Artin 環

大城　紀代市
山口大学

概要

タイトルを Artin 環としたが，それは体上有限次元多元環を含む一般の純然たる Artin 環を意味する．本稿の目的は, 古典的 Artin 環である Quasi-Frobenius 環 (QF-環) の構造論を旧来とは違う方法で考察しながら, 関連する他の Artin 環への応用に視点をおき, 最近のいくつかの話題を紹介することである．

話題のタイトルは下記の通りである．

（１）Harada 環と QF-環

（２）Harada 環と frame QF-部分環

（３）Nakayama 環の classification

（４）代数閉体上の Nakayama 群多元環

（５）局所 QF-環の構成と Faith 予想

一般の Artin 環といっても，その源流は群の表現論，多元環の表現論にあり，特に 1903 年の Frobenius の次の論文が原点の一つになっている：

W. Von Frobenius, Theoriw der hyperkomplexen Groeβen, *Sitzung der phys.-math.* K1(1903), 504-538. 634-645.

この論文で，右正則表現と左正則表現が同値である体上有限次元多元環（hypercomplex system）が研究された．その後，1937 年の Brauer-Nesbitt [9] でこの多元環の重要性が主張され，1939，1941 年の有名な Nakayama の Frobenius Algebra I, II [45] につながり，この環の構造論が展開された．この史実については，中山-東屋の代数学 II [46]，Nagao-Tushima [43]，Lam [33]，Yamagata の Handbook [64] を参照されたい．Nakayama は Frobenius 多元環を純環論的にとらえ，その性質で Quasi-Frobenius 環（QF-環）を定義した．この Artin 環は，際立って豊かな構造をもつ環として多くの環論研究者を魅了して止まず，今日まで連綿と研究されている．筆者の独断だが，この環は，おそらく永遠に研究されていく Artin 環であろう．Nakayama は Frobenius 多元環の研究から，[44] で generalized uniserial 環（Artinian serial 環）というもう一つの Artin 環も考

察している．本稿では，この環を Nakayama 環と呼ぶ．可換な Nakayama 環は，いわゆる Koethe 環 (すべての加群が巡回加群の直和に書ける環) というものである．本稿の話題 3 で，この Nakayama 環の構造論を，Harada 環の応用により，局所 QF-環上の skew-matrix ring なるものを考察して展開する．

本論に入る前にもう少し詳しく Frobenius 多元環と quasi-Frobenius 多元環 (QF-多元環) の足跡を見てみよう．

R を semiperfect 環とし，$E(R)$ を直交原始ベキ等元の完全集合とする．二つの 元 $e, f \in E(R)$ に対して，

$$S(eR_R) \cong T(eR_R)\ ,\quad S({}_RRe) \cong T({}_RRe)$$

が成り立つとき $(eR; Rf)$ を i-pair という．ただし，$S(X)$ は X の socle，$T(X)$ は $X/Rad(X)$ (ここで，$Rad(X)$ は X の Jacobson radical)．R が片側 Artin 環のとき $(eR; Rf)$ が i-pair ならば，Fuller [16] の結果から eR_R ，${}_RRf$ はともに injective になる．

さて，R を体 K 上 n 次元多元環とする：$R = u_1F \oplus \cdots \oplus u_nF$．$R$ の元 a に対して，n 次の正方行列 $L(a)$ と $R(a)$ による，次の様な二つの表現が考えられる：

$$a(u_1, \cdots .u_n) = (u_1, \cdots, u_n)L(a)\ ,\ {}^T(u_1, \cdots, u_n)a = R(a)^T(u_1, \cdots, u_n)\ .$$

この $L(a),\ R(a)$ をそれぞれ右正則表現，左正則表現というが，或る正則行列 P により $PL(a) = R(a)P$ となるとき，これらの表現は同値であるという．Frobenius 多元環とは，すべての a に対して $L(a)$ と $R(a)$ が同値になることである．Frobenius 多元環にはいくつかの言い換えがある．そのうち三つをここで紹介する．R を体 K 上有限次元多元環とする．

(1) $R^* = \mathrm{Hom}_K(R, K)$ とおくと，R^* は (R, R)-bimodule になる．R が Frobenius 多元環であることが，右，或いは左 R-module として $R \cong R^*$ であることで特徴付けられる．ついでながら，$(R, R)-$module として $R \cong R^*$ のとき，R を対称多元環といい，すべての 原始ベキ等元 e に対して $S(eR_R) \cong T(eR_R)$ and $S({}_RRe) \cong T({}_RRe)$ のとき，R を弱対称多元環という．

(2) Frobenius 多元環は，R の右 ideal A と左 ideal B に対して，次の条件が成り立つことで特徴付けられる．

$$rl(A) = A\ ,\ lr(B) = B$$
$$\dim(A) + \dim(r(B)) = \dim(R)\ ,\ \dim(B) + \dim(l(A)) = \dim(R)$$

ただし，$l(X)$ ，$r(X)$ はそれぞれ X の左 annihilator ideal，右 annihilator ideal，$\dim(X)$ は X の K 上次元．

（３）Rの任意の原始ベキ等元 e に対して，原始ベキ等元 f があって $(eR; Rf)$ が i-pair になり，R の直既約分解の中で eR_R と同型なものの個数と ${}_RRf$ (或いは fR_R) と同型なものの個数が等しい，という条件で，Nakayama は Frobenius 多元環を特徴付けた．さらに「同型なものの個数」に関する条件を除いた，始めの部分の条件で quasi-Frobenius 多元環を定義したのだが，このような形にすれば Frobenius 多元環も quasi-Frobenius 多元環も体の作用が見えなくなる．そしてこの見地から，そのままの形で有限次元多元環を Artin 環に換えて Frobenius 環と quasi-Frobenius 環 (QF-環) が定義されたのである．ここで，basic な Artin 環では Frobenius 環と quasi-Frobenius 環の区別がない点に注意．

QF-環は，Nakayama，Thrall，Ikeda，Morita，Tachikawa，Faith，Osofsky，Harada 等の研究を経て，他の環についてもそうであるように，Category Theory，Homological Algebra の手法により研究領域が広がっていった．まず，1948 年，Thrall [60] は QF 環を分析し，その環のもつ性質で QF-1，QF-2，QF-3 という三つの Artin 環を導入した：

右 QF-1 : 右 faithful module は balance module である．
右 QF-2 : 右 indecomposable projective module の socle は simple である．
右 QF-3 : R の右 injective hull は projective である．

QF-環については，現在次のような特徴付けが出来ている．

定理 A. 次の条件は同値である．

(1) R : QF-環．
(2) R : 右 Noetherian，右 self-injective．
(3) R : 左 Noetherian，左 self-injective．
(4) R : 右 Noetherian かつ次の条件をみたす：
$rl(A) = A$ $\forall$ 右 ideal A， $lr(B) = B$ $\forall$ 左 ideal B．
(5) R : Artinian かつ (4) の条件 (a), (b) をみたす．
(6) $\mathrm{Hom}_R(*, R)$ は有限生成 左 R-modules の class と有限生成 右 R-modules の class の間の Morita duality を与える．
(7) すべての 右 injective module は projective である．
(8) すべての 右 projective module は injective である．

QF-環の研究は，このように QF-環の性質を探求し，その性質で QF-環の特徴付けを与えるというスタイルで進展している．そして不思議なことに，このような問題が提起されると，問題の中にはとてつもなく難問となって何十年も

の間未解決になっているものがある．たとえば，Nakayama 予想，Faith 予想，FGF-予想 等．Nakayama 予想 については Chang Chang Xi [63]，Faith 予想，FGF-予想については Nicholson-Yousif [47] を参照．

筆者は冒頭で旧来とは違う視点で QF-環を論ずると述べたが，その意味は，QF-環の特徴付け，あるいはその周辺の表現論を調べるといった研究ではなく，この環の内部構造を応用した研究の話題を紹介するということである．

QF-環は，環論，群論以外の分野でも有用な環のようである．Lam [33] に次のような記述がなされている (原文のまま):

Besides the connection to group representation theory, Frobenius rings appear also in other brances of algebra. For instance, commutative local Frobenius rings are precisely the zero-dimensional local Gorenstein rings: these rings play an interesting role in number theory, algebraic geometry, and combinatorics. Frobenius algebras have also shown up in the recent study of Hopf algebras and Koszul algebas. Today, the use of Frobenius rings has reached way beyond the realm of pure algebra and ring theory. For instance, some applications of Frobenius rings to coding theory are presented in J. A. Wood's recent article. In topology and geometry, Frobenius algebras occur as cohomology rings of compact oriented manifolds and as quantum cohomology rings of certain compact Kaehler manifolds, and they have also shown up in the recent work on the solutions of the Yang-Baxter equation. In March/April 1996 I attended the series of Hitchcock Lectures on geometry and phisics given by Chern Professor Sir Michael F. Atiyah at Berkeley, and was delighted to see that one of his transparencies in Lecture 3 displayed the impressive equation

$$\text{“TOP QFT } (d = 1) = \text{Frobenius algebra”}$$

この記述を読めば，Frobenius 多元環および QF-環が群論，環論を含む広い領域にわたって重要な環であることが了解できよう．

さて，これから本論に入るが，詳しい証明等についてはすべて馬場-大城の Lecture Note [6] を参照．本稿は，この Lecture Note に収録した内容の要約である．

List of Symbols

以下の記号を断りなしに使用する．

M_R : R 上の unitary 右 module．

$E(R)$: semiperfect ring R の直交原始ベキ等元の完全集合．

id_X , 或いは単に $id : X$ の identity map .
$J(M)$: module M の Jacobson radical .
$J(R)$, 或いは単に J : 環 R の Jacobson radical .
$S(M)$: module M の socle .
$S_k(M)$: 右 (resp. 左) R-module M の k-th socle
$T(M)$: M の factor module $M/J(M)$.
$I(M)$: M の injective hull .
$N \subseteq_e M$: N は module M の essential submodule .
$N \subseteq_c M$: N は M の co-essential submodule .
$N \ll M$: N は M の superfluous (small) submodule .
$r_S(T)$ 或いは単に $r(S) : T$ の S での 右 annihilator ideal .
$l_S(T)$ 或いは単に $r(S) : T$ の S での 左 annihilator ideal .
$|\, X \,|$: X の cardinal .
$(Q)_{\sigma,c,n}$: the skew matrix ring over Q with respect to (σ, c, n).
$\langle a \rangle_{ij}$: (i, j)-entry が a で他の成分が 0 なる matrix .
$F(R)$: R の frame QF-部分環 .
$\dim(V_D)$: vector space V_D の次元 .

準備

後に使う , Nakayama 置換 , Algebra としての Nakayama 自己同型写像 , 環としての Nakayama 自己同型写像などについて述べる .

R を K 上の Frobenius 多元環とし , $\phi : R_R \cong R^* = \mathrm{Hom}_K(R, K)_R$ とする . 写像 $f : R \times R \to K,\ (r, s) \mapsto \phi(r)(s)$ は nonsingular associative K-bilinear mapping である . ここで "nonsingular" とは $f(a, A) = 0$ ならば $a = 0$ のことで , "associative" とは $f(ab, c) = f(a, bc)\ \ \forall a, b, c \in R$ のことである . 任意の $a \in R$ に対して , $\exists$ unique $b \in R$ s.t. $f(a, x) = f(x, b)\ \ \forall x \in R$. このとき , 写像 $\tau : R \to R,\ a \mapsto b$ は R の K-algebra 自己同型写像になる . この写像を本稿では , 後で定義する環としての Nakayama 自己同型写像と区別するために , 多元環としての R の Nakayama 自己同型写像と呼ぶ . Nakayama 自己同型写像は , 内部自己同型写像の違いを除いて一意的に決まることが知られている . Nakayama 自己同型写像は , Nakayama 置換を引き起こすという顕著な性質を有する . (Nakayama 置換については後で説明する .)

