_i'\}_{i\in I}, \{h_i'\}_{i\in I})$ が同型であるとは、vector space としての同型写像 $\phi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}'$ であって、$\phi^*(\{\alpha_i'\}) = \{\alpha_i\}$ かつ $\phi(\{h_i\}) = \{h_i'\}$ を満たすものが存在することをいう。

Definition 6.1.3. $A = (a_{ij})$ を一般化 Cartan 行列、$\Phi = (\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ をその実現とする。このとき $e_i,\ f_i\ (i \in I),\ h \in \mathfrak{h}$ を生成元とし、以下の基本関係式 (1) $\sim$ (6) で定まる $\mathbb{C}$ 上の Lie algebra を A に付随する (symmetrizable) Kac-Moody Lie algebra と呼び、$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ と書く。

(1) $[h, h'] = 0$ for $h,\ h' \in \mathfrak{h}$,

(2) $[h, e_i] = \alpha_i(h)e_i$ for $i \in I$ and $h \in \mathfrak{h}$,

(3) $[h, f_i] = -\alpha_i(h)f_i$ for $i \in I$ and $h \in \mathfrak{h}$,

(4) $[e_i, f_j] = \delta_{ij}h_i$ for $i, j \in I$,

(5) $\mathrm{ad}(e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) = 0$ for $i, j \in I$ with $i \neq j$,

(6) $\mathrm{ad}(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j) = 0$ for $i, j \in I$ with $i \neq j$.

ここで $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}(X)$ とは、$Y \mapsto [X, Y]$ $(Y \in \mathfrak{g})$ によって定まる $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ の元を表す。

Remark . (1) A が有限型の Cartan 行列 (A$\sim$G 型) ならば、対応する Kac-Moody Lie algebra $\mathfrak{g}(A)$ は有限次元 simple Lie algebra と同型である。さらに $\mathfrak{g}(A)$ が有限次元であることと A が有限型の Cartan 行列であることは同値であることが知られている。
(2) 対称化可能とは限らない一般化 Cartan 行列に対しても Kac-Moody Lie algbera は定義できるが、上記のような生成元と基本関係式による表示は知られていない。

e_i たちで生成される Lie subalgebra を $\mathfrak{n}_+$、f_i たちで生成される Lie subalgebra を $\mathfrak{n}_-$ と書く。このとき三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ が成立することが知られている。A,D,E の場合 (3.3 節) と同様に、$\mathfrak{n}_-$ を下三角 Lie subalgebra と呼ぶ。
普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ に対しても、$\mathfrak{g}$ の三角分解が誘導する分解、

$$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}_-) \otimes U(\mathfrak{h}) \otimes U(\mathfrak{n}_+) \tag{6.1.1}$$

が存在し、こちらも三角分解と呼ばれる。

• 我々の場合

今まで述べてきた一般論を適用して、quiver に付随する Kac-Moody Lie algebra を導入しよう。一般の double quiver $\Gamma = (I, H)$ に対し、以下のような $\sharp I \times \sharp I$-行列 $A(\Gamma) = (a_{ij})_{i,j\in I}$ を考える：

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{if } i = j, \\ -\sharp\{\tau \in H \mid \mathrm{out}(\tau) = i,\ \mathrm{in}(\tau) = j\}, & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

いま考えているのは double quiver なので、$i \neq j$ のとき、

$$\sharp\{\tau \in H \mid \mathrm{out}(\tau) = i,\ \mathrm{in}(\tau) = j\} = \sharp\{\tau \in H \mid \mathrm{in}(\tau) = i,\ \mathrm{out}(\tau) = j\}$$

であり、したがって

$$a_{ij} = a_{ji}$$

である。すなわち $A(\Gamma)$ は対称行列である。また一般化 Cartan 行列の公理を満たすことも容易に確かめられる。この $A(\Gamma)$ を $\Gamma = (I, H)$ に付随する一般化 Catran 行列と呼ぶ。

Definition 6.1.4. $A(\Gamma)$ に付随する Kac-Moody Lie algbera $\mathfrak{g}(\Gamma) = \mathfrak{g}(A(\Gamma))$ を double quiver $\Gamma = (I, H)$ に付随する Kac-Moody Lie algbera と呼ぶ。

与えられた一般化 Cartan 行列 A が対称行列であるとき、$\mathfrak{g}(A)$ を symmetric Kac-Moody Lie algebra と呼ぶ。今の場合 $A(\Gamma)$ は常に対称行列であるので、$\mathfrak{g}(\Gamma)$ は symmetric Kac-Moody Lie algebra である。逆に抽象的に与えられた対称な一般化 Cartan 行列 $A = (a_{ij})$ に対して、添字集合 I を頂点集合と見なし、$i \in I$ から $j \in I$ へ、$j \in I$ から $i \in I$ へ、それぞれ a_{ij} 本づつの矢印を書くことにすれば、double quiver Γ が得られる。さらに $\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{g}(\Gamma)$ が成り立つことも容易にわかる。したがって、一般の double quiver に付随する Kac-Moody Lie algebra を考えるということと、一般の symmetric Kac-Moody Lie algebra を考えることは同値である。

6.2 一般の量子群の定義

前節では対称化可能な一般化 Cartan 行列 A に対して、Kac-Moody Lie algbera $\mathfrak{g}(A)$ を定義したが、この節ではさらに $\mathfrak{g}(A)$ に付随する量子包絡環 (量子群) $U_v(\mathfrak{g}(A))$ を導入したい。そのためには、もう少し extra なデータを固定する必要がある。

前節で述べたように $\mathfrak{h}$ には一次独立な部分集合 $\Pi^\vee = \{h_i \mid i \in I\}$ が定められていた。もし A が正則行列ならば $\mathrm{rank}A = \sharp I$ であり、したがって $\dim \mathfrak{h} = \sharp I$ である。ゆえに $\Pi^\vee$ は $\mathfrak{h}$ の基底になっている[40]が、一般には元の個数が足りない。

そこで rank が $\dim \mathfrak{h} = (2\sharp I - \mathrm{rank}A)$ の free $\mathbb{Z}$-module $P^\vee(\subset \mathfrak{h})$ を考え、その $\mathbb{Z}$-basis を $\{h_i \mid i \in I\} \cup \{\gamma_s \mid 1 \leq s \leq \sharp I - \mathrm{rank}A\}$ とする：

$$P^\vee := \left(\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}h_i\right) \oplus \left(\bigoplus_{s=1}^{\sharp I - \mathrm{rank}A} \mathbb{Z}\gamma_s\right).$$

[40]例えば A が有限型ならば $\Pi^\vee$ は $\mathfrak{h}$ の基底の基底である。

ただし、付け加えた γ_s $(1 \leq s \leq \sharp I - \mathrm{rank}A)$ は

$$\alpha_i(\gamma_s) = 0 \text{ or } 1 \text{ for } i, j \in I \text{ and } 1 \leq s \leq (\sharp I - \mathrm{rank}A)$$

を満たすようにとる。このとき定義から

$$\mathfrak{h} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} P^\vee$$

は明らかである。また

$$P := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(P^\vee) \subset \mathbb{Z}\}.$$

とおく。このとき $P^\vee$ を dual weight lattice, P を weight lattice という。また $\Pi^\vee := \{h_i \mid i \in I\}$ とし、$\Pi^\vee$ の元を simple coroot と呼ぶ。

Definition 6.2.1. 5 つ組 $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$ を Cartan datum と呼ぶ。

Remark . Cartam datum $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$ が与えられたとき、$\mathfrak{h} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} P^\vee$ とおけば、3 つ組 $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ は一般化 Cartan 行列 A の実現を与え、しかもその実現は (上に述べた意味で) 同型を除き一意的に定まる。したがって対応する Kac-Moody Lie algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ も一意的に定まる。

一方、一般化 Cartan 行列 A の実現 $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ が与えられた場合、それに付随する Cartan datum $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$ は必ずしも一意的に定まるわけではない。実際 γ_s $(1 \leq s \leq \sharp I - \mathrm{rank}A)$ の選び方には不定性があり、ここで言っているのは「何でもいいから一つ固定せよ」ということのみである。この後すぐに Cartan datum をもとにして一般の量子包絡環 (量子群) を導入するが、量子包絡環の定義自身は Cartam datum の選び方の不定性に依らずに (つまり γ_s たちの選び方に依らずに) 定まるので、問題はない。

Definition 6.2.2. 与えられた Cartan datum $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$ に対し、付随する量子包絡環 $U_v = U_v(\mathfrak{g})$ とは、$e_i,\ f_i$ $(i \in I)$ および v^h $(h \in P^\vee)$ を生成元とし[41]、以下の基本関係式 (1)∼(6) で定義される、単位元を持つ $\mathbb{Q}(v)$ 上の associateive algebra である。

(1) $v^0 = 1, \quad v^h v^{h'} = v^{h+h'}$ for $h,\ h' \in P^\vee$,

(2) $v^h e_i v^{-h} = v^{\alpha_i(h)} e_i$ for $i \in I$ and $h \in P^\vee$,

(3) $v^h f_i v^{-h} = v^{-\alpha_i(h)} f_i$ for $i \in I$ and $h \in P^\vee$,

(4) $e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij} \frac{t_i - t_i^{-1}}{v_i - v_i^{-1}}$ for $i, j \in I$,

(5) $\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} e_i^{(1-a_{ij}-k)} e_j e_i^{(k)} = 0$ for $i, j \in I$ with $i \neq j$,

(6) $\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} f_i^{(1-a_{ij}-k)} f_j f_i^{(k)} = 0$ for $i, j \in I$ with $i \neq j$.

