ALGEBRAS ARISING FROM SCHUR-WEYL TYPE DUALITIES

SUSUMU ARIKI

Abstract. The aim of this paper is to present algebras which are studied in our field. These algebras deserve more detailed study from various points of view.

1. Basic Example

この節では，Green による Schur 代数から始めて Dipper-James 理論に現れる q-Schur 代数を導入し，Beilinson-Lusztig-MacPherson による q-Schur 代数の幾何的な実現のもとになったアイデアを説明する．

1.1. Schur 代数.
k を体とし，$A(n) = k[X_{ij}]_{1\le i,j\le n}$ を n^2 変数の多項式環とする．

$$\epsilon : A(n) \to k, \quad \Delta : A(n) \to A(n) \otimes A(n)$$

を以下のように定義すると $(A(n), \epsilon, \Delta)$ は余代数である．

$$\epsilon(X_{ij}) = \delta_{ij}, \quad \Delta(X_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} X_{ik} \otimes X_{kj}.$$

$A(n,r)$ を $A(n)$ の次数 r の斉次多項式全体とすると

$$\Delta(A(n,r)) \subset A(n,r) \otimes A(n,r)$$

であり，$\dim A(n,r) = \binom{n^2+r-1}{r}$ である．

Definition 1. $S(n,r) = \mathrm{Hom}_k(A(n,r), k)$ を Schur 代数とよぶ.

ϵ が $S(n,r)$ の単位元である．また，$A(n,r)$-*mod* $= S(n,r)$-*mod* である．

1.2. Schur 代数を導入する動機.
k を代数閉体，$G = GL_n$ の関数環を $k[G] = A(n)[\frac{1}{detX}]$ とすると，$G(k) = \mathrm{Hom}_{k\text{-}alg}(k[G], k) = GL_n(k)$ である．

Definition 2. $k[G]$-*comod* を $GL_n(k)$-*mod* とかく．$GL_n(k)$-加群 V が多項式加群とは，余加群射 $\Delta_V : V \to V \otimes k[G]$ の像が $V \otimes A(n)$ に含まれるときをいう．

任意の $GL_n(k)$-加群は $det^{\otimes \mathbb{Z}} \otimes -$ を除いて多項式加群である．

$$V(n,r) = \{v \in V | \Delta_V(v) \in V \otimes A(n,r)\}$$

とおくと，$V = \oplus_{r\ge 0} V(n,r)$ であり，$V(n,r)$ は $A(n,r)$-余加群であるから有限次元 $GL_n(k)$-加群の性質の研究の多くは $S(n,r)$-加群の研究に帰着する．

The paper is in a final form and no version of it will be submitted for publication elsewhere.

1.3. **Schur-Weyl 相互律.** $(\Delta\otimes \mathrm{Id})\circ\Delta = (\mathrm{Id}\otimes\Delta)\circ\Delta$ より $A(n,r)$ は $(S(n,r),S(n,r))$-両側加群である．

$$D(n,r)=k[T_1,\dots,T_n]=\bigoplus_{r\geq 0}D(n,r),\quad T(n,r)=\mathrm{Hom}_{k\text{-}alg}(D(n,r),k)$$

とする．$D(n,r)$ は単項式 $\{T^\mu|\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0},|\mu|=r\}$ を基底にもつ．双対基底 $\{\xi_\mu\}$ は $T(n,r)$ の基底である．$D(n,r)$ は

$$\epsilon(T_i)=1,\quad \Delta(T_i)=T_i\otimes T_i$$

により余代数であるから，$T(n,r)$ は $\binom{n+r-1}{r}$ 次元の代数であり，

$$1=\sum_\mu \xi_\mu,\quad \xi_\mu\xi_\nu=\delta_{\mu\nu}\xi_\mu$$

が成り立つ．$A(n)\to D(n)$ を $X_{ij}\mapsto \delta_{ij}T_i$ で定めると余代数射 $A(n,r)\to D(n,r)$ を誘導し，これは全射であるから，$T(n,r)\subset S(n,r)$ と思うこととする．このとき，$A(n,r)$ は $(T(n,r),S(n,r))$-両側加群であるから，双対をとれば weight 分解

$$S(n,r)=\bigoplus_\mu S(n,r)_\mu,\quad S(n,r)_\mu=S(n,r)\xi_\mu$$

が得られる．E を $GL_n(k)$ の定義加群とする．

Lemma 3. $r\leq n$ とすると，$\xi_{(1^r)}S(n,r)\xi_{(1^r)}\simeq kS_r$ であり，$(S(n,r),kS_r)$-両側加群同型 $S(n,r)\xi_{(1^r)}\simeq E^{\otimes r}$ が成り立つ．

Theorem 4. (1) $\mathrm{End}_{kS_r}(E^{\otimes r})\simeq S(n,r)$.
(2) $r\leq n$ ならば $\mathrm{End}_{S(n,r)}(E^{\otimes r})\simeq kS_r$.