次に , 環としての Nakayama 自己同型写像について説明をする . R を QF-環とし , $E(R)$ を $E(R) = \{e_{ij}\}_{i=1,j=1}^{m\ \ p(i)}$, ただし (i) $i = k \Leftrightarrow e_{ij}R_R \cong e_{kl}R_R$,

(ii) $j \neq l \Rightarrow e_{ij}R_R \not\cong e_{il}R_R$，と表そう．このとき，置換

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & \cdots & e_{m1} \\ e_{\pi(1)1} & e_{\pi(2)1} & \cdots & e_{\pi(m)1} \end{pmatrix}$$

で，$S(e_{i1}R) \cong T(e_{\pi(i)1}R)\ \ \forall i$ をみたすものがとれる．特に，$p(i) = p(\sigma(i))\ \forall i$ が成り立つとき，R を Frobenius 環といい，

$$\begin{pmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1p(1)} & \cdots & e_{m1} & \cdots & e_{mp(m)} \\ e_{\sigma(1)1} & \cdots & e_{\pi(1)p(\sigma(1))} & \cdots & e_{\pi(m)1} & \cdots & e_{\sigma(m)p(\sigma(m))} \end{pmatrix}$$

を R の Nakayama 置換という．

この Nakayama 置換に対して，R の自己同型写像 τ で $\tau(e_{ij}) = e_{\sigma(i)j}\ \ \forall i = 1, \ldots, m,\ \forall j = 1, \ldots, p(i)$ をみたすものを，R の環としての Nakayama 自己同型写像という．一般には，Frobenius 環は，環としての Nakayama 自己同型写像を持たない (Koike [27])．Frobenius 多元環では，多元環としての Nakayama 自己同型写像は，環としての Nakayama 自己同型写像になるが，環としての Nakayama 自己同型写像は，多元環としての Nakayama 自己同型写像になるとは限らない．その意味では，環としての Nakayama 自己同型写像は，多元環としての Nakayama 自己同型写像を含む広い意味での概念として使用する．以後， Nakayama 自己同型写像といえば，環としての Nakayama 自己同型写像を意味する．

Artin 環 R が Nakayama 環であるとは，R のすべての原始ベキ等元 e に対して，eR_R および ${}_RRe$ が uniserial であるときをいう．次の結果はよく知られている．

定理 B ([45]). R が Nakayama 環であれば，すべての右 $R-$module は uniserial modules の直和で表される．また，この逆も成り立つ．

この結果から，Nakayama 環は有限表現型であることが分かる．

話題 1: Harada 環と frame QF-部分環

R-module M_R は，M を含む任意の injective module の small submodule であるとき small module とよび，small submodule でないとき non-small module という．双対的に，任意の projective module P と，P から M への epimorphism f に対して，Ker f が essential submodule であるとき，M を cosmall module とよび，cosmall でないとき non-cosmall module という．

これらの概念を用いて，Harada は [18]，[19] でこれから述べる新しい Artin 環の基となる，次の二つの条件を考察している．

$(*)$ すべての non-small 右 R-module は，0 でない injective module を含む．
$(*)^*$ すべての non-cosmall 右 R-module は，0 でない projective summand 含む．

Harada は，これらの条件を ideal 論的に次のように特徴付けた．

定理 1.1. 右 Artin 環 R について，次の条件は同値である．

(1) R は $(*)$ をみたす．
(2) eR_R が non-small module となる任意の $e \in E(R)$ に対して，$\exists\, n(e) \in \mathbb{N}_0$:
  (a) $eR/S_{i-1}(eR_R)$ は injective $\forall i = 1, \ldots, n(e)$，
  (b) $eR/S_{n(e)}(eR_R)$ は small．

定理 1.2. 右 Artin 環 R について，次の条件は同値である．

(1) R は $(*)^*$ をみたす．
(2) 任意の $f \in E(R)$ に対して，$e \in E(R)$ で eR_R は injective かつ $\exists j \in \mathbb{N}_0$: $fR \cong eJ^j$ なるものがとれる．

定義. 定理 1.1 をみたす右 Artin 環を右 Harada 環と呼び，定理 1.2 をみたす右 Artin 環を右 co-Harada 環と呼ぶ．

右 Harada 環と右 co-Harada 環をこのように定義するのだが，意外なことに, 次はこれらの環は同じ環であることを示している．

定理 1.3. R : 左 co-Harada 環 $\Longleftrightarrow$ R : 右 Harada 環．
従って，R : 左 Harada 環 $\Longleftrightarrow$ R : 右 co-Harada 環.

これより，右 Harada 環は両側 Arin 環であることが分かる．この事実より，直ちに右 Harada 環の Morita 自己双対性が問題となる．このことについては，話題 2 で詳しく述べる．

Harada は，1970年の終わりから1980年の初めにかけて，この新しい Artin 環を small modules，cosmall modules を用いて誕生させたのだが，同じ頃，injective modules，projective modules の持つ顕著な性質である extending property と lifting property の研究も行っている．これらの概念が，後に Harada 環の研究に必要不可欠な強力な武器となる．一方，この extending property，lifting property そのものの研究は国内外の多くの研究者によって研究され，現在は一つの研究領域が形成されている．

この萌芽的研究を，もう少し詳しく述べよう．Harada は module M について「M の任意の simple submodule A が，M の直和因子に essential に拡張される」, つまり「M の直和分解 $M = A^* \oplus A^{**}$ で，$A \subseteq_e A^*$ をみたすものがと

れる」という extending property と，その双対として「M の任意の maximal submodule A が，M の直和因子に co-essential に lift される」,「つまり「M の直和分解 $M = A^* \oplus A^{**}$ で，$A \cap A^* \ll A^*$ かつ $A^{**} \subseteq A$ をみたすものがとれる 」という lifting property を研究している．これらの property において，simple submodules, maximal submodules をすべての submodules にした性質をもつ module を，それぞれ extending module, lifting module と呼ぶ．歴史的には，これらの module は Utumi [61] において “von Noumann regular ring R が右 continuous であるとは，R_R が extending module である” と定義されていて，extending module が explicitly に使われている．一方，implicitly ではあるが，Bass [7] で，“環 R : semiperfect $\Longleftrightarrow$ R_R : lifting” という形で，lifting module が本質的に考察されている．

Harada の extending property および lifting property は，局所的な property である．しかし，それゆえに有用な概念となって，環論，加群論に大きな影響をもたらしている．1980 年代から最近にかけて，extending property と lifting property に関する次の 4 冊の本が出版されていることがこの状況をよく物語る．

1. M. Harada, *Factor Categories with Applications to Direct Decomposition of Modules*; Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 88, Marcel Dekker (1983).
2. S. H. Mohamed and B. H. Müller, *Continuous Modules and Discrete Modules*, London Mathematical Society Lecture Notes 147, Cambridge Univ. Press (1990).
3. N. V. Dung, D. V. Huynh, P. F. Smith, and R. Wisbauer, *Extending Modules*, Pitman Reserach Notes in Mathematics Series, 313, London (1994).
4. J. Clark, C. Lomp, N. Vanaja and R. Wisbauer, *Lifting modules*, Birkhauser Boston, Boston (2007) .

さて，話を Harada 環に戻そう．Harada は Harada 環と，extending property や lifting property との関連については何も触れていないように思える．しかし，次の二つの定理を見れば，無意識のうちに両方を考察していた，ということになるのかもしれない（本人に未だ確認はしていないのだが.）

定理 1.4. 環 R について，次は同値である：

(1) R は右 Harada 環である．
(2) すべての injective 右 R-module は lifting module である．
(3) R は右 perfect 環で，すべての injective 右 R-modules のクラスは small

cover で閉じる．つまり，任意の全射 R-準同型 $f : M \to E$ に対して， E が injective かつ $\mathrm{Ker}\, f \ll M$ ならば，M も injective ．

(4) すべての右 R-module は，injective module と small module の直和で書ける．

定理 1.5. 環 R について，次は同値である：

(1) R は 右 co-Harada 環 (左 Harada 環) である．
(2) すべての projective 右 R-module は extending module である．
(3) すべての projective 右 R-modules のクラスは essential extension で閉じる．
(4) すべての右 R-module は， projective module と singular module の直和で書ける．

系.

(a) 右 Harada 環は semiprimary QF-3 環である．
(b) QF-環は自明に左, 右 Harada 環であるが，Nakayama 環も左, 右 Harada 環である (定理 1.5 の (4) からいえる)．

定理 1.6. 次の条件は同値である．

(x) R : QF-環．
(a) すべての右 projective R-module は injective である．
(a') すべての右 injective R-module は projective である．

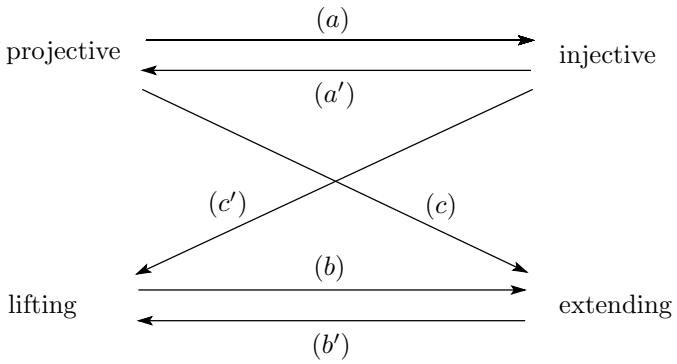
この Figure での条件 $(b), (b'), (c), (c')$ は下記に述べる条件である.

定理 1.7. 次の条件は同値である．

(y) R : Nakayama 環．
(b) R は右 perfect ring かつ，すべての右 lifting R-module は extending．
(b') すべての右 extending R-module は lifting．

定理 1.3 - 定理 1.6 より， Harada 環に関して次がいえる．

定理 1.8. 次の条件は同値である．



Figure

(z) R : 右 Harada 環．
(c) すべての右 projective R-module は extending である．
$(c^{'})$ すべての左 injective R-module は lifting である．

QF-環，Nakayama 環，片側 Harada 環を加群論的見れば，このようにきれいな関係にある．イデアル論的にも，次からの話題で述べるように，三つ巴になって深く関連している．特に，Nakayama 環は，骨格は Harada 環で，深部に局所 QF-環があり，この局所 QF-環上の skew-matrix 環の剰余環として実現できる構造になっている．

話題 2 ：Harada 環と frame QF-部分環

片側 Harada 環を考えるとき，この概念が Morita invariant であるから，basic 環の場合を考えてよい．この話題では，次の定理を紹介する．

定理 2.1. R を basic indecomposable Harada 環とする．R は枠組みとなる QF-部分環 $F(R)$ を持ち，そのブロック拡大の上階段型剰余環として構成される．

英語で書けば “For a given basic indecomposable left Harada ring R, there exists a QF-subring $F(R)$ of R (which is called the frame QF-subring of R) and R can represented as an upper staircase factor ring of a block extension of $F(R)$” となる．

以下で，$F(R)$ とブロック拡大の上階段型剰余環について説明する．

R を basic indecomposable 左 Harada 環 (= 右 co-Harada 環) とする．直交ベキ等元の完全集合 $E(R)$ は，$E(R) = \{e_{ij}\}_{i=1,j=1}^{m\ n(i)} = \{e_{11}, \ldots, e_{1n(1)}, \ldots, e_{m1}, \ldots, e_{mn(m)}\}$ が

(1) $e_{i1}R$ は injective 右 R-module $\forall i = 1, \ldots, m$，
(2) $e_{ij}R \cong e_{i,j-1}J \ \forall i = 1, \ldots, m, \ \forall j = 2, \ldots, n(i),$

をみたすようにとれる．このようにとったとき，$E(R) = \{e_{ij}\}_{i=1,j=1}^{m\ n(i)}$ を well-indexed set という．