ただし $v_i = v^{m_i}$, $t_i = v^{m_i h_i}$. また $[l]_i = v_i^l - v_i^{-l}$, $[k]_i! = \prod_{l=1}^k [l]_i$ として、$e_i^{(k)} = e_i^k / [k]_i!$. $f_i^{(k)}$ も同様。

[41] 生成元の中で v^h と書いているのは単なる symbol であって、「不定元 v の h 乗」という意味ではない。

量子包絡環 $U_v(\mathfrak{g})$ は "$v \to 1$" なる極限[42]で $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ と一致することが知られている。すなわち $U_v(\mathfrak{g})$ は $U(\mathfrak{g})$ の v-analogue である。

f_i たちで生成される subalgebra を $U_v^- = U_v(\mathfrak{n}_-)$ と書く。これは Definition 6.2.2 の (6) を基本関係式とする algebra で、下三角部分代数とも呼ばれる。U_v^- は今後の主要登場人物の一人である。

また e_i たちで生成される subalgebra を $U_v^+ = U_v(\mathfrak{n}_+)$, v^h たちで生成される subalgebra を U_v^0 と書く。このとき、分解

$$U_v = U_v^- \otimes U_v^0 \otimes U_v^+ \tag{6.2.1}$$

が成り立つ。これは $U(\mathfrak{g})$ の三角分解 (6.1.1) の v-analogue である。

• 我々の場合

前節の Kac-Moody Lie algebra の場合と同様に、一般の double quiver $\Gamma = (I, H)$ から出発して対応する量子包絡環 $U_v(\mathfrak{g}(\Gamma))$ を考えることができる。これを Γ に付随する量子包絡環と呼ぶことにしよう。

6.3 $v = 0$ における基底

量子包絡環 $U_v(\mathfrak{g})$ は可解格子模型という、理論物理のモデルを解くために１９８０年代半ばごろ Drinfeld と神保によって独立に導入された概念である。その後１９９０年代になって、柏原により crystal base の概念が導入された。一言で言えば crystal base とは $U_v(\mathfrak{g})$-module の、$v \to 0$ における基底である。Drinfeld-神保によるオリジナルの問題意識では不定元 v は温度のパラメータであり、$v \to 0$ の極限をとるということは絶対零度の状態を考えることに対応する[43]。

しかしながら、今回のノートではこのような "物理的な背景" は全て無視して、純粋に数学的な概念として crystal base の概念を導入したい。その場合問題になるのが、「$v \to 0$ の極限」の意味である。我々が考えている量子包絡環 $U_v(\mathfrak{g})$ は $\mathbb{Q}(v)$ 上の associative algebra であるので、係数体の中に例えば v^{-1} も含まれている。もちろん

$$\lim_{v \to 0} v^{-1} = \infty$$

であるから、安直に極限をとることはできない。この問題を解決するために、この節では "$v = 0$ における基底" なる概念を導入する。

$\mathcal{A}$ を $q = 0$ で regular な $\mathbb{Q}(v)$ の元全体のなす subring とする。このとき $\mathcal{A}$ は local ring で、$v\mathcal{A}$ がその極大 ideal である。また $\mathcal{A}/v\mathcal{A} \cong \mathbb{Q}$ であることに注意する。

---

[42]安直に「$v = 1$ を代入したもの」というわけではない。例えば Definition 6.2.2 の (4) は $v = 1$ を代入すると右辺の分母が 0 になってしまい、意味をなさない。しかし「うまい極限の取り方」をすると、Definition 6.2.2 の (1)∼(6) の各式は、丁度 Definition 6.1.3 の (1)∼(6) を復活させるようになっている。

[43]素人考えでは、絶対零度の世界ではものはカチカチに固まってしまいそうな気がする。筆者の聞くところによれば、"crystal" という名前の由来もここにあるらしい。ただし物理学者に言わせると、$v \to 0$ の極限をとることは必ずしも絶対零度の状態を考えることにはならないらしく、その意味では「いい加減な言葉の使い方」なのだそうである。

Definition 6.3.1. V を $\mathbb{Q}(v)$ 上の vector space とする。組 (L, B) が以下の条件を満たすとき、(L, B) を V の $v = 0$ における基底と呼ぶ。
(1) L は $L \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{Q}(v) \cong V$ を満たす V の free $\mathcal{A}$-submodule。
(2) B は $\mathbb{Q}$-vecotr space $L/vL \cong (\mathcal{A}/v\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} L$ の $\mathbb{Q}$-基底。

6.4 $U_v(\mathfrak{g})$ の表現論

我々が本当に必要なのは下三角部分代数 U_v^- の crystal base なのだが、いきなり定義を与えても意味がわかりづらいことと思う。そこで今回は、次節 (6.5 節) でより基本的な U_v-module の crystal base について説明し、続いて 6.6 節で U_v^- の crystal base の定義を与えるという順序をとることにする。そのための準備として本節では $U_v(\mathfrak{g})$ の表現論について知られていることを簡単に紹介する。ただし紙数の都合もあり詳しく述べることはできないので、以下に紹介するのはあくまでも概略である。詳しくは [HK] 等を参照されたい。

$U_v^{\geq 0}$ を $e_i,\ v^h\ (i \in I,\ h \in P^\vee)$ で生成される U_v の subalgebra とする。$\lambda \in P$ に対して $U_v^{\geq 0}$ の 1 次元表現 $\mathbb{Q}(v)\mathbf{1}_\lambda$ を以下のように定める：

$$e_i \mathbf{1}_\lambda = 0 \quad \text{for } i \in I, \qquad v^h \mathbf{1}_\lambda = v^{\lambda(h)} \mathbf{1}_\lambda \quad \text{for } h \in P^\vee.$$

この 1 次元表現 $\mathbb{Q}(v)1_\lambda$ から誘導される U_v-module

$$M(\lambda) := U_v \underset{U_v^{\geq 0}}{\otimes} \mathbb{Q}(v)\mathbf{1}_\lambda$$

を (highset weight λ の) Verma module という。Verma module は U_v の表現論において最も基本的な対象の一つである。以下にその性質を列挙しよう。

一般に U_v-module V および $\mu \in P$ に対して、

$$V_\mu := \{u \in V \mid v^h u = v^{\mu(h)} u \text{ for any } h \in P^\vee\}$$

を V の weight μ の weight space と呼び、

$$\mathrm{wt}(V) := \{\mu \in P \mid V_\mu \neq \{0\}\}$$

を V の weight の集合と呼ぶ。また任意の $\mu \in \mathrm{wt}(V)$ に対して $\dim V_\mu < \infty$ で、かつ分解

$$V = \underset{\mu \in P}{\oplus} V_\mu$$

が成り立つとき、V を weight module と呼ぶ。

U_v の三角分解 (6.2.1) により、vector space としては $M(\lambda)$ は U_v^- と同型で、しかも weight module である。さらに $\mathrm{wt}(M(\lambda)) = \lambda + Q^-$ が成り立つ。ここに $Q^- = \oplus_{i \in I} \mathbb{Z}_{\leq 0} \alpha_i$ である。

Verma module の性質のうちで最も著しいのは次のものであろう。

Proposition 6.4.1. (1) $M(\lambda)$ は $u_\lambda := 1 \otimes \mathbf{1}_\lambda$ から生成され、任意の元は $f_{i_1} \cdots f_{i_l} u_\lambda$ たちの 1 次結合で書ける。
(2) $M(\lambda)$ は unique proper maximal submodule J_λ を持つ。
(3) $V(\lambda) := M(\lambda)/J_\lambda$ とおく。定義から $V(\lambda)$ は既約 U_v-module であるが、特に

$$\lambda \in P_+ := \{\lambda \in P \mid \lambda(h_i) \geq 0 \text{ for any } i \in I\}$$

である場合には、

$$J_\lambda = \sum_{i \in I} U_v f_i^{\lambda(h_i)+1} u_\lambda$$

が成り立つ。すなわち $\lambda \in P_+$ ならば、$e_i,\ f_i$ は $V(\lambda)$ に locally nilpotent に作用する。

自然な射影 $M(\lambda) \to V(\lambda)$ による $u_\lambda \in M(\lambda)$ の image を同じ記号 u_λ で書くことにすれば、$V(\lambda)$ の任意の元も $f_{i_1} \cdots f_{i_l} u_\lambda$ たちの 1 次結合で書けることは明らかであろう。

一般に U_v-module V が次の 3 条件を満たすとき、integrable であるという：

(a) V は weight module である。

(b) 任意の $\in I$ に対して $e_i,\ f_i$ は locally nilpotent に作用する。

(c) 有限個の $\lambda_1, \cdots, \lambda_N \in P$ が存在して

$$\mathrm{wt}(V) \subset D(\lambda_1) \cup \cdots \cup D(\lambda_N).$$

ただし、$D(\lambda) = \lambda + Q_-$.