各 i に対して，$e_{i1}R$ は injective だから，$(e_{i1}R; Re_{st})$ が i-pair になる $s \in \{1, \ldots, m\}$, $t \in \{1, \ldots, n(i)\}$ がとれる．これら s，t は一意的にきまるので，$\sigma(i) = s$，$\rho(i) = t$ により二つの写像：$\sigma, \rho : \{1, \ldots, m\} \to \mathbb{N}$ が定義できる．つまり，$(e_{i1}R; Re_{\sigma(i)\rho(i)})$ は i-pair，そして $1 \leq \rho(i) \leq n(\sigma(i))$．特に，$\sigma$ が $\{1, \ldots, m\}$ の置換になるとき，R を type ($\sharp$) とよぶ．

F を basic semiperfect 環とし，$E(F) = \{e_1, \ldots, e_y\}$ とおく．$A_{ij} = e_iFe_j$ $\forall i, j$，$Q_i = A_{ii}$ $\forall i$ とおき，F を行列で表現する：

$$F = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1y} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2y} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{y1} & A_{m2} & \cdots & A_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 & A_{12} & \cdots & A_{1y} \\ A_{21} & Q_2 & \cdots & A_{2y} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{y1} & \cdots & A_{y,y-1} & Q_y \end{pmatrix}.$$

$k(1), \ldots, k(y) \in \mathbb{N}$ に対して，F のブロック拡大 $F(k(1), \ldots, k(y))$ を次のように定義する：各 i, $s \in \{1, \ldots, y\}$, $j \in \{1, \ldots, k(i)\}$, $t \in \{1, \ldots, k(s)\}$ に対して

$$P_{ij,st} := \begin{cases} Q_i & (\, i = s,\ j \leq t \text{ のとき }), \\ J(Q_i) & (\, i = s,\ j > t \text{ のとき }), \\ A_{is} & (\, i \neq s \text{ のとき }). \end{cases}$$

$$P(i, s) := \begin{pmatrix} P_{i1,s1} & P_{i1,s2} & \cdots & P_{i1,sk(s)} \\ P_{i2,s1} & P_{i2,s2} & \cdots & P_{i2,sk(s)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{ik(i),s1} & P_{ik(i),s2} & \cdots & P_{ik(i),sk(s)} \end{pmatrix}.$$

つまり，$i = s$ のとき， $P(i, s)$ は $k(i) \times k(i)$ matrix

$$P(i,i) = \begin{pmatrix} Q_i & \cdots & \cdots & Q_i \\ J(Q_i) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ J(Q_i) & \cdots & J(Q_i) & Q_i \end{pmatrix}.$$

これを $Q(i)$ とおく．$i \neq s$ のとき, $P(i,s)$ は $k(i) \times k(s)$ matrix

$$P(i,s) = \begin{pmatrix} A_{is} & \cdots & A_{is} \\ & \cdots & \\ A_{is} & \cdots & A_{is} \end{pmatrix}.$$

ここで $P = F(k(1), \ldots, k(y))$ を

$$P = F(k(1), \ldots, k(y)) = \begin{pmatrix} P(1,1) & P(1,2) & \cdots & P(1,y) \\ P(2,1) & P(2,2) & \cdots & P(2,y) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P(y,1) & P(y,2) & \cdots & P(y,y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Q(1) & P(1,2) & \cdots & P(1,y) \\ P(2,1) & Q(2) & \cdots & P(2,y) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P(y,1) & P(y,2) & \cdots & Q(y) \end{pmatrix}.$$

とおく．F が basic indecomposable semiperfect 環であるから，P も basic indecomposable semiperfect 環 になる (matrix size は $k(1) + \cdots + k(y)$)．$F(k(1), \ldots, k(y))$ を，$\{k(1), \ldots, k(y)\}$ に対する F のブロック拡大という．P を

$$P = F(k(1), \ldots, k(y)) = \begin{pmatrix} P_{11,11} & \cdots & P_{11,1k(1)} & \cdots & P_{11,y1} & \cdots & P_{11,yk(y)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P_{1k(1),11} & \cdots & P_{1k(1),1k(1)} & \cdots & P_{1k(1),y1} & \cdots & P_{1k(1),yk(y)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P_{y1,11} & \cdots & P_{y1,1k(1)} & \cdots & P_{y1,y1} & \cdots & P_{y1,yk(y)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P_{yk(y),11} & \cdots & P_{yk(y),1k(1)} & \cdots & P_{yk(y),y1} & \cdots & P_{yk(y),yk(y)} \end{pmatrix}.$$

と表現すれば，形がより分りやすいであろう．

$i = 1, \ldots, y,\ j = 1, \ldots, k(i)$ に対して

$$p_{ij} = \langle 1 \rangle_{ij,ij}$$

おくと，$\{p_{ij}\}_{i=1,j=1}^{y\ \ k(i)}$ は $P = F(k(1), \ldots, k(y))$ の直交ベキ等元の完全集合になる．これを $E(F(k(1), \ldots, k(y)))$ とおく．

注意. $p_{ij}P_P \cong p_{i1}J(P)_P^{j-1} \quad \forall i = 1, \ldots, y$，$\forall j = 1, \ldots, k(i)$．

定理 2.2. F が basic indecomposable QF-環ならば，$P = F(k(1), \ldots, k(y))$ は basic indecomposable type $(\#)$ 右 Harada 環 で，$E(P) = \{p_{ij}\}_{i=1,j=1}^{y\ \ k(i)}$ が well-indexed set になる．

さて，F を basic indecomposable QF-環とし，その Nakayama 置換を

$$\begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_y \\ e_{\sigma(1)} & \cdots & e_{\sigma(y)} \end{pmatrix}$$

とする．$P = F(k(1), \ldots, k(y))$ を作り，$i \in \{1, \ldots, y\}$ に対して i-pair $(e_iP; Pe_{\sigma(i)})$ を考える．$S(A_{ij}) = S({}_{Q_i}A_{ij}) = S(A_{ij_{Q_j}})$ とおく．ここで，$P(i, \sigma(i))$ のタイル $S(A_{ij})$ でできる上階段型 $(Q(i)\text{-}Q(\sigma(i)))$-subbimodule $S(i, \sigma(i))$ を次のように作る：

(I) $i = \sigma(i)$ のとき：$S(A_{ij})$ は $Q_i = A_{ii}$ の左, 右 ideal として simple である．$S_i = S(Q_i)$ とおく．このとき $k(i) \times k(i)$ matrix

$$Q(i) = \begin{pmatrix} Q_i & \cdots & \cdots & Q_i \\ J(Q_i) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ J(Q_i) & \cdots & J(Q_i) & Q_i \end{pmatrix},$$

の中で $P(i, i)$ の上階段型 $(Q(i)\text{-}Q(i))$-subbimodule $S(i, i) = S(i, \sigma(i))$ を次のように作る：

$$S(i,i) = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \ \cdots \ 0}^{k} & & \\ & & \\ 0 & & \mathrm{S} \\ & & \\ & & \end{pmatrix}, \quad k \geq 1, S = S(Q_i)$$

ただし階段は対角線を横切る場合は 1 回のみとし，横切らない場合は

$$S(i,i) = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \cdots 0}^{k} & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad k \geq 1$$

なる形である．S_i が Q_i の ideal であるから，$S(i,i) = S(i,\sigma(i))$ は $Q(i)$ の ideal になる．

$\overline{Q(i)} = \overline{P(i,\sigma(i))} = P(i,\sigma(i))/S(i,\sigma(i))$ とおき，これを次のように表現する:

$$\overline{Q(i)} = \begin{pmatrix} \overbrace{Q_i \cdots Q_i}^{k} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{Q_i} \end{pmatrix} \quad \text{或いは} \quad \overline{Q(i)} = \begin{pmatrix} \overbrace{Q_i \cdots Q_i}^{k} & & \\ & \ddots & \\ & & Q_i \end{pmatrix}$$

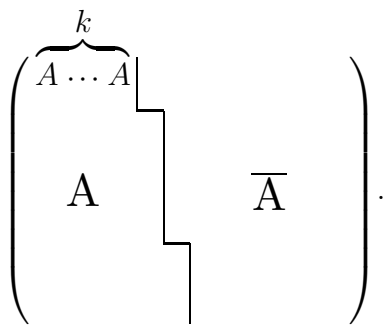
(II) $i \neq \sigma(i)$ のとき： $S_{i\sigma(i)} = S({}_{Q_i}A_{i\sigma(i)}) = S(A_{i\sigma(i)_{Q_{\sigma(i)}}})$ とおく．$S_{i\sigma(i)}$ は $A_{i\sigma(i)}$ の $(Q_i\text{-}Q_{\sigma(i)})$-subbimodule．そして，$(Q(i)\text{- }Q(\sigma(i)))$-bimodule である

$$P(i,\sigma(i)) = \begin{pmatrix} A_{i\sigma(i)} & \cdots & A_{i\sigma(i)} \\ & \cdots & \\ A_{i\sigma(i)} & \cdots & A_{i\sigma(i)} \end{pmatrix} \quad (\ k(i) \times k(\sigma(i))\ \text{matrix}),$$

の中で，$P(i,\sigma(i))$ の $S = S_{i\sigma(i)}$ タイル張りの上階段型 subbimodule $S(i,\sigma(i))$ を作る:

$$\begin{pmatrix} \overbrace{0 \cdots 0}^{k} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}, \quad k \geq 1$$

そして，$\overline{P(i,\sigma)} = P(i,\sigma(i))/S(i,\sigma(i))$ とおき，$\overline{P(i,\sigma)}$ を次のように表現する:



次に，$P = F(k(1), \ldots, k(y))$ の部分集合 X をつくる：

$$X = \begin{pmatrix} X(1,1) & X(1,2) & \cdots & X(1,y) \\ X(2,1) & X(2,2) & \cdots & X(2,y) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X(y,1) & X(y,2) & \cdots & X(y,y) \end{pmatrix},$$

ここで，$X(i,i)$ $(\subseteq Q_i)$，$X(i,j)$ $(\subseteq P(i,j))$ を次のように作る：

$$X(i,i) = \begin{cases} 0 & (\, i \neq \sigma(i) \text{ のとき }), \\ S(i,i) & (\, i = \sigma(i) \text{ のとき }), \end{cases}$$

$$X(i,j) = \begin{cases} 0 & (\, j \neq \sigma(i) \text{ のとき }), \\ S(i,j) & (\, j = \sigma(i) \text{ のとき }). \end{cases}$$

このとき，X は $P = F(k(1), \ldots, k(y))$ の ideal になる．剰余環 $F(k(1), \ldots, k(y))/X$ を $P = F(k(1), \ldots, k(y))$ の上階段型剰余環と呼ぶのである．

$$P = F(k(1), \ldots, k(y)) = \begin{pmatrix} P(1,1) & P(1,2) & \cdots & P(1,y) \\ P(2,1) & P(2,2) & \cdots & P(2,y) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P(y,1) & P(y,2) & \cdots & P(y,y) \end{pmatrix},$$

において，$P(i,\sigma(i))$ を $\overline{P(i,\sigma(i))}$ で置き換え，$\overline{P} = F(k(1), \ldots, k(y))/X$ とお

く．$\overline{P}$ を次のように表現しよう：

$$\overline{P} = \begin{pmatrix} P(1,1) & \cdots & \overline{P(1,\sigma(1))} & \cdots & \cdots & \cdots & P(1,y) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P(i,1) & \cdots & \cdots & \overline{P(i,\sigma(i))} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P(y,1) & \cdots & \cdots & \cdots & \overline{P(y,\sigma(y))} & \cdots & P(y,y) \end{pmatrix}.$$

(**I**), (**II**) における matrix において $k \geq 1$ であることと $\overline{P}$ の形から $\overline{P} = F(k(1), \ldots, k(y))/X$ は basic indecomposable 左 Harada 環であることが分かる．更に，$S(i,\sigma(i))$ が上階段型であることから，左 Harada 環 $P = P_1 = F(k(1), \ldots, k(y))$, P_2, P_3, …, P_{l-1}, $P_l = \overline{P}$ が得られ，自然な上への環準同型 $\varphi_i : P_i \to P_{i+1}$ で $\operatorname{Ker}\varphi_i$ が P_i の simple ideal になるものが作れる：

$$P_1 \xrightarrow{\varphi_1} P_2 \xrightarrow{\varphi_2} P_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots \xrightarrow{\varphi_{l-2}} P_{l-1} \xrightarrow{\varphi_{l-1}} P_l = \overline{P} = F(k(1), \ldots, k(y))/X.$$

かくして次の定理を得る．

定理 2.3. basic indecomposable QF-環 F に対して，F のブロック拡大 $P = F(k(1)\ldots., k(y))$ の上階段型剰余環 P/X は basic indecomposable 左 Harada 環になり，さらに次のような basic な左 Harada 環の自然な surjective 環準同型 φ_i で Kernel が simple になるものが作れる：

$$P_1 \xrightarrow{\varphi_1} P_2 \xrightarrow{\varphi_2} P_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots \xrightarrow{\varphi_{l-2}} P_{l-1} \xrightarrow{\varphi_{l-1}} P_l = \overline{P} = F(k(1), \ldots, k(y))/X.$$

例 2.1. F として局所 QF-環をとり，ブロック拡大環 $Q(4)$ を作る:

$$Q(4) = \begin{pmatrix} Q & Q & Q & Q \\ J & Q & Q & Q \\ J & J & Q & Q \\ J & J & J & Q \end{pmatrix}$$

そして

$$X = \begin{pmatrix} 0 & S & S & S \\ 0 & 0 & S & S \\ 0 & 0 & S & S \\ 0 & 0 & 0 & S \end{pmatrix} \quad (\text{ここで，} S = S(Q)\,)$$

を作ると

$$Q(4)/X = \begin{pmatrix} Q & \overline{Q} & \overline{Q} & \overline{Q} \\ J & Q & \overline{Q} & \overline{Q} \\ J & J & \overline{Q} & \overline{Q} \\ J & J & J & \overline{Q} \end{pmatrix}$$

は basic indecomposable 左 Harada 環である．

例 2.2. F として, basic indecomposable QF-環 R で，$E(R) = \{e, f\}$ かつ

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & e \end{pmatrix}$$

が Nakayama 置換であるものを考える．

$$R = \begin{pmatrix} Q & A \\ B & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eRe & eRf \\ fRe & fRf \end{pmatrix}.$$

とおき，R のブロック拡大 $R(3,3)$ を作る:

$$R(3,3) = \begin{pmatrix} Q & Q & Q & A & A & A \\ J & Q & Q & A & A & A \\ J & J & Q & A & A & A \\ B & B & B & W & W & W \\ B & B & B & K & W & W \\ B & B & B & K & K & W \end{pmatrix}$$

X として

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S(A) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S(A) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S(B) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

をとると

$$R(3,3)/X = \begin{pmatrix} Q & Q & Q & A & A & \overline{A} \\ J & Q & Q & A & A & \overline{A} \\ J & J & Q & A & A & A \\ B & B & \overline{B} & W & W & W \\ B & B & B & K & W & W \\ B & B & B & K & K & W \end{pmatrix}$$

は basic indecomposable 左 Harada 環になる．

さて，本話題の最初に述べた定理の主張は

“R を basic indecomposable Harada 環とすると，R は枠組みとなる QF-部分環 $F(R)$ を持ち，そのブロック拡大の上階段型剰余環として構成される”

であったが，これは要するに，すべての basic indecomposable 左 Harada 環が上の定理のようにして構成されるということである．この定理の証明は易しくはない．詳しくは Baba-Oshiro [6] を参照．ここでは，簡単な例を挙げて，$F(R)$ が R のどの部分に現れるのか，ということを見るにとどめる．

R を basic indecomposable 左 Harada 環 とし，直交ベキ等元の完全集合 $E(R) = \{e_{ij}\}_{i=1,j=1}^{m \quad n(i)} = \{e_{11}, \ldots, e_{1n(1)}, \ldots, e_{m1}, \ldots, e_{mn(m)}\}$ を well-index set とする．このとき，$\{e_{11}, e_{21}, \ldots, e_{m1}\}$ の部分集合 $F = \{e_1, \ldots, e_y\}$ がとれて，R はブロック拡大 $F(n(1), \ldots, n(m))$ の上階段型剰余環になる．そして，この F がただ一組であることから，$(\sum_{i=1}^{y} e_i)R(\sum_{i=1}^{y} e_i)$ を，R の frame QF-部分環と呼び $F(R)$ と記す．

例2.3. R を basic indecomposable 左 Harada 環とし，$E(R) = \{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{21}, e_{22}\}$ を well-indexed set とする．$Q_i = e_{i1}Re_{i1}$, $J_i = J(Q_i)$, $A = e_{11}Re_{21}$, $B = e_{21}Re_{11}$ とおく（$i = 1, 2$）．$(e_{11}R; Re_{21})$, $(e_{21}R; Re_{12})$ が i-pair のとき，σ, ρ :

$\{1,2\} \to \mathbb{N}$ は $\sigma(1)=2,\ \rho(1)=1,\ \sigma(2)=1,\ \rho(2)=2$ となる．これより，

$$P(1,1)=\begin{pmatrix} Q_1 & Q_1 & Q_1 \\ J_1 & Q_1 & Q_1 \\ J_1 & J_1 & Q_1 \end{pmatrix}, \quad P(1,2)=\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \\ A & A \end{pmatrix},$$
$$P(2,1)=\begin{pmatrix} B & B & B \\ B & B & B \end{pmatrix}, \qquad P(2,2)=\begin{pmatrix} Q_2 & Q_2 \\ J_2 & Q_2 \end{pmatrix},$$
$$K(1,1)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K(1,2)=\begin{pmatrix} 0 & S(A_{Q_2}) \\ 0 & S(A_{Q_2}) \\ 0 & S(A_{Q_2}) \end{pmatrix},$$
$$K(2,1)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & S(B_{Q_1}) \\ 0 & 0 & S(B_{Q_1}) \end{pmatrix}, \quad K(2,2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって

$$R \cong P/K = \begin{pmatrix} P(1,1) & P(1,2) \\ P(2,1) & P(2,2) \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} K(1,1) & K(1,2) \\ K(2,1) & K(2,2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} Q_1 & Q_1 & Q_1 & A & A \\ J_1 & Q_1 & Q_1 & A & A \\ J_1 & J_1 & Q_1 & A & A \\ B & B & B & Q_2 & Q_2 \\ B & B & B & J_2 & Q_2 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & S(A) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S(A) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S(A) \\ 0 & 0 & S(B) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S(B) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

これを簡単に

$$\begin{pmatrix} Q_1 & Q_1 & Q_1 & A & \overline{A} \\ J_1 & Q_1 & Q_1 & A & \overline{A} \\ J_1 & J_1 & Q_1 & A & \overline{A} \\ B & B & \overline{B} & Q_2 & Q_2 \\ B & B & \overline{B} & J_2 & Q_2 \end{pmatrix}$$

と書く．このとき，

$$F(R)=\begin{pmatrix} Q_1 & A \\ B & Q_2 \end{pmatrix}.$$

次に，$(e_{11}R; Re_{21})$, $(e_{21}R; Re_{22})$ が i-pair とすると

$$R \cong \begin{pmatrix} Q_1 & Q_1 & Q_1 & A & \overline{A} \\ J_1 & Q_1 & Q_1 & A & \overline{A} \\ J_1 & J_1 & Q_1 & A & \overline{A} \\ B & B & B & Q_2 & Q_2 \\ B & B & B & J_2 & Q_2 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} Q_1 & Q_1 & Q_1 & Q_1 & \overline{Q_1} \\ J_1 & Q_1 & Q_1 & Q_1 & \overline{Q_1} \\ J_1 & J_1 & Q_1 & Q_1 & \overline{Q_1} \\ J_1 & J_1 & J_1 & Q_1 & Q_1 \\ J_1 & J_1 & J_1 & J_1 & Q_1 \end{pmatrix}$$

と表現される．よって，$F(R) = Q_1$ である．

frame QF-subring の説明をしたついでに，左 Harada 環についての Morita の意味の自己双対性の状況を見てみよう．左 Harada 環 = 右 Harada 環であることや，加群論的に十分な自己双対性を有していることから，この環の自己双対性が成り立つことが予想される．しかし結論は Koike [27] によって否定的に解決された．Koike は Kraemer [31] の例を用いて反例を与えている．Koike はさらに [28] で Harada 環は自己双対的とまではいかないが Simson [58] の意味の almost 自己双対性をもつという結果も出している．

一般に Artin 環が Morita 双対を持つためには，Morita-Azumaya の定理から，その環が左，或いは右有限生成 injective cogenerator を有することの確認が必要となる．左 Harada 環は左, 右に関して有限生成 injective cogenerator を持つ．左に関しては定理 1.2 より分かり，右に関しては almost 自己双対性より確認できる．

R を basic indecomposable 左 Harada 環とし，$E(R) = \{e_{ij}\}_{i=1,j=1}^{m \quad n(i)}$ を well-indexed set とする．各 $e_{i1}R$ に対して

(1) $Re_{\sigma(i)\rho(i)}/S_{j-1}({}_RRe_{\sigma(i)\rho(i)}) \cong I(T({}_RRe_{ij}))\ \forall i = 1, \ldots, m,\ \forall j = 1, \ldots, n(i)$，

(2) $\sum\limits_{i=1}^{m}\oplus \sum\limits_{j=1}^{n(i)}\oplus Re_{\sigma(i)\rho(i)}/S_{j-1}({}_RRe_{\sigma(i)\rho(i)}) \cong I(T({}_RR))$.

よって，$G := I(T({}_RR))$ は有限生成 injective cogenerator であり，$T = \mathrm{End}({}_RG)$ とおくと，有限生成左 R-mod のクラスと有限生成右 T-mod のクラスの間に Morita duality がある．一般には $R \ncong T$，つまり R は自己双対ではないが，次の結果がいえる．

定理 2.4. basic indecomposable 左 Harada 環 R について，次は同値である．

(1) R の frame QF-subring $F(R)$ が Nakayama 自己同型をもつ．

(2) $F(R)$ から作られるすべてのブロック拡大の上階段剰余環は（従って R も）自己双対的である．

この定理から，QF-環が Nakayama 自己同型をもつかどうかが問題となるのだが，上記 Koike により反例を与えられ，Harada 環は一般には自己双対的でないことが分かっている．

定理 2.3 は Nakayama 環の自己双対性の確認に応用される．このことについて触れておこう．

Nakayama 環は Harada 環であるから，Harada 環に関する結果はそのまま Nakayama 環についても成り立つ：

定理 2.5.

(1) basic indecomposable Nakayama 環は，枠組みとなる QF-Nakayam 部分環 を持ち，そのブロック拡大の上階段型剰余環として表現される.
(2) basic indecomposable QF-Nakayama 環は，Nakayama 自己同型写像を持つから自己双対的である．

このようにして，広い枠組みの中で Nakayama 環の自己双対性が，概念的方法で確認できる．1980 年代，Nakayama 環の自己双対性が問題になり，Mano [34]，Haack [17]，Dischinger-Mueller [13] 等が研究していたのだが，Waschbusch [62] により，これは既に次の論文で解決されているというショッキングな報告があった．

K. Amdal and F. Ringdal, Catégories unisérialles, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série A-B* 267 (1968), A85–A87, B247–B249.