定義から、$\lambda \in P_+$ のとき $V(\lambda)$ が既約 integrable module であることはすぐにわかるが、より強く次が成り立つ。

Theorem 6.4.2. V を既約な integrable module とすると、$\lambda \in P_+$ が存在して $V \cong V(\lambda)$ となる。さらに integrable module 全体のなす category を $\mathcal{O}_{int}$ と書けば、$\mathcal{O}_{int}$ は semisimple category で、$\{V(\lambda) \mid \lambda \in P_+\}$ が simple objects の完全代表系を与える。

6.5 Integrable $U_v(\mathfrak{g})$-module の crystal base

前節の最後に述べた定理によって、$V(\lambda)$ $(\lambda \in P_+)$ の構造がわかれば integrable module の構造はわかったことになるわけだが、そもそも何をもって “構造がわかる” というのか？というのは自然な疑問であろう。その答えはいろいろあり得ると思うが、以下に述べる crystal base の概念は、その一つを与えることになる。

もう少し具体的に説明しよう。U_v は $e_i,\ f_i,\ v^h$ で生成されていたので、これらの元の作用がわかれば「module V の構造がわかった」といってよいであろう。「作用がわかる」とはどういう意味か？というと、これも答え方はいろいろあると思うが、ここでは V のうまい基底が存在して、その基底に関して生成元たちを行列表示したとき、その行列ができるだけ簡単な形をしている、という意味とする。

今我々が考えている module V は integrable module なので、特に weight module でもある。したがって V は weight space の直和に分解する (これを weight space decomposition という) が、言い方を換えればこれは v^h たちの作用を同時対角化していることを意味する。つまり weight space decomposition がわかれば、v^h たちの作用は完全にわかったことになる。特に $V = V(\lambda)$ のときは weight space decomposition に関する公式が知られている[44]。

したがって問題は e_i および f_i たちの作用、ということになる。v を不定元と思っているとこれらの作用は非常に複雑で簡単に書き下すことは出来ないが、実は $v \to 0$ の極限をとると問題が組み合わせ論に還元されてしまって、記述が可能になる。それが crystal base と呼ばれるものである。

「$v \to 0$ の極限をとる」という意味については、すでに 6.3 節で説明した。この極限操作と e_i および f_i たちの作用は実はあまり相性がよくないので、少し modify する必要がある。例によって準備から始めよう。

Lemma 6.5.1. $V = \oplus_{\mu \in P} V_\mu$ を integrable module、$u \in V_\mu$ とする。このとき任意の $i \in I$ に対して

$$u = u_0 + f_i u_1 + \cdots + f_i^{(N)} u_N$$

を満たす $u_k \in V_{\lambda + k\alpha_i} \cap \ker e_i \ (0 \leq k \leq N)$ が一意的に存在する。ここに $f_i^{(k)} = f_i^k / [k]_i!$ である。

Definition 6.5.2. Kashiwara operators $\tilde{e}_i,\ \tilde{f}_i \in \mathrm{End}(V)$ を

$$\tilde{e}_i u := \sum_{k=1}^{N} f_i^{(k-1)} u_k, \quad \tilde{f}_i u := \sum_{k=0}^{N} f_i^{(k+1)} u_k$$

で定める。

これで crystal base の定義をするための準備が整った。

Definition 6.5.3. $V \in \mathcal{O}_{int}$ とする。組 $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ が以下の条件を満たすとき V の crystal base であるという。

(1) $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ は V の $v = 0$ における基底である。

(2) $\mathcal{L}_\lambda := \mathcal{L} \cap V_\lambda \ (\lambda \in P)$ とするとき、$\mathcal{L} = \oplus_{\lambda \in P} \mathcal{L}_\lambda$ が成り立つ。

(3) $\mathcal{B}_\lambda := \mathcal{B} \cap (\mathcal{L}_\lambda / v\mathcal{L}_\lambda)$ とするとき、$\mathcal{B} = \sqcup_{\lambda \in P} \mathcal{B}_\lambda$ が成り立つ。

(4) 任意の $i \in I$ 対し、$\tilde{e}_i \mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ かつ $\tilde{f}_i \mathcal{L} \subset \mathcal{L}$. このとき $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i : \mathcal{L}/v\mathcal{L} \to \mathcal{L}/v\mathcal{L}$ であるが、さらに $\tilde{e}_i \mathcal{B} \subset \mathcal{B} \sqcup \{0\}$ かつ $\tilde{f}_i \mathcal{B} \subset \mathcal{B} \sqcup \{0\}$ が成り立つ。

(5) $b.b' \in \mathcal{B},\ i \in I$ に対して、$b' = \tilde{f}_i b \ \Leftrightarrow b = \tilde{e}_i b'$.

[44] Weyl-Kac character formula と呼ばれているものが、それにあたる。

このような基底が存在すれば、この節の始めに述べた「U_v の作用がわかる基底」になっていることに注意しよう。実際、$\mathcal{B}$ は weight 分解 $\mathcal{B} = \sqcup_{\lambda \in P} \mathcal{B}_\lambda$ を持っているので、v^h たちの作用はこの基底で対角化されている。また (4) および (5) より、$\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ の作用を "行列表示" すれば[45]各行各列に 1 が高々 1 つしかなく、他は全て 0 であるような行列になっていることがわかる。しかも (5) によって、$\tilde{e}_i$ と $\tilde{f}_i$ はほぼ逆になっている。

次に述べる定理は crystal base の存在と一意性を保証する、基本定理というべきものである。

Theorem 6.5.4 (Kasihira). (1) $V \in \mathcal{O}_{int}$ は常に crystal base を持ち、同型を除いて一意的である[46]。
(2) 特に $V = V(\lambda)$ の場合、

$$L(\lambda) := \sum \mathcal{A} \tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_l} u_\lambda, \quad B(\lambda) := \{ \tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_l} u_\lambda \bmod vL(\lambda) \} \setminus \{0\}$$

とおくと、$(L(\lambda), B(\lambda))$ は $V(\lambda)$ の crystal base である。

crystal base の global な構造を見るには crystal graph の概念が便利である。$\mathcal{B}$ を頂点集合として、$\mathcal{B}$ 上に I-colored arrow を以下のルールで書き込む：

$$b \xrightarrow{i} b' \quad \Longleftrightarrow \quad b' = \tilde{f}_i b \quad (i \in I).$$

こうしてできる oriented I-colored graph を V の crystal graph と呼ぶ。

以上のようにして、inegrable module V の構造解析が crystal graph という、いわば "お絵描き" に帰着されてしまうわけである。とはいえ実際に crystal graph を書き下すのはそんなに簡単なことではない。いうまでもなく基本になるのは既約 integrable module $V(\lambda)$ の場合であるが、この場合ですら crystal graph を書き下すことは一般には出来ない[47]。詳しく分かっているのは $\mathfrak{g}$ が有限型、もしくは affine 型の場合で、その場合には種々のケースに応じて crystal graph の組合せ論的実現が知られている[48]。

6.6 U_v^- の crystal base

この節では 7 節以降の主題となる、U_v^- の crystal base を定式化したい。基本的なアイデアは integrable module の場合と同じであるが、異なる点は「U_v^- は e_i の作用で閉じていない」ということである。したがって Kashiwara operators を考えようとしても、前節のように $e_i,\ f_i$ の作用を modify することでは定義できず、少々工夫が必要となる。Kashiwara operators を定義するための key になるのは次の Lemma である。

---

[45] $v \to 0$ の極限での話なので正確な言い方ではないが、主旨は伝わることと思う。
[46] 話が長くなりすぎるので、「crystal base が同型であること」の定義はあえて省略した。詳しくは [HK] 等を参照のこと。
[47] $\mathfrak{g}$ が有限型でないと、$V(\lambda)$ は無限次元になる。その場合 crystal graph は無限個の頂点を持つことになり、全体を把握するのは格段に難しくなる。
[48] この辺の事情は [HK] に詳しい解説がある。

Lemma 6.6.1. 任意の $X \in U_v^-$ に対して、$X_1, X_2 \in U_v^-$ が一意的に存在して

$$[e_i, X] = \frac{t_i X_1 - t_i^{-1} X_2}{v_i - v_i^{-1}}$$

を満たす。

この Lemma により、$e_i' \in \mathrm{End}(U_v^-)$ を

$$e_i'(X) := X_2$$

によって定める。このとき次が成り立つ。

Lemma 6.6.2.

$$U_v^- = \bigoplus_{k \geq 0} f_i^{(k)} \ker\, e_i'.$$

そこで Kashiwara operators $\tilde{e}_i,\ \tilde{f}_i \in \mathrm{End}(U_v^-)$ を次のように定める。

Definition 6.6.3.

$$\tilde{e}_i(f_i^{(k)} u) := \begin{cases} f_i^{(k-1)} u, & k \geq 1, \\ 0, & k = 0, \end{cases} \qquad \tilde{f}_i(f_i^{(k)} u) := f_i^{(k+1)} u \quad \text{for } u \in \ker\, e_i'.$$

$\lambda \in P$ に対して、$(U_v^-)_\lambda := \{X \in U_v^- \mid v^h X v^{-h} = v^{\lambda(h)} X \text{ for } h \in P^\vee\}$ とおく。これで U_v^- の crystal base を定義するための準備が整った。

Definition 6.6.4. 組 $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ が以下の条件を満たすとき U_v^- の crystal base であるという。

(1) $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ は U_v^- の $v = 0$ における基底である。

(2) $\mathcal{L}_\lambda := \mathcal{L} \cap (U_v^-)_\lambda$ $(\lambda \in P)$ とするとき、$\mathcal{L} = \oplus_{\lambda \in P} \mathcal{L}_\lambda$ が成り立つ。

(3) $\mathcal{B}_\lambda := \mathcal{B} \cap (\mathcal{L}_\lambda / v\mathcal{L}_\lambda)$ とするとき、$\mathcal{B} = \sqcup_{\lambda \in P} \mathcal{B}_\lambda$ が成り立つ。

(4) 任意の $i \in I$ 対し、$\tilde{e}_i \mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ かつ $\tilde{f}_i \mathcal{L} \subset \mathcal{L}$. このとき $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i : \mathcal{L}/v\mathcal{L} \to \mathcal{L}/v\mathcal{L}$ であるが、さらに $\tilde{e}_i \mathcal{B} \subset \mathcal{B} \sqcup \{0\}$ かつ $\tilde{f}_i \mathcal{B} \subset \mathcal{B}$ が成り立つ。

(5) $b, b' \in \mathcal{B},\ i \in I$ に対して、$b' = \tilde{f}_i b \ \Leftrightarrow b = \tilde{e}_i b'$.