そして彼自身この論文のアイデアをなぞって証明を与えている．当時，筆者は Harada 環の応用として，定理 2.5 の形で証明を与えた ([53], [51]) . Haack は Nakayama 環の自己双対性を示すことには成功しなかったが，basic QF-Nakayam 環が Nakayama 自己同型を持つという結果には到達している．手法がテクニカルゆえに，その先が見えなかったのであろう．

Nakayama 環が QF-Nakayama 環から構成されるという結果で，Nakayama 環の構造論が終るのではない．QF-Nakayama 環のタイプを分析して，Nakayama 環が幾層もの構造を持つ Artin 環であるということを，次節で見ることにする．

話題 3：Nakayama 環の classification

Nakayama 環の 構造を列記すれば次のようになっている．

定理 3.1.

(1) basic indecomposable Nakayama 環は，frame QF-部分環のブロック拡大の上階段型剰余環として表現される．
(2) Nakayama 置換が identity でない basic indecomposable Nakayama QF 環は，局所 Nakayama 環上の skew matrix ring の剰余環になる．これより，frame QF-部分環の Nakayama 置換が identity でない basic indecomposable Nakayama 環は，局所 Nakayama 環上の skew matrix ring のブロック拡大上階段型剰余環として表現される．
(3) frame QF-部分環が identity でない Nakayama 置換をもつ basic indecomposable Nakayama 環は，さらに直接，局所 Nakayama 環上の skew matrix ring の剰余環になる．
(4) basic indecomposable Nakayama 環 R で，その frame QF-部分環が identity である Nakayama 置換をもつとき，剰余環 $R/S(R)$ は，局所 Nakayama 環上の skew matrix ring の剰余環として表現される．
(5) basic QF-Nakayama 環は Nakayama 自己同型写像を持つ．
(6) Nakayama 環は自己双対的である．

(1)，(5)，(6) については説明済み．(2) と (3) を見れば，Nakayama 環の本質が，局所 Nakayama 環上の skew-matrix ring であることが分る．この定理における skew-matrix ring と QF-Nakayama 環のタイプについて少し説明するが，詳細は Baba-Oshiro [6] を参照されたい．

通常の matrix ring を一般化したのが skew-matrix ring である．その説明の前に，QF-Nakayama 環のタイプについて分析をする．

F を basic indecomposable Nakayama QF-環とし，$e_nF, \ldots, e_1F$ を F の Kupisch series とする．つまり，e_iF の projective cover が $e_{i+1}R \ \ \forall i = 1, \ldots, n-1$．よく知られているように，$F$ の Nakayama 置換 は，ある i があって

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-i+1} & e_{n-i+2} & \cdots & e_n \\ e_i & e_{i+1} & \cdots & e_n & e_1 & \cdots & e_{i-1} \end{pmatrix}$$

となる．このとき，R を $\mathrm{KNP}(1 \to i)$-タイプと呼ぶ．$\mathrm{KNP}(1 \to 1)$-タイプ，$\mathrm{KNP}(1 \to 2)$-タイプ，$\mathrm{KNP}(1 \to n)$-タイプが重要である．

定理 3.2. $Q = e_1Fe_1$, $\overline{F} = F/S(F_F)$ とおく．

(1) 各 $i \in \{2, \ldots, n\}$ に対して，F が $\mathrm{KNP}(1 \to i)$-タイプならば，$\overline{F}$ は $\mathrm{KNP}(1 \to i-1)$-タイプの Nakayama QF-環である．
(2) F が $\mathrm{KNP}(1 \to 1)$-タイプならば，$\overline{F}$ は $\mathrm{KNP}(1 \to n)$-タイプの Nakayama QF-環である．

(3) F が $\mathrm{KNP}(1 \to n)$-タイプならば，$c \in J(Q)$ と $\sigma \in \mathrm{Aut}(Q)$ があって，F は Q 上の $\{\sigma, c, n\}$ に関する skew-matrix ring になる．

(4) $1 < i$ で F が $\mathrm{KNP}(1 \to i)$-タイプならば，$\mathrm{KNP}(1 \to n)$-タイプの basic indecomposable Nakayama QF-環があって，F はその環の自然な形の剰余環として表現される．

注意. (3) における $c \in J(Q)$, $\sigma \in \mathrm{Aut}(Q)$ を見つけるのに，$\mathrm{KNP}(1 \to 2)$-タイプを用いる．

さて (4) より定理 3.1 の (3) が示されるのである．

話は前後するが，次に skew-matrix ring について説明する．

Q を環とする．$c \in Q$，$\sigma \in \mathrm{End}(Q)$ は，$\sigma(c) = c$，$\sigma(q)c = cq \quad \forall q \in Q$ をみたすとする．R を，Q の元を成分とする $n \times n$ 行列の全体とする：

$$R = \begin{pmatrix} Q & \cdots & Q \\ & \cdots & \\ Q & \cdots & Q \end{pmatrix}$$

R に和を通常の行列の和で，積を次のように定義する．(x_{ik}) ,$(y_{ik}) \in R$ に対して，

$$(z_{ik}) = (x_{ik})(y_{ik})$$

ここで，z_{ik} は次のようなものである：

$$z_{ik} = \sum_{j<i} x_{ij}\sigma(y_{jk})c + \sum_{i \le j \le k} x_{ij}y_{jk} + \sum_{k<j} x_{ij}y_{jk}c \quad (i \le k \text{ のとき}),$$
$$z_{ik} = \sum_{j \le k} x_{ij}\sigma(y_{jk}) + \sum_{k<j<i} x_{ij}\sigma(y_{jk})c + \sum_{i \le j} x_{ij}y_{jk} \quad (k < i \text{ のとき}).$$

次のように理解してもよい：

$$\langle a\rangle_{ij}\langle b\rangle_{kl} = 0 \quad (j \ne k \text{ のとき}),$$
$$\langle a\rangle_{ij}\langle b\rangle_{jk} = \begin{cases} \langle a\sigma(b)\rangle_{ik} & (j \le k < i \text{ のとき}), \\ \langle a\sigma(b)c\rangle_{ik} & (k < j < i \text{ または } j < i \le k \text{ のとき}), \\ \langle ab\rangle_{ik} & (i = j \text{ のとき}), \\ \langle abc\rangle_{ik} & (i \le k < j \text{ のとき}), \\ \langle ab\rangle_{ik} & (k < i < j \text{ または } i < j \le k \text{ のとき}). \end{cases}$$

検証は一寸面倒であるが，結合法則

$$(\langle x\rangle_{ij}\langle y\rangle_{jk})\langle z\rangle_{kl} = \langle x\rangle_{ij}(\langle y\rangle_{jk}\langle z\rangle_{kl})$$

が成り立ち，R は環になる．この環を，(σ, c, n) に関する Q 上の skew matrix ring と呼び，

$$R = \begin{pmatrix} Q & \cdots & Q \\ & \cdots & \\ Q & \cdots & Q \end{pmatrix}_{\sigma,c,n}$$

或いは，単に $(Q)_{\sigma,c,n}$ で表す．σ が 恒等写像 id_Q で $c = 1$ のとき，$(Q)_{id_Q,1,n}$ は通常の行列環である．しかし，(σ, c, n) の取り方で，通常の行列環とはまったく違ってくる．

例 **3.1.** Q を体，$\sigma = id_Q,\ c = 0$ とすると

$$I = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ Q & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ Q & \cdots & Q & 0 \end{pmatrix}_{\sigma,c,n}$$

は R の ideal であり，R/I は通常の上三角行列環と同型になる．体上の上三角行列環は Nakayama 環であり，確かにこのように skew-matrix ring の剰余環として表現される．

定理 **3.3.** $R = (Q)_{\sigma,c,n}$ について次が成り立つ．

(1) Q が局所環ならば，R は basic indecomposable semiperfect ring である．
(2) Q が右 Artin (Noether) 環ならば，R も右 Artin (Noether) 環である．
(3) Q が局所 QF-環で $c \in J(Q)$ ならば，R は basic indecomposable QF-環で

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ e_n & e_1 & \cdots & e_{n-1} \end{pmatrix}$$

が Nakayama 置換となる．ここで，e_i は ii-成分が 1 でほかは 0 なる行列．
(4) 写像 $\tau : R \to R$,

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_{nn} & x_{n1} & \cdots & x_{n,n-1} \\ \sigma(x_{1n}) & \sigma(x_{11}) & \cdots & \sigma(x_{1,n-1}) \\ & \cdots & \cdots & \\ \sigma(x_{n-1,n}) & \sigma(x_{n-1,1}) & \cdots & \sigma(x_{n-1,n-1}) \end{pmatrix}$$

は環準同型である．特に，$\sigma \in \mathrm{Aut}(Q)$ ならば $\tau \in \mathrm{Aut}(R)$ である．
(5) Q が局所 Nakayama 環で $cQ = J(Q)$ ならば，R は Nakayama 自己同型写像 τ を持つ KNP$(1 \to n)$-タイプの basic indecomposable Nakayama QF-環になる．

さて，ここで話をもとに戻す．この (5) の逆がいえる．つまり，basic indecomposable KNP$(1 \to n)$-タイプの basic indecomposable Nakayama QF-環は，このような skew-matrix ring $(Q)_{\sigma,c,n}$ として表されるのである．また，(5) を用いて，すべての basic indecomposable Nakayama QF-環が Nakayama 自己同型写像を持つことが示されて，我々の見地から Nakayama 環の自己双対性が確認できるのである．

skew-matrix ring は，1975 年の Kupisch [32] で VPE-ring として定義されている．しかし，上述とは多少異なった形で定義されているため，“skew-matrix ring” のようには見えない．ここでは，1987 年の Oshiro [51] に従った．

以上見てきたとおり，Harada 環は局所 QF-環から構成され，Nakayama 環は Harada 環を枠組みとし，概観は局所 QF-環のタイル張りになっているとたとえてよい．Nakayama 環は，実に類まれな自己完結的型の Artin 環である．

さて次の話題では，Nakayama 環の構造論の代数閉体上の Nakayama 群多元環への応用を紹介する．

話題 4: 代数閉体上の Nakayama 群多元環

定理 3.2 で，体 K 上の indecomposable Nakayama 多元環 R で，その frame QF-部分環 $F(R)$ の Nakayama 置換が恒等置換でないものは，ある局所 Nakayama 多元環 Q 上の skew-matrix ring $(Q)_{\sigma,c,n}$ の剰余環として表現できることを知った．K が代数閉体上の場合は，この Q が $K[x]/(x^{d+1})$ (ここで，d は Q の組成列の長さ) と取れて，しかも $\sigma = id_Q$ となる．さらに $F(R)$ の Nakayama 置換が恒等置換の場合も，R は $Q = K[x]/(x^{d+1})$ 上の skew-matrix ring $(Q)_{id_Q,c,n}$ の剰余環として表現できる．この後半の部分の状況を説明する．(詳しくは baba-Oshiro [6]，Hanaki-Koshitani-Oshiro [30] を参照 .)

Q を体 K 上多元環とし，skew matrix ring

$$R = \begin{pmatrix} Q & \cdots & Q \\ & \cdots & \\ Q & \cdots & Q \end{pmatrix}_{\sigma,c,n}$$

を考える．ここで，σ は環準同型写像．K を次の写像で R の部分環とみる：

$$k \longmapsto \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}$$

このとき，次がいえる：

(1) $n = 1$ のとき，$R = Q$．
(2) $n \geq 2$ のとき，
R : K 上多元環 $\iff$ σ: K-algebra 準同型写像， i.e., $\sigma(k) = k \ \ \forall k \in K$.