Theorem 6.6.5 (Kasiwara).

$$L(\infty) := \sum \mathcal{A} \tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_l} 1, \quad B(\infty) := \{\tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_l} 1 \bmod vL(\infty)\}$$

とおくと、$(L(\infty), B(\infty))$ は U_v^- の crystal base である。

今後 $1 \bmod vL(\infty) \in B(\infty)$ を b_∞ と書くことにする。前節の場合と同様に $B(\infty)$ の crystal graph を考えることができるが、これは無限個の頂点をもつ oriented I-colored graph である。その中で b_∞ は唯一の sink vertex (入ってくる矢印がない vertex) として特徴づけられる。

6.7 Crystals

前節までで crystal base の紹介をしてきたが、本節では crystal の概念を導入する。一言でいえば crystal とは、crystal base の定義を抽象化して得られるもので、１９９０年代の半ばごろ柏原によって導入された。6 節が始まってから長々と話をしてきたが、本節をもって crystal base に関する準備は終わりである。

Definition 6.7.1. (1) $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$ を Cartan datum として固定する。このとき集合 B と写像たち

$$\mathrm{wt} : B \to P, \quad \varepsilon_i : B \to \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}, \quad \varphi_i : B \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\},$$

$$\tilde{e}_i : B \to B \sqcup \{0\}, \quad \tilde{f}_i : B \to B \sqcup \{0\}, \quad (i \in I)$$

の組が crystal であるとは、以下の公理を満たすことである：

(C1) $\varphi_i(b) = \varepsilon_i(b) + \langle h_i, \mathrm{wt}(b) \rangle$ for $i \in I$ and $b \in B$,

(C2) $b \in B$ かつ $\tilde{e}_i b \in B$ ならば、$\mathrm{wt}(\tilde{e}_i b) = \mathrm{wt}(b) + \alpha_i$, $\varepsilon_i(\tilde{e}_i b) = \varepsilon_i(b) - 1$, $\varphi_i(\tilde{e}_i b) = \varphi_i(b) + 1$,

(C2') $b \in B$ かつ $\tilde{f}_i b \in B$ ならば、$\mathrm{wt}(\tilde{f}_i b) = \mathrm{wt}(b) - \alpha_i$, $\varepsilon_i(\tilde{f}_i b) = \varepsilon_i(b) + 1$, $\varphi_i(\tilde{f}_i b) = \varphi_i(b) - 1$,

(C3) $b, b' \in B$ のとき、$b' = \tilde{e}_i b \ \Leftrightarrow \ b = \tilde{f}_i b'$,

(C4) $b \in B$ かつ $\varphi_i(b) = -\infty$ ならば、$\tilde{e}_i b = \tilde{f}_i b = 0$.

ただし (C1) における $\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}^*$ の natural pairing を表す。
(2) $B_1,\ B_2$ を crystal とする。このとき B_1 から B_2 への morphism ψ とは、写像 $\psi : B_1 \sqcup \{0\} \to B_2 \sqcup \{0\}$ であって以下の条件を満たすものである。

(i) $\psi(0) = 0$,

(ii) $b \in B_1$ かつ $\psi(b) \in B_2$ ならば、$\mathrm{wt}(\psi(b)) = \mathrm{wt}(b)$, $\varepsilon_i(\psi(b)) = \varepsilon_i(b)$, $\varphi_i(\psi(b)) = \varphi_i(b)$,

(iii) $b, b' \in B_1$ が $b' = \tilde{f}_i b$ かつ $\psi(b), \psi(b') \in B_2$ を満たすならば、$\tilde{f}_i(\psi(b)) = \psi(b')$.

このとき $\psi : B_1 \to B_2$ と記す。

morphism $\psi : B_1 \to B_2$ が strict であるとは、ψ が任意の $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ と可換であることをいう。また写像として $\psi : B_1 \sqcup \{0\} \to B_2 \sqcup \{0\}$ が単射であるとき、morphism $\psi : B_1 \to B_2$ は embedding であるという。

Remark . crystal というのは Cartan datum $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$ を指定した上で定まる概念であることに注意されたい。通常は「crystal B」とだけ述べて Cartan datum は書かない場合が多いが、暗黙のうちに Cartan datum は固定されている。上で述べた crystal から crystal への morphism も、同じ Cartan datum を持つ crystal の間でのみ考えることが出来るのであって、異なる Cartan datum を持つ crystal の間の morphism は定義されていない。

Example 6.7.2. $B = B(\lambda)$ $(\lambda \in P_+)$、すなわち既約 integrable 表現 $V(\lambda)$ の crystal base とする。定義から $B(\lambda)$ は weight 分解 $B(\lambda) = \sqcup_{\mu \in P} B(\lambda)_\mu$ を持っていた。そこで $b \in B(\lambda)_\mu$ に対し、

$$\mathrm{wt}(b) := \mu \in P$$

と定める。また

$$\varepsilon_i(b) := \max\{k \geq 0 \mid \tilde{e}_i^k b \neq 0\}, \quad \varphi_i(b) := \max\{k \geq 0 \mid \tilde{f}_i^k b \neq 0\}$$

とおく。このとき $B(\lambda)$ は Definition 6.7.1 の意味で crystal である。

Example 6.7.3. $B = B(\infty)$ とする。定義から $B(\infty)$ は weight 分解を持っていたので、$B(\lambda)$ の場合と同様にして $\mathrm{wt} : B(\infty) \to P$ を定める。また

$$\varepsilon_i(b) := \max\{k \geq 0 \mid \tilde{e}_i^k b \neq 0\}, \quad \varphi_i(b) := \varepsilon_i(b) + \langle h_i, \mathrm{wt}(b) \rangle$$

とする。このとき $B(\lambda)$ は crystal である。

上記の 2 つの例は crystal base から来る crystal である。このようなものの他に、crystal base から来ない crystal もある。以下に重要な例を 2 つ挙げよう。

Example 6.7.4. $\lambda \in P$ とし、1 つの元からなる集合 $T_\lambda = \{t_\lambda\}$ を考える。$\mathrm{wt}(t_\lambda) = \lambda$, $\varepsilon_i(t_\lambda) = \varphi_i(t_\lambda) = -\infty$, $\tilde{e}_i(t_\lambda) = \tilde{f}_i(t_\lambda) = 0$ とおくと、T_λ は crystal である。

一般に crystal が与えられると、crystal base の場合と同様の方法で crystal graph を定義することができる。T_λ の crstal graph は非常に単純で 1 点からなり、矢印はない。

$$\underset{t_\lambda}{\circ}$$

Example 6.7.5. $j \in I$ を一つ固定する。このとき

$$B_j := \{b_j(n) \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

$$\mathrm{wt}(b_j(n)) := n\alpha_j,$$

$$\varepsilon_i(b_j(n)) := \begin{cases} -n, & i = j, \\ -\infty, & i \neq j, \end{cases} \qquad \varphi_i(b_j(n)) := \begin{cases} n, & i = j, \\ -\infty, & i \neq j, \end{cases}$$

$$\tilde{e}_i(b_j(n)) := \begin{cases} b_j(n+1), & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad \tilde{f}_i(b_j(n)) := \begin{cases} b_j(n-1), & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

と定義すると B_j は crystal である。集合としては B_j は $\mathbb{Z}$ と同型で、その crystal graph は以下のようになる：

$$\cdots \xrightarrow{j} \underset{b_j(n+1)}{\circ} \xrightarrow{j} \underset{b_j(n)}{\circ} \xrightarrow{j} \underset{b_j(n-1)}{\circ} \xrightarrow{j} \cdots$$

同じ Cartan datum を持つ 2 つの crystal B_1, B_2 が与えられたとき、crystal の tensor product $B_1 \otimes B_2$ を以下のように定義する：

$$B_1 \otimes B_2 := \{b_1 \otimes b_2 \mid b_i \in B_i \ (i = 1, 2)\},$$
$$\mathrm{wt}(b_1 \otimes b_2) := \mathrm{wt}(b_1) + \mathrm{wt}(b_2),$$
$$\varepsilon_i(b_1 \otimes b_2) := \max\{\varepsilon_i(b_1),\ \varepsilon_i(b_2) - \langle h_i, \mathrm{wt}(b_1)\rangle\},$$
$$\varphi_i(b_1 \otimes b_2) := \max\{\varphi_i(b_1) + \langle h_i, \mathrm{wt}(b_2)\rangle,\ \varphi_i(b_2)\},$$
$$\tilde{e}_i(b_1 \otimes b_2) := \begin{cases} (\tilde{e}_i b_1) \otimes b_2, & \text{if } \varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2), \\ b_1 \otimes (\tilde{e}_i b_2), & \text{if } \varphi_i(b_1) < \varepsilon_i(b_2), \end{cases}$$
$$\tilde{f}_i(b_1 \otimes b_2) := \begin{cases} (\tilde{f}_i b_1) \otimes b_2, & \text{if } \varphi_i(b_1) > \varepsilon_i(b_2), \\ b_1 \otimes (\tilde{f}_i b_2), & \text{if } \varphi_i(b_1) \leq \varepsilon_i(b_2). \end{cases}$$

$\otimes$ の記号を用いているが、集合としては $B_1 \otimes B_2$ は直積 $B_1 \times B_2$ に他ならない。この直積集合の上に wt, ε_i, φ_i, $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i$ を上記のように定めよ、という意味である。このとき次の Lemma は容易である。

Lemma 6.7.6. $B_1 \otimes B_2$ は crystal である。

Remark . Definition 6.7.1 の後の Remark とも関係するが、tensor product も同じ Cartan datum を持つ 2 つの crystal に対してのみ定義されており、異なる Cartan datum を持つ crystal の間の tensor product は定義出来ないことに注意されたい。

最後に $B(\infty)$ の crystal としての特徴付けについて述べる。7 節で preprojective algebra の nilpotent variety Λ_V の既約成分の集合 $\mathrm{Irr}(\Lambda_V)$ に crystal の構造が入り、さらに crystal として $B(\infty)$ と同型であることが示されるが、その際にこの特徴付けが用いられることになる。

Proposition 6.7.7 (Kashiwara-S). B を Cartan datum $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$ を持つ crystal、$U_v = U_v(\mathfrak{g})$ を上の Cartan datum から定まる量子包絡環、$B(\infty)$ を U_v^- の crystal base とする。このとき B が以下の 7 条件を満たせば、B は crystal として $B(\infty)$ と同型である。

(1) $\mathrm{wt}(B) \subset Q_-$.