さて，以後扱う K は代数閉体とする．

命題 4.1. Q を K 上局所 Nakayama 多元環とする．$J = J(Q) = cQ$ とおき，$d+1$ を Q の組成列の長さとする．つまり，$J^d \neq 0$，$J^{d+1} = 0$．このとき

(1) $Q \cong K[x]/(x^{d+1})$
(2) σ が Q の algebra 自己同型写像で，$\sigma(c) = c, \ \ \sigma(q)c = cq \ \ \forall q \in Q$ をみたせば，$\sigma = id_Q$．従って，

$$(Q)_{id_Q,c,n} = \begin{pmatrix} Q & \cdots & Q \\ & \cdots & \\ Q & \cdots & Q \end{pmatrix}_{id_Q,c,n} \cong \begin{pmatrix} K[x]/(x^{d+1}) & \cdots & K[x]/(x^{d+1}) \\ & \cdots & \\ K[x]/(x^{d+1}) & \cdots & K[x]/(x^{d+1}) \end{pmatrix}_{id,\overline{x},n}.$$

次の定理は，Nakayama 群多元環の研究において重要である．

定理 4.2. R を Nakayama 置換が恒等置換である K 上 basic indecomposable Nakayama QF-多元環とし，$e_nR, \ldots, e_1R$ を Kupisch series とする．$Q = e_1Re_1, Q = Qc$ とおき，$d+1$ を Q の組成列の長さとする．このとき

(1) $Q = e_1Re_1 \cong e_2Re_2 \cong \cdots \cong e_nRe_n \cong K[x]/(x^{d+1})$，
(2) ij-成分を ij-成分に移す algebra epimorphism $\varphi = (\varphi_{ij})$:

$$(Q)_{id,c,n} = \begin{pmatrix} Q & \cdots & Q \\ & \cdots & \\ Q & \cdots & Q \end{pmatrix}_{id,c,n} \longrightarrow R = \begin{pmatrix} e_1Re_1 & \cdots & e_1Re_n \\ & \cdots & \\ e_nRe_1 & \cdots & e_nRe_n \end{pmatrix}$$

で，その Kernel が

$$\operatorname{Ker}\varphi = \begin{pmatrix} 0 & & & S(Q) \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ S(Q) & & & 0 \end{pmatrix}$$

であるものがとれる．従って，

$$R \cong \begin{pmatrix} K[x]/(x^{d+1}) & \cdots & K[x]/(x^{d+1}) \\ & \cdots & \\ & \cdots & \\ K[x]/(x^{d+1}) & & K[x]/(x^{d+1}) \end{pmatrix}_{id,\overline{x},n} \Big/ \begin{pmatrix} 0 & & (x^d)/(x^{d+1}) \\ & 0 & \\ & \ddots & \\ (x^d)/(x^{d+1}) & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{put}{=} \begin{pmatrix} K[x]/(x^{d+1}) & K[x]/(x^d) & \cdots & K[x]/(x^d) \\ K[x]/(x^d) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & K[x]/(x^d) \\ K[x]/(x^d) & \cdots & K[x]/(x^d) & K[x]/(x^{d+1}) \end{pmatrix}_{id,\overline{x},n} .$$

定理 4.2 を応用して，対称群や交代群に対する代数閉体上の群多元環が Nakayama 多元環になる場合の行列表現を見てみよう．

Nakayama group algebra については，環論や群論の多くの研究者によって研究されている（例えば，Osima [48]，Morita [38]，Brauer [10]，Dade [12]，Higman [22], Murase [41]，[42]，Michler [36]，Isaacs [23] 等）．その歴史については，Kositani [29]，Puninski [56] を参照．

G を有限群とし，K を標数 p の体とする．次は，よく知られた結果である．

定理 4.3.

(1) (Maschkke [35])
p が 0 或いは G の位数 $|G|$ を割らない $\iff$ kG : semisimple.
(2) (Higman [22]，Kasch–Kneser-Kupisch [25]) $p > 0$ で p が $|G|$ を割るとき KG が有限表現型である $\iff$ G は 巡回シロー p-部分群をもつ．

従って，KG が Nakayama 多元環であるためには，G は巡回シロー p-部分群を持つことが必要である．正確に記せば : KG のブロック B が有限表現型である $\iff$ B の “defect group” が巡回群である（ Alperin [1]，Benson [8] ）

G を有限群，p を 素数とする．G の正規部分群の descending chain: $G = H_0 \rhd H_1 \rhd H_2 \rhd \cdots \rhd H_k = \{e\}$ で，H_i/H_{i+1} が p-群，或いは p'-群 (i.e.，p が $|H_i/H_{i+1}|$ を割らない) となるものがあるとき，G を p-可解群 (p-solvable group) という．

次の定理は重要である．

定理 4.4. (Morita [38], Isaacs [23]) K を代数閉体，G を p-可解群とする．このとき，cyclic defect group を持つ KG のブロックは Nakayama 多元環である．

さて，$n \leq 5$ の場合，標数 p の代数閉体 K と n 次の対称群 S_n，交代群 A_n との群多元環 が Nakayama 多元環になっているとき，それらを skew-matrix ring で表現してみる．

注意：

(1) Klein 群を含む有限群シロー 2-部分群は巡回群でないから，$4 \geq n$ に対して，KS_n，KA_n は Nakayama 多元環ではない．
(2) $p = 3$ のとき，S_3，A_3，S_4，A_4 は巡回 3-シロー部分群をもつから，定理 4.4 より，KS_3，KA_3，KS_4， KA_4 は Nakayama 多元環である．
(3) A_5 は non-abelian simple であるので，A_5，S_5 は 3-可解群でない．

KS_n，KA_n の構造を知るには，次を調べる必要がある:

(1) ブロック分解 $KG = B_1 \oplus \cdots \oplus B_t$．
(2) 各 B_i の simple submodule のタイプ．
(3) 各 B_i，およびその simple submodule の K-次元．
(4) 知られている結果の利用 ．

しかし，このアルゴリズムを実行するのはそれほど易しくはないようである．

下記は千葉大の越谷さん，信州大の花木さんの協力のもとでの記録である．

[I] $p = 2$ のとき;
  (1) KS_2 は局所 Nakayama 多元環で，$KS_2 \cong K[x]/(x^2)$.
  (2) KS_3 は Nakayama 多元環で，$KS_3 \cong K[x]/(x^2) \oplus M_2(K)$.
  (3) KA_3 は Nakayama 多元環で，$KA_3 \cong K[x]/(x^3)$.
[II] $p = 3$ のとき:
  (1) KS_3 は basic indecomposable Nakayama 多元環で，次元 1 の二つの simple modules をもち

$$KS_3 \cong A = \begin{pmatrix} Q & \overline{Q} \\ \overline{Q} & Q \end{pmatrix}_{id,\overline{x},2}.$$

ここで， $Q = K[x]/(x^2)$，$\overline{Q} = Q/((x)/(x^2))$.

(2) KA_3 は局所 Nakayama 多元環で，$KA_3 \cong K[x]/(x^3)$.

(3) KS_4 は Nakayama 多元環で，そのブロック分解は $KS_4 \cong A \oplus (K)_3 \oplus (K)_3$. ここで，$A$ は [II] (1) における A.

(4) KA_4 は Nakayama 多元環で，$KA_4 \cong K[x]/(x^3) \oplus (K)_3$ ．

(5) KS_5 は Nakayama 多元環で，そのブロック分解は $KS_5 = B_1 \oplus B_2 \oplus B_3$ ．ここで，B_1 と B_2 は同型で，その次元は 42 で，次元が $1, 4$ 二つの simple modules を持つ．

$$B_3 \cong (K)_6 \text{（行列環）},$$

$$B_1 \cong B_2 \cong \begin{pmatrix} Q & Q & Q & Q & X \\ Q & Q & Q & Q & X \\ Q & Q & Q & Q & X \\ Q & Q & Q & Q & X \\ Y & Y & Y & Y & T \end{pmatrix}.$$

ここで，

$$\begin{pmatrix} Q & X \\ Y & T \end{pmatrix}$$

は，[II] (1) の A で，$Q = eAe$,$T = fAf$,$X = eAf$,$Y = fAe$

$$(\text{ただし，} e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ,} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}).$$

(6) KA_5 は Nakayama 多元環で，$KA_5 \cong A \oplus B_1 \oplus B_2 \oplus B_3 \oplus B_4 \oplus B_5 \oplus B_6 \oplus B_7$. ここで，$A$ は [II] (1) の A，$B_i \cong B_1 \cong B_2 \cong B_3 \cong B_4 \cong K[x]/(x^9)$，$B_6 \cong B_7 \cong (K)_9$ ．

[III] $p = 5$ のとき，

(1) KS_5 のブロック分解：$KS_5 \cong B_1 \oplus (K)_5 \oplus (K)_5$ ．ここで，B_1 の次元は 70 で，$1, 1, 3$ の次元の 3 つの simple modules をもつ．B_1 は次元 35 の有限表現型だが，Nakayama 多元環でない．

(2) KA_5 のブロック分解：$KA_5 \cong B_1 \oplus (K)_5$ ．B_1 は有限表現型だが，Nakayama 多元環ではない．

以上，$n \leq 5$ の場合の Nakayama KS_n，KA_n を調べたが，$n > 5$ のときはどうであろうか．あるとすれば無限に散在しているであろうか．

話題 5: 局所 QF-環の構成と Faith 予想

Harada 環も Nakayama 環も局所 QF-環が基本になっている．それゆえ，局所 QF-環の探求へと新たな展開が始まる．局所 QF-環は，QF-環に関する有名な Faith 予想との関連でも究明すべき局所 QF-環である．

ここの話題では Faith 予想の一考察から，局所環の一般的構成法について紹介する．(詳しくは Kikumasa-Oshiro-Yoshimura [26] を参照.)

本稿の概要で述べたように

$$R : \text{QF-環} \iff R : \text{右 perfect ring かつ左, 右 self-injective ring}$$

という Osofsky の結果がある．この結果における左, 右の self-injective 性を，片側だけの self-injective 性で置き換えられないか，というよく知られた問題がある．Faith は彼の著書 [14] で，semiprimary 環でもこの問題は否定的だろうと予想した．これが Faith 予想の由来である．Faith 予想は，局所 semiprimary 環で Jacobson radical 3 乗ゼロの場合でも未解決である．おそらく，この場合が解決されれば一気に解決にいたるであろう．

Baba-Oshiro [6] の次の定理は，Faith 予想に関連する結果である．

定理 5.1. semiprimary 環 R が右 self-injective であるための必要十分条件は，R が右 simple-injective であることである．特に，Jacobson radical 3 乗ゼロの semiprimary 局所環 R が右 self-injective であるための必要十分条件は，J^2 が左, 右に関して simple であり，J の任意の極大右 submodule M に対して $\exists a \in J \setminus J^2 : aM = 0$ となることである．

注意：R が右 simple injective とは，R の右 ideal から R の simple submodule への homomorphism は，R からの homomorphism に拡張できることである．

さて，$J_2 \neq 0$，$J_3 = 0$ なる局所 semiprimary 環 R を分析しよう．$D = R/J$，$S = J^2$，$\overline{J} = J/S$ とおく．このとき，$\overline{J}$，S は (D, D)-bispace である．次のことがいえる：

(1) R が QF-環のとき，graded type と呼ばれる新しい Jacobson radical 3 乗ゼロの局所 QF-環 T が，次のようにして作れる：$T := D \times J \times S$．T の元 $t_1 = (d_1, a_1, s_1)$, $t_2 = (d_2, a_2, s_2)$ の積を

$$t_1 t_2 = (d_1 d_2,\ d_1 a_2 + a_1 d_2,\ d_1 s_2 + s_1 d_2 + a_1 a_2)$$

と定義すれば，$J(T) = 0 \times J \times 0$，$J(T)^2 = 0 \times 0 \times S$，$J(T)^3 = 0$ （一般には $R \ncong T(R)$）．

(2) R が右 injective だが QF-環でないならば，$\dim {}_DJ = \dim \overline{{}_DJ} > \dim \overline{J_D} = \infty$.

これらの情報をもとに，Jacobson radical 3 乗ゼロの局所 semiprimary 環についての Faith 予想の分析と，Jacobson radical 3 乗ゼロの QF-環の一般的構成法について述べる．

D を division ring とし，${}_DV_D$ を (D,D)-bispace とする．$T = D\times V\times(V\otimes_D V)$ とおく．この (D,D)-bispace T の元 $t_1 = (d_1, v_1, x_1),\ t_2 = (d_2, v_2, x_2)$ の積を次のように定義する：

$$t_1t_2 = (d_1d_2,\ d_1v_2 + v_1d_2,\ d_1x_2 + x_1d_2 + v_1\otimes v_2)$$

このとき，T は Jacobson radical 3 乗ゼロの局所 semiprimary 環になる．$J(T) = 0\times V\times 0,\ J(T)^2 = 0\times 0\times V\otimes_D V,\ (D\times 0\times 0),\ (0\times V\times 0),\ (0\times 0\times V\otimes_D V)$ をそれぞれ $D,\ V,\ V\otimes_D V$ と同一視し，$T = T = \langle D, V, V\otimes_D V\rangle$ とおく．このとき，次がいえる．

命題 5.2.

(1) $V\otimes_D V$ の (D,D)-bisubspace I が，$\dim((V\otimes_D V)/I_D) = \dim((V\otimes_D V)/{}_DI) = 1,\ vD\otimes_D V\not\subset I,\ V\otimes_D Dv\not\subset I\quad 0\neq\forall v\in V$ をみたすとき，I は T の ideal となり，$J(T/I)^2 = S(T/I)$ は，左そして右 T/I-module として simple となる．
(2) $\dim(V_D)$ が有限次元で，かつ (1) の (D,D)-bisubspace I が存在すれば，T/I は Jacobson radical 3 乗ゼロの局所 QF-環となる．

pD を 1 次元右 D-space とし，ρ を D の自己同型とする．D の元 d に対して $dp = p\rho(d)$ と定義すれば，pD は 1 次元左 D-space になる．この (D,D)- bispace を pD^ρ で記す．$V^* = \mathrm{Hom}_D(V_D, pD^\rho_D)$ とおくと，V^* は自然に (D,D)-bispace になる．

ここで次の条件が成り立つと仮定する．

仮定 **A:** V と V^* の間に (D,D)-同型写像 θ がある．

$v\in V$ に対して，$v^* = \theta(v)$ とおく．$V\times V\to pD^\rho,\ (v,w)\mapsto v^*(w)$ なる写像は，上への bilinear (D,D)-写像になる．従って，写像 $\lambda : V\otimes_D V\to pD^\rho,\ \sum_i v_i\otimes w_i\mapsto\sum_i v_i^*(w_i)$ は上への (D,D)-準同型写像となる．容易に分かるように，$\mathrm{Ker}\,\lambda$ は T の ideal．剰余環 $\overline{T} = T/\mathrm{Ker}\,\lambda$ を $R = D\langle V,\theta,\rho,pD^\rho\rangle$ で表す．$s = \overline{\lambda^{-1}(p)}\in\overline{V\otimes_D V}$ とおくと，次がいえる．

定理 5.3.

(1) $J = J(R) = \overline{V},\ \ J^2 = \overline{V \otimes_D V} = Rs = sR,\ \ J^3 = 0.$
(2) $S(R) = J^2$: 左, 右 simple ideal .
(3) R : 右 self-injective .
(4) R : QF-環 $\iff \dim(V_D) < \infty$.

この定理より , Jacobson radical 3 乗ゼロの局所 semiprimary 環についての Faith 予想は , 次のように言い換えられる .

Problem : 次の条件をみたす division ring D と (D, D)-bispace V は存在するか :

$$\dim(V_D) = \infty, \quad {}_DV_D \cong {}_DV_D^* \ \ ((D, D)\text{-isomorphism})$$

この問題の意味は明快である . しかし , 一寸挑戦してみると分かることだが , たちまち pathological な状況に直面してしまう .

Faith 予想は難しい . しかし , 徒労には終りたくない . 上述の分析から , 我々は , 局所 QF-環の構成に関する一原理を得ることが出来るのである . 最後にこのことを紹介する .

次の条件をみたす division ring D と (D, D)-bispace V が存在するとする :

$$\dim(V_D) = n < \infty\ , \quad {}_DV_D \cong {}_DV_D^* \ \ ((D, D)\text{-isomorphism})$$

このとき , $\dim(V_D) = n$ となり , $\exists x_1, \ldots, x_n \in V : V = Dx_1 \oplus \cdots \oplus Dx_n = x_1D \oplus \cdots \oplus x_nD$ となる . この等式から , 環準同型写像 $\sigma = (\sigma_{ij}) : D \to (D)_n$, $\xi = (\xi_{ij}) : D \to (D)_n$ があって , $\sigma,\ \xi$ について , 次の関係式 $(\sharp)$ が成り立つことが分かる :

$$\sum_j \sigma_{kj}(\xi_{ij}(d)) = \begin{cases} d & (\,k = i \text{ のとき }), \\ 0 & (\,k \neq i \text{ のとき }), \end{cases}$$

$$\sum_j \xi_{jk}(\sigma_{ji}(d)) = \begin{cases} d & (\,k = i \text{ のとき }), \\ 0 & (\,k \neq i \text{ のとき }). \end{cases}$$

逆に , 話をもとに戻して , (D, D)-bispace $V\langle x_1, \ldots, x_n; \sigma\rangle$ と pD^ρ を考え , 上の関係式をみたす $\sigma = (\sigma_{ij}) : D \to (D)_n$ と $\xi = (\xi_{ij}) : D \to (D)_n$ があって , $\rho\xi_{ij} = \sigma_{ij}$ とする . このとき , V と $V^* = \mathrm{Hom}_D(V_D, pD^\rho)$ の間に自然な

(D,D)-同型写像が作れる．実際，各 i に対して，$\alpha_i \in V^* = \mathrm{Hom}_D(V_D,\, pD^\rho_D)$ を

$$\alpha_i : x_1d_1 + \cdots + x_nd_n \mapsto pd_i,$$

によって定義すれば，${}_DV^* = D\alpha_1 \oplus \cdots \oplus D\alpha_n$ となり写像

$$\theta^* : {}_DV_D \to {}_DV^*_D,\ \ d_1x_1 + \cdots + d_nx_n \mapsto d_1\alpha_1 + \cdots + d_n\alpha_n$$

は (D,D)-bispace 同型写像になる．従って，局所 QF-環 $D\langle V,\sigma,\xi,\theta^*,\rho,pD^\rho\rangle$ が作れる．

特に，ξ として σ がとれる場合は，必然的に $\rho = id_D$ となり，局所 QF-環 $D\langle V,\sigma,\sigma,\theta^*,id_D,1D^{id_D}\rangle$ が作れる．この観点からいくつか例を展示してみよう．

例 5.1. d を division ring とし，$V_D = x_1D \oplus \cdots \oplus x_nD$ を D 上 n 次元 space とする．π を D の環同型写像とし，次のような環準同型写像 $\sigma = (\sigma_{ij})$，$\xi = (\xi_{ij})$ を考える：

$$\sigma : D \to (D_n)\,,\quad d \ \mapsto \ \begin{pmatrix} \pi(d) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pi(d) \end{pmatrix}$$

$$\xi : D \to (D_n)\,,\quad d \ \mapsto \ \begin{pmatrix} \pi^{-1}(d) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pi^{-1}(d) \end{pmatrix}$$

この σ，ξ に関して関係式 $(\sharp)$ が成り立ち，$\pi^2\xi_{ij} = \sigma_{ij}$ がいえる．従って局所 QF-環 $D\langle V,\sigma,\xi,\theta^*,\pi^2,pD^{\pi^2}\rangle$ が作れる．

例 5.2. $\mathbb{C}$ を複素数体とし，$V = x_1\mathbb{C} \oplus x_2\mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ 上 2 次元 space とする．写像

$$\sigma : \mathbb{C} \to (\mathbb{C})_2,\ \ a + bi \ \mapsto \ \begin{pmatrix} a & bi \\ bi & a \end{pmatrix}$$

は環準同型写像で，$\sigma,\ \sigma$ に関して $(\sharp)$ が成り立つ．よって局所 QF-環 $\mathbb{C}\langle V,\sigma,\sigma,\theta^*,id_{\mathbb{C}},1\mathbb{C}^{id_{\mathbb{C}}}\rangle$ が作れる．

例 5.3. k を可換体とし，$f(x) = x^n - a \in k[x]$ を α を根とする既約多項式とする．$D = k(\alpha)$ とおき，n 次元 space $V = \sum_{i=1}^n \oplus x_iD$ を考える．写像 σ

を

$$\sigma : D \to (D)_n\,,\quad \sum_{i=0}^{n-1} a_i\alpha^i \;\mapsto\; \begin{pmatrix} a_0 & a_1\alpha & a_2\alpha^2 & \cdots & a_{n-1}\alpha^{n-1} \\ a_{n-1}\alpha^{n-1} & a_0 & a_1\alpha & \cdots & a_{n-2}\alpha^{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2\alpha^2 & \ddots & \ddots & \ddots & a_1\alpha \\ a_1\alpha & a_2\alpha^2 & \cdots & a_{n-1}\alpha^{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

と定義すれば，σ は環準同型写像で σ，σ に関して $(\sharp)$ が成り立つ．よって，局所 QF-環 $D\langle V, \sigma, \sigma, \theta^*, id_D, 1D^{id_D}\rangle$ が作れる．

例 5.4. $\mathbb{H}$ をハミルトンの 4 元数体とし，4 次元 space $V = x_1\mathbb{H} \oplus x_2\mathbb{H} \oplus x_3\mathbb{H} \oplus x_4\mathbb{H}$ を考える．写像

$$\sigma : \mathbb{H} \to (\mathbb{H})_4\,,\;\; a + bi + cj + dk \;\mapsto\; \begin{pmatrix} a & bi & cj & dk \\ bi & a & dk & cj \\ cj & dk & a & bi \\ dk & cj & bi & a \end{pmatrix}$$

は環準同型写像であり，σ, σ に関して $(\sharp)$ が成り立つ．よって，局所 QF-環 $\mathbb{H}\langle V, \sigma, \sigma, \theta^*, id_{\mathbb{H}}, 1\mathbb{H}^{id_{\mathbb{H}}}\rangle$ が作れる．

例 5.5. E を可換体，π を E の自己同型写像で，次をみたすものとする：

(1) $\pi^2 = id_E$.

(2) $\alpha, \beta \in E : \alpha\pi(\alpha) + \beta\pi(\beta) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 0$ かつ $\beta = 0$.