(2) $\mathrm{wt}(b_0) = 0$ となる $b_0 \in B$ が一意的に存在する。

(3) 任意の $i \in I$ に対し、$\varepsilon_i(b_0) = 0$.

(4) 任意の $i \in I$ および $b \in B$ に対し、$\varepsilon_i(b) \in \mathbb{Z}$.

(5) 任意の $i \in I$ に対し、strict embedding $\Psi_i : B \to B \otimes B_i$ が存在する。

(6) $\Psi_i(B) \subset \{b \otimes b_i(n) \mid b \in B,\ n \leq 0\}$.

(7) $b \neq b_0$ であるような任意の $b \in B$ に対して、ある $i \in I$ が存在して、$\Psi_i(b) \in \{b \otimes b_i(n) \mid b \in B,\ n < 0\}$.

当たり前のことであるが、$B(\infty)$ はこの 7 条件を満たす。その場合 Proposition に現れる b_0 には $b_\infty = 1 \bmod vL(\infty) \in B(\infty)$ が対応する。定義から、(1) ~ (4) の成立は明らかだが、(5) 以降は自明ではない。これを示すためには、$B(\infty)$ に "$*$-structure" と呼ばれる extra な構造を入れなければならないのだが、長くなるので省略する。

7　Λ_V の既約成分上の crystal structure

随分と回り道をしてしまったが、ここから nilpotent varieties の既約成分の話に戻る。

先に結論を述べよう。$\mathbb{C}$ 上の有限次元 I-graded vector space V は dimension vector d を指定すれば同型を除いて一意的に定まるから、nilpotent variety Λ_V も $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^I$ でパラメトライズされていると思ってよい。そこで dimension vector を全て走らせて集合

$$\bigsqcup_{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^I} \mathrm{Irr}(\Lambda_V)$$

を考える。我々の目標は、この集合に crystal の構造を定義し、さらに crystal として double quiver Γ に付随する量子包絡環 $U_v(\mathfrak{g}(\Gamma))$ の subalgebra U_v^- の crystal base $B(\infty)$ と同型であることを示すことである。

7.1　準備

最初の問題は、この集合上にどうやって crystal structure を定めるか？である。最も重要なのは Kashiwara operators $\tilde{e}_i,\ \tilde{f}_i$ の定め方であるが、その際の基本的なアイデアは 4 節で述べた「diagram が積構造を定める」というものである。Ringel-Hall algebra の場合を簡単に思い出しておこう。$(V, V', \overline{V})$ を I-graded vector space の 3 つ組として、Ringel-Hall algebra $R\Omega \cong \mathbf{K}_\Omega$ における積 $*$ は、diagram

$$(\bigstar) \qquad E_{\overline{V},\Omega} \times E_{V',\Omega} \xleftarrow{p_1} E_1 \xrightarrow{p_2} E_2 \xrightarrow{p_3} E_{V,\Omega}.$$

によって、

$$\overline{f} * f' = (p_3)_!(p_2)_\flat(p_1)^*(\overline{f} \otimes f') \quad (\overline{f} \in \mathbf{K}_{\Omega,\overline{d}},\ f' \in \mathbf{K}_{\Omega,d'})$$

と書けているのであった。

diagram $(\bigstar)$ のアナロジー (double quiver version) として、

$$(\bigstar\bigstar) \qquad X_{\overline{V}} \times X_{V'} \xleftarrow{q_1} X_{\overline{V},V'} \xrightarrow{q_2} X_V.$$

なる diagram を考える。ただし

$$X_{\overline{V},V'} = \left\{ (B, \overline{\phi}, \phi') \;\middle|\; \begin{array}{l} B \in X_V, \\ 0 \to V' \xrightarrow{\phi'} V \xrightarrow{\overline{\phi}} \overline{V} \to 0 \text{ は } I\text{-graded vector} \\ \text{space の完全系列かつ}, B(\mathrm{Im}\phi') \subset \mathrm{Im}\phi'. \end{array} \right\}.$$

また $(B, \overline{\phi}, \phi') \in X_{\overline{V},V'}$ が与えられると、自然に $\overline{B} \in X_{\overline{V}}$ と $B' \in E_{V'}$ が誘導される。このとき $q_1(B, \overline{\phi}, \phi') = (\overline{B}, B')$ とおく。また $p_2(B, \overline{\phi}, \phi') = B$ と定義する。

次の Lemma は容易である。

Lemma 7.1.1. $B \in X_V$ が Λ_V に含まれることと、$\overline{B} \in \Lambda_{\overline{V}}$ かつ $B' \in \Lambda_{V'}$ が成り立つことは同値。

したがって (★★) を、さらに nilpotent variety に制限して

$$(\diamondsuit) \qquad \Lambda_{\overline{V}} \times \Lambda_{V'} \xleftarrow{q_1} \Lambda_{\overline{V},V'} \xrightarrow{q_2} \Lambda_V.$$

なる diagram を考えることができる。ここに

$$\Lambda_{\overline{V},V'} = q_1^{-1}(\Lambda_{\overline{V}} \times \Lambda_{V'}) = q_2^{-1}(\Lambda_V)$$

である。この diagram($\diamondsuit$) は Kashiwara operators を定義する上で要となる。

7.2 Crystal structure の定義

crystal の構造を定めるためには、Cartan datum $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$ を指定して、集合 B と写像たち $\mathrm{wt},\ \varepsilon_i,\ \varphi_i,\ \tilde{e}_i,\ \tilde{f}_i$ を定めればよい。

我々の場合、double quiver $\Gamma = (I, H)$ から出発して、Γ に付随する量子包絡環 $U_v(\mathfrak{g}(\Gamma))$ を定めたときに用いた Cartan datum を取ってくる。いうまでもなく、集合 B は nilpotent varietis の既約成分全体の集合にとる。後々の都合のために、以後 $B(\infty, d) = \mathrm{Irr}\Lambda_V$ $(d = \underline{\dim} V)$ と書くことにする。この記号のもとに

$$B = \bigsqcup_{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^I} B(\infty, d)$$

である。以後 $\mathbb{Z}_{\geq 0}^I$ と Q_- を

$$(7.2.1) \qquad \mathbb{Z}_{\geq 0}^I \ni d = (d_i)_{i \in I} \ \leftrightarrow -\sum_{i \in I} d_i \alpha_i \in Q_-$$

によって同一視する。この同一視のもとに $\Lambda \in B(\infty, d)$ に対して

$$\mathrm{wt}(\Lambda) := d\ (= -\sum_{i \in I} d_i \alpha_i)$$

とおく。$Q_- \subset P$ であるから、これで $\mathrm{wt} : \bigsqcup B(\infty, d) \to P$ が定まる。

次に $\varepsilon_i,\ \varphi_i$ を定義しよう。まず $B \in X_V$ に対して

$$\varepsilon_i(B) := \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Coker} \left(\bigoplus_{\tau \in H\ ;\ \mathrm{in}(\tau) = i} V_{\mathrm{out}(\tau)} \xrightarrow{(B_\tau)} V_i \right)$$

と定める。$\Lambda \in B(\infty, d)$ に対して、Λ の generic な点 $B \in \Lambda$ をとり、

$$\varepsilon_i(\Lambda) := \varepsilon_i(B)$$

とおく。また

$$\varphi_i(\Lambda) := \varepsilon_i(\Lambda) + \langle h_i, \mathrm{wt}(\Lambda) \rangle$$

とする。

Kashiwara operators $\tilde{e}_i,\ \tilde{f}_i$ を定義しよう。まず前節で導入した diagram $(\diamondsuit)$ において、$\overline{d} = -c\alpha_i$ とした special case を考える。この場合 $d = d' - c\alpha_i$ であることに注意しよう。さらに

$$\overline{V}_j = \begin{cases} \mathbb{C}^c, & j = i, \\ \{0\}, & j \neq i \end{cases}$$

であるので、$\Lambda_{\overline{V}} = \{0\}$ である。したがって diagram $(\diamondsuit)$ は

$$(\diamondsuit') \qquad \Lambda_{V'} \cong \{0\} \times \Lambda_{V'} \xleftarrow{q_1} \Lambda_{\overline{V},V'} \xrightarrow{q_2} \Lambda_V.$$

と書ける。

指定された $i \in I$, $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$(\Lambda_V)_{i,p} := \{B \in \Lambda_V \mid \varepsilon_i(B) = p\}$$

とおく。このとき定義から次が成り立つことが容易にわかる。

Lemma 7.2.1.

$$q_1^{-1}\big((\Lambda_{V'})_{i,p}\big) = q_2^{-1}\big((\Lambda_V)_{i,p+c}\big).$$

そこで

$$(\Lambda_{\overline{V},V'})_{i,p} := q_1^{-1}(\Lambda_{V'})_{i,p} = q_2^{-1}(\Lambda_V)_{i,p+c}$$

とおく。$(\diamondsuit')$ に現れる写像 $q_1,\ q_2$ は、一般には非常に複雑になってしまうが、定義域を $p = 0$ の場合、すなわち $(\Lambda_{\overline{V},V'})_{i,0}$ に制限すると比較的扱いやすいものになっている。