ここで，E 上の 2 次元 space $D = E \oplus E\boldsymbol{i} = \{\alpha + \beta\boldsymbol{i} \mid \alpha, \beta \in E\}$ を作り，$\boldsymbol{i}^2 = -1$ とし，$\alpha \in E$ と $\boldsymbol{i}$ の積を，

$$\boldsymbol{i}\alpha = \pi(\alpha)\boldsymbol{i}$$

と定義することにより，D は division ring になる：

$$(\alpha + \beta\boldsymbol{i})(\pi(\alpha) - \beta\boldsymbol{i}) = \alpha\pi(\alpha) + \beta\pi(\beta)$$

ここで，$\alpha + \beta\boldsymbol{i} \neq 0$ ならば，$\alpha\pi(\alpha) + \beta\pi(\beta) \neq 0$ が成り立ち，D の center が $K := \{a \in E \mid \pi(a) = a\}$ となる．

$V = x_1D \oplus x_2D$ を D 上の 2 次元 space とし，環準同型写像

$$\sigma : D \to (D)_2\,,\;\; \alpha + \beta\boldsymbol{i} \;\mapsto\; \begin{pmatrix} \alpha & \beta\boldsymbol{i} \\ \beta\boldsymbol{i} & \alpha \end{pmatrix}.$$

を考える．このとき，σ，σ に関して関係式 $(\sharp)$ が成り立ち，局所 QF-環 $D\langle V, \sigma, \sigma, \theta^*, id_D, 1D^{id_D}\rangle$ が作れる．

次に，局所 QF-環 R で，その center K が体をなし，R が K 上有限次元でない例を作る．

例 5.6. E を division ring で，その center K 上 infinite dimensional なるものとし，$x^2 \neq -1 \ \ \forall x \in E$ がみたされるとする．このとき，E 上の 2 次元 space $D = E \oplus E\boldsymbol{i} = \{\alpha + \beta\boldsymbol{i} \mid \alpha, \beta \in E\}$ を考え，

$$\boldsymbol{i}^2 = -1\,, \quad \boldsymbol{i}\alpha = \alpha\boldsymbol{i} \ \ \forall \alpha \in E$$

なる積をいれる．これにより D は環になり，しかも division ring になることが確かめられる．

次に，$V = x_1D \oplus x_2D$ を D 上の 2 次元 space とする．写像

$$\sigma : D \to (D)_2\,, \ \ \alpha + \beta\boldsymbol{i} \ \mapsto \ \begin{pmatrix} \alpha & \beta\boldsymbol{i} \\ \beta\boldsymbol{i} & \alpha \end{pmatrix}.$$

は環準同型写像で，$(\sharp)$ をみたす．よって，局所 QF-環 $D\langle V, \sigma, \sigma, \theta^*, id_D, 1D^{id_D}\rangle$ が作れる．

注意： 上の例における division ring E はいくらでも存在する．例えば，実数体上の関数体 $L = \mathbb{R}(x)$ を考え，中への monomorphism $\sigma : L \to L, \ f(x)/g(x) \mapsto f(x^2)/g(x^2)$ を定義し，$L[y;\sigma]$ を σ による skew-polynomial ring とすると，この環は non-commutative domain で，classical quotient を持ち，それは division ring になる．この division ring を E とおく．このとき，E の center は $\mathbb{R}$ で，E は $\mathbb{R}$ 上の infinite dimensional space である．$a^2 \neq -1 \ \ \forall 0 \neq a \in E$ も成り立つ．

結び

以上見てきたように，QF-環，Nakayama 環，そして Harada 環は純然たる Artin 環であり，局所 QF-環が基盤になっている．そして，体上の有限次元でない局所 QF-環がいくらでも作れることを知った．Artin 環の世界は群多元環や有限次元多元環を超えた広大無辺なる広がりで形成されていってもよい世界の筈だと筆者は思っている．有限次元多元環における定理が Artin 環の定理にまで拡張されたとき，品格は格段に増す．第 1 Brauer-Thrall 予想が 有限次元多元環の場合に Roiter (1968, [57]) によって解決され，一般の Artin 環の場合

は Auslander (1974, [3]) によって神業のごとく解決されたという話は，その典型である.

参考文献

[1] J. L. Alperin, “Local Representation Theory”, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1986).

[2] K. Amdal and F. Ringdal, Catégories unisérialles, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série A-B* 267 (1968), A85–A87, B247–B249.

[3] M. Auslander, Representation theory of Artin algebras, II, *Comm. in Algebra, 1 (1974), 269-310.*

[4] G. Azumaya, A duality theory for injective modules, *Amer. J. Math.* 81 (1959), 249–278.

[5] Y. Baba and K. Oshiro, On a Theorem of Fuller, *J. Algebra* 154, 1 (1993), 86–94.

[6] Y. Baba and K.Oshiro, Classical Artinian Rings and Related Topics (Lecture Note)

[7] H. Bass, Finitistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* 95 (1960), 466–486.

[8] D. J. Benson, “Representations and Cohomology. I”, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 30, Cambridge University Press, Cambridge (1991).

[9] R. Brauer and C. Nesbitt, On regular representations of algebras, *Proc. Nat. Acad. Sci.* 23 (1937), 236–240.

[10] R. Brauer, Investigations on group characters, *Ann. Math.* 42 (1941), 936–958.

[11] J. Clark, C. Lomp, N. Vanaja and R. Wisbauer, Lifting modules, *Frontiers in Math., Birkhauser Boston, Boston, 2006*

[12] E. C. Dade, Blocks with cyclic defect groups, *Ann. Math.* 84 (1966), 20–48.

[13] F. Dischinger and W. Mueller, Einreihig zerlegbare artinsche Ringe sind selbstdual, *Arch. Math. 48 (1984), 132-136*

[14] C. Faith, “Algebra II. Ring Theory”, Grundlehren Math. Wiss. 192, Springer-Verlag, Heidelberg/New York/Berlin (1976).

[15] W. Von Frobenius, Theoriw der hyperkomplexen Groβben, *Sitzung der phys.-math.* K1(1903), 504-538. 634-645.

[16] K. R. Fuller, On indecomposable injectives over artinian rings, *Pacific J. Math* 29 (1968), 115–135.

[17] J. K. Haack, Self-duality and serial rings, *J. Algebra* 59 (1979), 345–363.

[18] M. Harada, Non-small modules and non-cosmall modules, in "Ring Theory. Proceedings of 1978 Antwerp Conference" (F. Van Oystaeyen, Ed.) Dekker, New York (1979), 669–690.

[19] M. Harada, On one-sided *QF-2* rings I, *Osaka J. Math.* 17 (1980), 421–431.

[20] M. Harada, On one-sided *QF-2* rings II, *Osaka J. Math.* 17 (1980), 433–438.

[21] M. Harada, "Factor Categories with Applications to Direct Decomposition of Modules," Lect. Notes Pure Appl. Math. 88, Dekker, New York (1983).

[22] D. G. Higman, Indecomposable representations at characteristic p, *Duke Math. J. 21 (1954), 377-381*

[23] I. M. Isaacs, Lifting Brauer characters of p-solvable groups, *Pacific J. Math.* 53 (1974), 171–188.

[24] J. Kado and K. Oshiro, Self-duality and Harada rings, *J. Algebra* 211 (1999), 384–408.

[25] F. Kasch, M.Kneser and H. Kupisch, Unzerlegbare modulare Darstellungen endlicher Gruppen mit zyklischer p-Sylow-Gruppen, *Archiv der Math. 8i1957j320-321*

[26] I. Kikumasa, K. Oshiro and H. Yoshimura, A construction of local QF-rings with radical cube zero, *preprint.*

[27] K. Koike, Examples of *QF* rings without Nakayama automorphism and H-rings without self-duality, *J. Algebra* 241 (2001), 731–744.

[28] K. Koike, Almost self-duality and Harada rings, *J. Algebra* 254 (2002), 336–361.

[29] S. Koshitani, Some topics on modular group algebras of finite groups, *Proceeding 30th Symp. Ring Theory, Shinsyu (1997), 81-90*

[30] A. Koshitani, Hanaki and K. Oshiro, Nakayama algebras over algebraically closed fields, *preprint.*

[31] J. Kraemer, "Characterizations of the existence of (quasi-)selfduality for complete tensor rings" Algebra Berichte 56, München (1987).

[32] H. Kupisch; Uber ein Klasse von Ringen mit Minimalbedingung II, *Arch. Math.* 26 (1975), 23–35.

[33] T. Y. Lam, "Lectures on Modules and Rings", Graduate Texts in Mathematics 189, Springer-Verlag, Heidelberg/New York/Berlin (1998).

[34] T. Mano, The invariant system of serial rings and their applications to the theory of self-duality, *Proceeding 16th Symp. Ring Theory*, Tokyo (1983), 48–53.

[35] H. Maschke, *Ü*ver den arithmetischen Character der Koeffizienten der Substitutionen endlicher linearer Substitutiongruppen, *Math. Ann. 50 (1898), 482-498*

[36] G. O. Michler, Green Correspondence between Blocks with Cyclic Defect groups, *J. Algebra* 39 (1976), 26-51.

[37] S. H. Mohamed and B. J. Müller, "Continuous Modules and Discrete Modules", London Math. Soc. Lect. Notes 147, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1990).

[38] K. Morita, On group rings over a modular field which possess radicals expressible as principal ideals, *Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku, Kyoiku Daigaku (Sec.A) 4 (1951), 177-194*

[39] K. Morita, Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition, *Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku* 6 (1958), 89–142.

[40] I. Murase, On the structure of generalized uniserial rings III, *Sci. Papers College Gen. Educ., Univ. Tokyo* 14 (1964), 11–25.

[41] I. Murase, Generalized uniserial group rings I, *Sci. Papers College Gen. Educ., Univ. Tokyo* 15 (1965), 15–28.

[42] I. Murase, Generalized uniserial group rings II, *Sci. Papers College Gen. Educ., Univ. Tokyo* 15 (1965), 111–128.

[43] H. Nagao and Y. Tsushima, "Representations of Finite Groups", Academic Press, Boston (1989).

[44] T. Nakayama, Note on uniserial and generalized uniserial rings, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* 16 (1940), 285–289.

[45] T. Nakayama, On Frobenius algebras I *Ann. Math.* 40 (1939), 611–633, II ibid 42 (1941), 1–21.

[46] T. Nakayama and G. Azumaya, **代数学** II, **岩波書店** (1954)

[47] W. K. Nicholson and M. F. Yousif, "Quasi-Frobenius Rings", Cambridge Tracts in Mathematics 158, Cambridge University Press, Cambridge (2003).

[48] M. Osima, On primary decomposable of group rings, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan 24(1942),1-9*

[49] K. Oshiro, Lifting modules, extending modules and their applications to *QF*-rings, *Hokkaido Math. J.* 13 (1984), 310–338.

[50] K. Oshiro, lifting modules, extending modules and their applications to generalized uniserial rings, *Hokkaido Math. J.* 13 (1984), 339–346.

[51] K. Oshiro, Structure of Nakayama rings, *Proceedings 20th Symp. Ring Theory*, Okayama (1987), 109–133.

[52] K. Oshiro, Theories of Harada in Artinian rings, *International Symposium on Ring Theory, (Kyongju, 1999) , Birkhauser Boston, Boston (2001), 279-328*

[53] K. Oshiro and S. Masumoto, The self-duality of H-rings and Nakayama automorphisms of *QF*-rings, *Proceedings 18th Symp. Ring Theory*, Yamaguchi (1985), 84–107.

[54] B. Osofsky, A generalization of quasi-Frobenius rings, *J. Algebra* 4 (1966), 373–387.

[55] R. S. Pierce, Associative Algebra, Graduate Texts in Mathematics, Springer (1982).

[56] G. E. Puninski, "Serial Rings", Kluwer Academic Publishers (2001).

[57] A. V. Roiter, Unboundedness of the dimensions of the indecomposable representations of an algebra which has infinitely many indecomposable representations,Izv. Acad. Nauk SSSR Ser. Mat.32, 1275-1282 (1968).

[58] D. Simson, Dualities and pure semisimple rings, in "Abelian groups, module theory, and topology (Padua, 1997)", 381–388. Dekker, New York (1998).

[59] H. Tachikawa, "Quasi-Frobenius Rings and Generalizations", Lect. Notes Math. 351, Springer-Verlag, New York/Heidelberg/Berlin (1973).

[60] R. M. Thrall, Some generalizations of quasi-Frobenius algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 64 (1948), 173–183.

[61] Y. Utumi, On continuous regular rings, *Canad. Math. Bull.* 4 (1961), 63–69.

[62] J. Waschbusch, Self-duality of serial rings, *Comm. Algebra* 14 (1986), 581–590.

[63] C. Xi, On the finitistic conjecture, *Advances in Ring Theory, Proc. 4th China-Japan-Korea International Conference*, 282–294, World Scientific, Singapore, 2005.

[64] K. Yamagata, Handbook of algebras, *Handbook of Algebras, Vol.1 Edited by Hazewinkel, Elsevier Science B.V., 1996, 1841-1887*