Proposition 7.2.2. (1) $p_1 : (\Lambda_{\overline{V},V'})_{i,0} \to (\Lambda_{V'})_{i,0}$ は smooth map で、その fiber は connected rational variety である。
(2) $p_2 : (\Lambda_{\overline{V},V'})_{i,0} \to (\Lambda_V)_{i,c}$ は principal fiber bundle である。

指定された $i \in I$, $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して、

$$B(\infty, d)_{i,p} := \{\Lambda \in B(\infty, d) \mid \varepsilon_i(\Lambda) = p\}$$

とおく。Proposition 7.2.2 により、次の Corollary が成り立つことがわかる。

Corollary 7.2.3. 写像 $q_1,\ q_2$ は全単射

$$B(\infty, d')_{i,0} \cong B(\infty, d)_{i,c}$$

を誘導する。

これで Kashiwara operators $\tilde{e}_i,\ \tilde{f}_i$ を定義する準備が整った。

Definition 7.2.4. 上の同型で、$\Lambda' \in B(\infty, d')_{i,0}$ と $\Lambda \in B(\infty, d)_{i,c}$ が対応しているとする。このとき

$$\tilde{e_i}^c : B(\infty, d)_{i,c} \to B(\infty, d')_{i,0}, \qquad \tilde{f_i}^c : B(\infty, d')_{i,0} \to B(\infty, d)_{i,c}$$

を

$$\tilde{e_i}^c(\Lambda) := \Lambda', \qquad \tilde{f_i}^c(\Lambda') := \Lambda$$

と定める。さらに写像

$$\tilde{e_i} : \bigsqcup_{d \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}} B(\infty, d) \to \left(\bigsqcup_{d \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}} B(\infty, d) \right) \sqcup \{0\},$$

$$\tilde{f_i} : \bigsqcup_{d \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}} B(\infty, d) \to \bigsqcup_{d \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}} B(\infty, d)$$

を以下のように定める：
$c > 0$ のとき、

$$\tilde{e_i} : B(\infty, d)_{i,c} \xrightarrow{\tilde{e_i}^c} B(\infty, d')_{i,0} \xrightarrow{\tilde{f_i}^{c-1}} B(\infty, d + \alpha_i)_{i,c-1}.$$

$c = 0$ のとき、

$$\tilde{e_i} : B(\infty, d)_{i,0} \to \{0\}.$$

また任意の $c \geq 0$ に対して、

$$\tilde{f_i} : B(\infty, d)_{i,c} \xrightarrow{\tilde{e_i}^c} B(\infty, d')_{i,0} \xrightarrow{\tilde{f_i}^{c+1}} B(\infty, d - \alpha_i)_{i,c+1}.$$

Remark . Corollary 7.2.3 の同型が定める写像を $\tilde{e_i}^c,\ \tilde{f_i}^c$ と書いているが、上のように $\tilde{e_i},\ \tilde{f_i}$ を定義すれば、$\tilde{e_i}^c,\ \tilde{f_i}^c$ はそれぞれ「$\tilde{e_i}$ の c 乗」、「$\tilde{f_i}$ の c 乗」と思うことができる。

このとき次が成り立つ。

Theorem 7.2.5 (Kashiwara-S). $\bigsqcup_d B(\infty, d)$ は crystal である。

証明は公理をチェックすればよい。

7.3 Crystal base $B(\infty)$ の幾何学的構成

前節で定義した crystal $\bigsqcup_d B(\infty, d)$ が $B(\infty)$ と同型であることを示すのがこの節の目的である。そのためには Proposition 6.7.7 で述べた $B(\infty)$ の特徴付けの 7 つの条件 (1) ~ (7) を $\bigsqcup_d B(\infty, d)$ が満たすことを言えばよい。このうち (1) ~ (4) は定義からすぐわかる。問題なのは (5) の条件

「任意の $i \in I$ に対し、strict embedding $\Psi_i : B \to B \otimes B_i$ が存在する。」

で、これが示されれば (6) と (7) は比較的容易に従う。そこでこのノートでは strict embedding Ψ_i の構成法について紹介したい。

まず $B \in X_V$ に対して

$$\varepsilon_i^*(B) := \dim_{\mathbb{C}} \ker \left(V_i \xrightarrow{(B_\tau)} \bigoplus_{\tau \in H \ ; \ \mathrm{out}(\tau)=i} V_{\mathrm{in}(\tau)} \right)$$

と定める。$\Lambda \in B(\infty, d)$ に対して、Λ の generic な点 $B \in \Lambda$ をとり、

$$\varepsilon_i^*(\Lambda) := \varepsilon_i^*(B)$$

とおく。また

$$(\Lambda_V)_i^p := \{B \in \Lambda_V \mid \varepsilon_i \ *(B) = p\},$$
$$B(\infty, d)_i^p := \{\Lambda \in B(\infty, d) \mid \varepsilon_i^*(\Lambda) = p\}$$

とする。

$B = (B_\tau)_{\tau \in H} \in X_V$ に対して、$B^* = (B_\tau^*)_{\tau \in H} \in X_V$ を

$$B_\tau^* := {}^t(B_{\overline{\tau}}) \quad \text{for any } \tau \in H$$

と定める。ここで ^{t} は行列の転置をあわらす。このとき $*$ は同型 $X_V \to X_V$ を誘導するが、簡単な計算により $* : \Lambda \xrightarrow{\sim} \Lambda_V$ であることがわかる。したがって $*$ は $B(\infty, d)$ の permutation を誘導するが、さらに

$$\varepsilon_i^*(\Lambda) = \varepsilon_i(\Lambda^*)$$

が成り立つ。そこで

$$\tilde{e}_i{}^* := * \circ \tilde{e}_i \circ *, \qquad \tilde{f}_{ii}{}^* := * \circ \tilde{f}_i \circ *$$

とおけば、

$$\tilde{e}_i{}^{*c} : B(\infty, d)_i^c \xrightarrow{\sim} B(\infty, d')_i^0, \qquad \tilde{f}_i{}^{*c} : B(\infty, d')_i^0 \xrightarrow{\sim} B(\infty, d)_i^c$$

が成り立つ。

Proposition 7.3.1. 写像 $\Psi_i : \bigsqcup_d B(\infty, d) \to (\bigsqcup_d B(\infty, d)) \otimes B_i$ を次のように定める：$\Lambda \in B(\infty, d)$ に対し、

$$\Psi_i(\Lambda) := \tilde{e}_{ii}{}^{*\varepsilon_i^*(\Lambda)}(\Lambda) \otimes b_i(-\varepsilon_i^*(\Lambda)).$$

このとき Ψ_i は crystal の strict embedding である。

証明は省略する ([KS] 参照のこと)。

主張を定理の形でまとめておこう。

Theorem 7.3.2 (Kashiwara-S). $\bigsqcup_d B(\infty, d)$ は Proposition 6.7.7 の 7 つの条件を満たす。すなわち crystal として $\bigsqcup_d B(\infty, d)$ と $B(\infty)$ は同型である。

7.4 まとめ

話が錯綜してしまったので、5.3 節の最後のパラグラフで述べた「nilpotent varieties の既約成分全体が、simple module に対応する既約成分によって生成される」ことの意味について、ここでまとめておくことにしよう。

始めに記号を準備する。以下では dimension vector が d であるような I-graded vector space を $V(d)$ と書くことにする。また $\mathbb{Z}_{\geq 0}^I$ と Q_- の同一視 (7.2.1) を注意することなく用いる。例えば $V(d-\alpha_i)$ は $V(d)$ に比べて i 成分だけが 1 次元増えた I-graded vector space を表し、$V(-\alpha_i)$ は i 成分だけが 1 次元でその他は 0 の I-graded vector space を表す。後者は今までの記法で $V(i)$ と書いていたものに他ならない。

Kashiwara opetator $\tilde{f}_i : B(\infty, d)_{i,c} \xrightarrow{\sim} B(\infty, d-\alpha_i)_{i,c+1}$ ついて考えよう。話を簡単にするために、特に $c = 0$ とする。このとき Definition 7.2.4 によれば、

$$\tilde{f}_i : B(\infty, d)_{i,0} \xrightarrow{\sim} B(\infty, d-\alpha_i)_{i,1} \tag{7.4.1}$$

は、diagram $(\diamondsuit)$ の特殊な場合

$$\Lambda_{V(d)} \cong \Lambda_{V(-\alpha_i)} \times \Lambda_{V(d)} \xleftarrow{q_1} \Lambda_{V(-\alpha_i),V(d)} \xrightarrow{q_2} \Lambda_{V(d-\alpha_i)} \tag{$\diamondsuit_0$}$$

から誘導されるのであった。

一方、7.1 節で述べたように diagram $(\diamondsuit)$ は、Ringel-Hall algebra $R\Omega \cong \mathbf{K}_\Omega$ を convolution 積を使って再定義した時に用いた diagram $(\bigstar)$ の、nilpotent variety 版である。今の場合、$(\diamondsuit_0)$ に対応する Ringel-Hall algebra 側の diagram は

$$E_{V(-\alpha_i),\Omega} \times E_{V(d),\Omega} \xleftarrow{p_1} E_1 \xrightarrow{p_2} E_2 \xrightarrow{p_3} E_{V(d-\alpha_i),\Omega} \tag{$\bigstar_0$}$$

となる。この diagram を用いて、積

$$* : \mathbf{K}_{V(-\alpha_i),\Omega} \otimes \mathbf{K}_{V(d),\Omega} \to \mathbf{K}_{V(d-\alpha_i),\Omega} \tag{7.4.2}$$

を定めたわけだが、今の場合 $\mathbf{K}_{V(-\alpha_i),\Omega} = \mathbb{C}\mathbf{F}_{i,\Omega}$ であるので、(7.3.2) は simple module $\mathbf{F}_{i,\Omega}$ を左から掛ける操作を定義する写像そのものであり、対応する量子群の言葉で言い換えれば、これは「生成元 f_i を左から掛けるという操作」に他ならない。

話を既約成分の場合に戻す。(7.4.1) の同型で $\tilde{f}_i(\Lambda') = \Lambda$ であったとする。$V = V(-\alpha_i)$ とした場合の nilpotent variety $\Lambda_{V(-\alpha_i)}$ は、1 点 Λ_i からなる集合である。この Λ_i に対応する preprojective algebra $P(\Gamma)$ の表現は simple module であることに注意して、Kashirawa operator $\tilde{f}_i$ を「$\Lambda' \in B(\infty, d)_{i,0}$ に、"simple module に対応する既約成分 Λ_i を左から施して"、新たに $\Lambda \in B(\infty, d-\alpha_i)_{i,1}$ を作り出す写像」と思うことにする。すなわち (7.4.1) を、(7.4.2) の "既約成分版" と考えようというわけである。

$c \neq 0$ の場合は $\tilde{f}_i$ は $\tilde{e}_i^c$ と $\tilde{f}_i^{c+1}$ の合成なので、もう少し話はややこしくなるが基本的

な考え方は同じである[49]。

ここまでの話が Theorem 7.2.5 にあたる。しかしこの段階では $\bigsqcup_d B(\infty, d)$ に crystal の構造が定義出来ると言っているに過ぎず、その全体像を把握することはまだ出来ていないことに注意されたい。Theorem 7.3.2 まで考えて、それは初めて可能になる。

$d = 0$ の場合、対応する I-graded vector space は trivial (0 次元) であり、$B(\infty, 0)$ は 1 点からなる集合になる。この元を Λ_0 と書こう。Theorem 7.3.2 の同型で $b_\infty = 1 \bmod vL(\infty) \in B(\infty)$ に対応しているのは Λ_0 である。$B(\infty)$ の任意の元は b_∞ に $\tilde{f}_i$ $(i \in I)$ たちを施すことによって得られるので、同型である $\bigsqcup_d B(\infty, d)$ でももちろん事情は同じである。すなわち、任意の既約成分は、Λ_0 に "simple module に対応する既約成分 Λ_i を左から施す写像" である $\tilde{f}_i$ たちを順次施すことによって得られるわけである。

8 最近の話題から

これまでに述べてきた話は、大部分が前世紀に得られた、いわば "ちょっと前の結果" である。このノートを締めくくるにあたって、今世紀に入ってからの進展に触れておく。ただし、その全てを網羅することは筆者の能力を超えるので、今回はは 5.3 節の Remark で述べた問題に対する Geiss-Leclerc-Schröer による解答と、それに関連する話題に限定して紹介する。

8.1 Semicanonical basis

言葉の準備から始める。X を $\mathbb{C}$ 上の algebraic variety とする。X の部分集合 A が constructible であるとは、A が有限個の局所閉集合の union で書けることをいう。また関数 $f : X \to \mathbb{C}$ が constructible であるとは、任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して $f^{-1}(c)$ が constructible subset で、かつ有限個の $c \in \mathbb{C}$ を除いて $f^{-1}(c)$ が空集合であることをいう。X 上の constructible な関数全体を $M(X)$ と書く。これは $\mathbb{C}$-vector space である。

Y を X の既約成分、$f \in M(X)$ とする。このとき、次を満たす $c \in \mathbb{C}$ が一意的に存在することがわかる：$f^{-1}(c) \cap Y$ は Y の稠密な開集合を含む。$f \in M(X)$ に対し、この稠密な開集合上での値 $c \in \mathbb{C}$ を対応させることで、

$$\rho_Y : M(X) \to \mathbb{C}$$

を定義する。

話を我々の場合に戻そう。$(V, V', \overline{V})$ を I-graded vector space の 3 つ組とし、7.1 節で導入した diagram

$$(\diamondsuit) \qquad \Lambda_{\overline{V}} \times \Lambda_{V'} \xleftarrow{q_1} \Lambda_{\overline{V},V'} \xrightarrow{q_2} \Lambda_V.$$

[49] 正確に言えば、${\tilde{f}_i}^c$ は「U_v^- の中で、$f_i^{(c)}$ を左から掛ける操作」に対応する。また、その逆である ${\tilde{e}_i}^c$ は「U_v^- の中で、一番左にある $f_i^{(c)}$ を取り去る操作」に対応する。U_v^- の中で $f_i^{(c)}$ を左から掛けることはいつでもできるので、任意の Λ に対して ${\tilde{f}_i}^c\Lambda$ は 0 にならない。一方、「一番左にある $f_i^{(c)}$ を取り去る操作」は必ずしも行えるとは限らない。取り去ることができない場合には ${\tilde{e}_i}^c\Lambda = 0$ となる。

を考える。Λ_V 上の G_V-invariant な constructible function 全体を $M(\Lambda_V)^{G_V}$ と書くとき、

$$\widetilde{\mathcal{M}} := \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^I} M(\Lambda_V)^{G_V} \quad (d = \underline{\dim} V)$$

上に diagram ($\diamondsuit$) から定まる convolution 積によって、$\mathbb{C}$-algebra structure を定めることができる[50]。

以後 7.4 節の記号を断りなく用いる。$d = -\alpha_i$ のとき、$\Lambda_{V(-\alpha_i)}$ は 1 点 Λ_i からなる集合だった。任意の $i \in I$ に対し、Λ_i の特性関数 χ_{Λ_i} は $\widetilde{\mathcal{M}}$ の元となる。χ_{Λ_i} $(i \in I)$ で生成される $\widetilde{\mathcal{M}}$ の subalgebra を $\mathcal{M}$ とし、$\mathcal{M}_d := \widetilde{\mathcal{M}} \cap M(\Lambda_V)^{G_V}$ と定める。このとき $\mathcal{M} = \oplus_d \mathcal{M}_d$ である。

Theorem 8.1.1 (Lusztig [L4]). $f_i \mapsto \chi_{\Lambda_i}$ によって定まる $\mathbb{C}$-algebra の同型写像 $\Xi : U(\mathfrak{n}_-) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$ が存在する。ここで $\mathfrak{n}_-$ は、double quiver $\Gamma = (I, H)$ に付随する Kac-Moody Lie algebra $\mathfrak{g}(\Gamma)$ の下三角 Lie subalgebra である。

Sketch of Proof. 定義から、同一視 $Q_- \cong \mathbb{Z}_{\geq 0}^I$ のもとに、Ξ が grading を保つ全射準同型写像であることは比較的容易にわかる。すなわち $\Xi : U(\mathfrak{n}_-)_d \twoheadrightarrow \mathcal{M}_d$ である。ここに $U(\mathfrak{n}_-)_d$ は weight d の weight space を表す。

次に $\Lambda \in B(\infty, d)$ $(= \mathrm{Irr}(\Lambda_V))$ に対し、

$$\rho_\Lambda(f) = 1 \quad \text{かつ} \quad \rho_{\Lambda'}(f) = 0 \text{ for any } \Lambda' \in B(\infty, d) \setminus \{\Lambda\}$$

なる $f \in \mathcal{M}_d$ が存在することを示す[51]。この f を f_Λ と書く。

作り方から $\{f_\Lambda \mid \Lambda \in B(\infty, d)\}$ は 1 次独立な $\mathcal{M}_d$ の部分集合である。また Theorem 7.3.2 から、$\dim_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{n}_-)_d = \sharp B(\infty, d)$ である。この両者を併せると、$\Xi : U(\mathfrak{n}_-)_d \twoheadrightarrow \mathcal{M}_d$ が単射であることがわかる。 □

Definition 8.1.2. 上で構成した $U(\mathfrak{n}_-)$ の基底

$$\Xi^{-1}\left(\left\{f_\Lambda \mid \Lambda \in \bigsqcup_d B(\infty, d)\right\}\right)$$

を $U(\mathfrak{n}_-)$ の semicanonical basis と呼ぶ。

以下、$\mathcal{S} := \left\{f_\Lambda \mid \Lambda \in \bigsqcup_d B(\infty, d)\right\}$ を $U(\mathfrak{n}_-)$ の semicanonical basis と同一視して、$\mathcal{S}$ のことも semicanonical basis と呼ぶことにする。

Remark . 似た名前のもので、canonical basis と呼ばれるものがある。これは 4.3 節に述べた量子群の幾何学的構成を通じて定義される、U_v^- の基底である (Introduction 参照)。canonical basis に $v = 1$ を代入することで、$U(\mathfrak{n}_-)$ の基底が得られるが、これは一般に semicanonical basis とは一致しない[52]。

[50] 詳しい定義は [L4] 参照。

[51] 一番本質的なのはこの部分であるが、証明には幾何学的な準備が必要になる。詳しくは原論文を参照されたい。

[52] 一致するのは A_n $(n \leq 4)$ のときのみで、それ以外では一致しない。このことの詳しい解説が [GLS1] の Introduction にある。

8.2 Geiss-Leclerc-Schröer による解答とその周辺

本節では Γ は A,D,E 型の quiver であるとの仮定をおく。この場合には、対応する $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\Gamma)$ は有限次元単純 Lie algebra となり、よく知られた "Lie 群と Lie 環の対応" が使える世界の話になる[53]。

$\mathfrak{g}$ に対応する Lie 群を G、$\mathfrak{n}_-$ に対応する Lie 群を N_- とおく。G は $\mathbb{C}$ 上の単純 Lie 群、N_- はその maximal unipotent subgroup である。このとき N_- の関数環 $\mathbb{C}[N_-]$ と $U(\mathfrak{n}_-)$ の間には、canonical に定まる pairing があって、互いが互いの graded dual になっている。

前節で導入した $\mathcal{M} = \oplus_d \mathcal{M}_d$ の graded dual を $\mathcal{M}^* = \oplus_d \mathcal{M}_d^*$ と書く。$\Lambda \in B(\infty, d)$ とするとき、定義から ρ_Λ は $\mathcal{M}_d^*$ の元であるが、

$$\rho_\Lambda(f_{\Lambda'}) = \delta_{\Lambda,\Lambda'} \quad (\Lambda, \Lambda' \in B(\infty, d))$$

であったので、

$$\mathcal{S}^* := \left\{ \rho_\Lambda \mid \Lambda \in \bigsqcup_d B(\infty, d) \right\}$$

は $\mathcal{M}^*$ の基底で、しかも semicanomical basis $\mathcal{S}$ の双対基底になっている。$\mathcal{S}^*$ を dual semicanonical basis と呼ぶ。

Theorem 8.1.1 により、$U(\mathfrak{n}_-) \cong \mathcal{M}$ であったので、

$$\mathbb{C}[N_-] \cong \left(U(\mathfrak{n}_-)\right)^* \cong \mathcal{M}^*$$

が成り立つ。この同型によって $\mathbb{C}[N_-]$ と $\mathcal{M}^*$ を同一視し、dual semicanonical basis $\mathcal{S}^*$ を $\mathbb{C}[N_-]$ の元と思うことにする。こうすることで $\rho_\Lambda,\ \rho_{\Lambda'} \in \mathcal{S}^*$ の積、$\rho_\Lambda \rho_{\Lambda'}$ を ($\mathbb{C}[N_-]$ の中で) 考えることができる[54]。

Geiss-Leclerc-Schröer が示したのは次の定理である ([GLS1])。

Theorem 8.2.1 (Geiss-Leclerc-Schröer). V_k $(k = 1, 2)$ を I-graded vector space とし、$d_k = \underline{\dim} V_k$ とおく。また $\Lambda_k \in B(\infty, d_k)$ とする。このとき $\overline{\Lambda_1 \oplus \Lambda_2} \in B(\infty, d_1 + d_2)$ ならば、$\rho_{\Lambda_1}\rho_{\Lambda_2} = \rho_{\overline{\Lambda_1 \oplus \Lambda_2}}$ である。

この定理は必要十分条件を与えているわけではないので、「問題の解答」と呼ぶにはいささか語弊があるが[55]、それでも nilpotent variety の既約成分と dual semicanonical basis の積構造との関係を記述する、興味深い結果であると思う。

---

[53] $\mathfrak{g}$ が有限次元でない場合でも、Kac-Moody Lie 群を考えることで、ある程度のことは cover できる。ただし Kac-Moody Lie 群は無限次元の Lie 群なので、話はずっとややこしくなる。

[54] 正確に言えば以下のようになる : $\mathbb{C}[N_-]$ と $U(\mathfrak{n}_-)$ に通常の Hopf algebra structure を入れるとき、両者の対応は単なる vector space としての graded dual ではなくて、Hopf algebra としての dual になっている。一方、$\mathcal{M}$ には diagram $(\diamondsuit)$ を用いて Hopf algebra の構造を入れることができ、さらに同型 $\Xi : U(\mathfrak{n}_-) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$ は Hopf algebra としての同型を与えていることがわかる。したがって $\mathcal{M}^*$ に $\mathcal{M}$ の comultiplication を使って積構造をいれておけば、上に述べた同一視 $\mathbb{C}[N_-] \cong \mathcal{M}^*$ は algebra としての同型を与えていることになる。

[55] 「解答」と呼んだのは筆者の独断であり、Geiss-Leclerc-Schröer がそう言っているわけではない。

Geiss-Leclerc-Schröer は、この結果に続く形で $\mathbb{C}[N_-]$ の cluster algebra structure との関係 ([GLS2])、dual semicanonical basis の積公式 ([GLS3]) についても論じている。さらにこの話は Calabi-Yau algebra や mutation の概念等、最近の非可換代数幾何の話題とも密接な関係があるらしい[56]。

Ringel によって発見された箙と量子群の関係は、現在でも深化を続けているようである。

References

[A1] S. Ariki, *On the decomposition numbers of the Hecke algebra of $G(m, 1, n)$*, J. Math. Kyoto Univ. 36 (1996), 789–808.

[A2] S. Ariki, *Representations of quantum algebras and combinatorics of Young tableaux*, Univ. Lecture Series 26 (2002), AMS.

[ARS] M. Auslander, I. Reiten and S. O. Smalø, *Representation theory of Artin algebras*, Cambrigde studies in adv. math. 36 (1995), Cambridge.

[BBD] A. Beilinson, J. Bernstein and P. Deligne, *Faiseaux perverse*, Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981), Astérisque 100 (1982), 5-171.

[BK] J. Brundan and A. Kleshchev *Hecke-Clifford superalgebras, crystals of type $A^{(2)}_{2l}$ and modular branching rules for $\hat{S}_n$*, Represent. Theory 5 (2001), 317–403.

[CG] N. Chriss and V. Ginzburg, *Representation Theory and Complex Geometry*, (1997), Birkhäuser.

[C1] W. Crawley-Boevey, *On the exceptioal fibers of Kleinian singularities*, Amer. J. Math. 122 (2000), 1027-1037.

[C2] W. Crawley-Boevey, *Geometry of the moment map for representations of quivers*, Comp. Math. 126 (2001), 257-293.

[D] P. Deligne, *Cohomologie Étale*, SGA4$\frac{1}{2}$, Lecture Note in Math. 569 (1977), Springer-Verlag.

[DR] V. Dlab and C. M. Ringel, *The module theoritical approach to quasi-heriditary algebras*, Representations of algebras and related topics (Kyoto 1990), 200-224, Cambridge (1992).

[FZ] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras I: Foundations*, J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), 497-529.

[56] これはオーガナイザーの伊山さんから喫茶店で聞いた話なので、筆者の勘違いの可能性がある。もし間違っていたら、すいません。

[GLS1] C. Geiss, B. Leclerc and J. Schröer, *Semicanonical bases and preprojective algebras*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 38 (2005), 193-253.

[GLS2] C. Geiss, B. Leclerc and J. Schröer, *Rigid modules over preprojective algebras*, Invent. Math. 165 (2006), 589-632.

[GLS3] C. Geiss, B. Leclerc and J. Schröer, *Semicanonical bases and preprojective algebras II* , preprint, arXiv:math.RT/0506405.

[G] V. Ginzburg, *"Lagrangian" construction for representations of Hecke algebras*, Adv. in Math. 63 (1987), 100-112.

[H] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, London Math. Soc. Lecture Note Series, 119 (1988), Cambridge.

[HK] J. Hong and S-J. Kang, *Introduction to Quantum Groups and Crystal bases*, Graduate Studies Math. 42 (2002), AMS.

[Kac] V. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras, 3rd ed*, (1990), Cambridge.

[K1] M. Kashiwara, *On crystal bases of the q-analogue of universal enveloping algbras*, Duke. Math. J. 63 (1991), 465-516.

[K2] M. Kashiwara, *Bases cristallines des groupes quantiques*, Cours Spécialisés 9 (2002), Société Mathématique de France.

[KS] M. Kashiwara and Y. Saito, *Geometric construction of crystal bases*, Duke. Math. J. 89 (1997), 9-36.

[KL1] D. Kazhdan and G. Lusztig, *A topological approach to Springer's representations*, Adv. in Math. 38 (1980), 222-228.

[KL2] D. Kazhdan and G. Lusztig, *Proof of the Deligne-Langlands conjecture for Hecke algebras*, Invent. Math. 87 (1987), 153-215.

[Kl] A. Kleshchev, *Linear and projective representations of symmetric groups*, Cambridge Tracts in Mathematics, 163. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[L1] G. Lusztig, *Canonical bases arising form quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. 3 (1990), 447-498.

[L2] G. Lusztig, *Quivers, perverse sheaves and quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. 4 (1991), 365-421.

[L3] G. Lusztig, *Introduction to Quantum Groups*, Progr. Math. 110 (1993), Birkhäuser.

[L4] G. Lusztig, *Semicanonical bases arising from enveloping algebras*, Adv. Math. 151 (2000), 129-139.

[N1] H. Nakajima, *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. 76 (1994), 365-416.

[N2] H. Nakajima, *Quiver varieties and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. 91 (1998), 515-560.

[N3] H. Nakajima, *Quiver varieties and finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, J. Amer. Math. Soc. 14 (2001), 145-238.

[Rei] J. Reiten, *Dynkin diagrams and the representation theory of algebras*, Notices of the AMS 44 (1997), 546-556.

[R1] C. M. Ringel, *Tame algebras and integral quiaratic forms*, Lecture Note in Math. 1099 (1984), Springer-Verlag.

[R2] C. M. Ringel, *Hall algebras and quantum groups*, Invent. Math. 101 (1990), 583-591.

[R3] C. M. Ringel, *The preprojective algebra of a quiver*, CMS conf. Proc. 24 (1998), 467-480.

[S] Y. Saito, *An introduction to canonical bases*, Representations of finite dimensional algebras and related topics in Lie theory and geometry, Fields Inst. Commun. 40 (2004), 431-451.

[T] T. Tanisaki, *Hodge modules, equivariant K-theory and Hecke algberas*, Publ. RIMS. 23 (1987), 841-879.

[谷崎] 谷崎俊之, リー代数と量子群, (2002), 共立出版.

[谷堀] 谷崎俊之, 堀田良之, D 加群と代数群, (1995), シュプリンガー・フェアラーク東京.

[中島] 中島啓, 箙多様体と量子アファイン環, 数学 52 (2000), 53-78.

[飛田] 飛田明彦, 対称群のブルエ予想, 本報告集掲載予定.