Definition 5. $\mathrm{Hom}_{S(n,r)}(S(n,r)\xi_{(1^r)},-):S(n,r)\text{-}mod\to kS_r\text{-}mod$ を Schur 関手という．

1.4. **q-analogue.** $k[G]$ を $k_q[G]$ にすると，kS_r は A 型 Hecke 代数に置き換わる．

$$\mathcal{H}_r^A(q)=\bigoplus_{w\in S_r}kT_w,\quad T_wT_i=\begin{cases}T_{ws_i} & (\ell(ws_i)>\ell(w))\\ qT_{ws_i}+(q-1)T_w & (\ell(ws_i)<\ell(w))\end{cases}$$

ただし，$s_i=(i,i+1), T_i=T_{s_i}$ で $\ell(w)$ は w の転倒数である．$T\in\mathrm{End}_k(E^{\otimes 2})$ を

$$Te_i\otimes e_j=\begin{cases}qe_j\otimes e_i & (i\leq j)\\ e_j\otimes e_i+(q-1)e_i\otimes e_j & (i>j)\end{cases}$$

で定めると，$T_i=\mathrm{Id}^{\otimes i-1}\otimes T\otimes \mathrm{Id}^{\otimes r-i-1}$ により $E^{\otimes r}$ は $\mathcal{H}_r^A(q)$-加群になる．

Definition 6. $S_q(n,r)=\mathrm{End}_{\mathcal{H}_r^A(q)}(E^{\otimes r})$ を q-Schur 代数という．

$n\geq r$ ならば，$S_q(n,r)$ は $S_q(r,r)$ に森田同値である．

1.5. **有限体上の一般線形群．** $G = GL_r$，$G(q) = GL_r(\mathbb{F}_q) \supset B(q)$ を Borel 部分群とし，$M = kB(q)\backslash G(q)$ を右 $G(q)$-加群とする．$q \neq 0 \in k$ と仮定すると $\mathcal{H}_r^A(q) \simeq \mathrm{End}_{G(q)}(M)$ であり，M は $(\mathcal{H}_r^A(q), kG(q))$-両側加群である．

$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, |\mu| = r$ であるとし，S_μ を μ の行固定化部分群，$x_\mu = \sum_{w \in S_\mu} T_w$ とする．Dipper-James は次を示した．

Theorem 7. $\mathrm{End}_{G(q)}(\oplus_\mu x_\mu M) \simeq S_q(n, r)$ である．

$P_\mu(q)$ を μ に対応する $G(q)$ の放物型部分群とすると $x_\mu M = kP_\mu(q)\backslash G(q)$ であるから，

$$X(q) = \sqcup_\mu G(q)/P_\mu(q) = \{0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{F}_q^r\}$$

とおけば，$S_q(n, r)$ は $X(q) \times X(q)$ 上の畳み込み代数として実現できる．

実際，これは一般的な話である．K, L を有限群 H の部分群とし，$1_K, 1_H$ を単位表現として置換加群を

$$1_K \otimes_{kK} kH = \bigoplus_{h \in K\backslash H} k[Kh], \quad 1_L \otimes_{kL} kH = \bigoplus_{h \in L\backslash H} k[Lh]$$

とかく．$x \in L\backslash H/K$ に対し $\varphi_x \in \mathrm{Hom}_{kH}(1_K \otimes_{kK} kH, 1_L \otimes_{kL} kH)$ を

$$\varphi_x([Kh]) = \sum_{Lh' : h'h^{-1} \in LxK} [Lh']$$

で定めると $\{\varphi_x\}$ は $\mathrm{Hom}_{kH}(1_K \otimes_{kK} kH, 1_L \otimes_{kL} kH)$ の基底である．

次に全単射

$$L\backslash H/K \simeq H\backslash H \times H/L \times K$$

を $LxK \mapsto (L, xK)$，$(xL, yK) \mapsto Lx^{-1}yK$ により定め，LxK に対応する $H/L \times H/K$ の H-軌道を O_x とかく． すると，O_x の特性関数

$$1_x(xL, yK) = \begin{cases} 1 & ((xL, yK) \in O_x) \\ 0 & ((xL, yK) \notin O_x) \end{cases}$$

を用いて

$$\varphi_x([Kh]) = \sum_{Lh'} 1_x(h'^{-1}L, h^{-1}K)[Lh']$$

となる．L, K, J を H の部分群とし，$C^H(H/L \times H/K)$ と $C^H(H/K \times H/J)$ を各々 $H/L \times H/K$ 上および $H/K \times H/J$ 上の H-不変な k-値関数のなすベクトル空間とすると，$f \in C^H(H/L \times H/K), g \in C^H(H/K \times H/J)$ に対して，畳み込み積が

$$f * g(xL, zJ) = \sum_{yK} f(xL, yK) g(yK, zJ)$$

により定義される．

Proposition 8. (1) $\varphi_x \mapsto 1_x$ により次のベクトル空間の同型を得る．

$$\mathrm{Hom}_{kH}(1_K \otimes_{kK} kH, 1_L \otimes_{kL} kH) \simeq C^H(H/L \times H/K)$$

(2) 上の同型のもとで，$\varphi_x \circ \varphi_y$ は $1_x * 1_y$ に対応する．

X を以下のように定め，$\mathbb{F}_q$-値点を $X(q)$ とかく．

$$X = \bigsqcup_{\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n):|\mu|=r} G/P_\mu$$

Corollary 9. $S_q(n,r)$ は $C^{G(q)}(X(q)\times X(q))$ と k-代数として同型である．

$$(0 = V_0 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{F}_q^r,\ \ 0 = W_0 \subset \cdots \subset W_n = \mathbb{F}_q^r) \in X(q)\times X(q)$$

に対し，

$$a_{ij} = \dim \frac{V_i \cap W_j}{V_{i-1}\cap W_j + V_i \cap W_{j-1}}$$

とおくと $A = (a_{ij}) \in Mat_n(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ である．

$X(q)\times X(q)$ 中の $G(q)$-軌道は以下のように記述される．

Lemma 10. $X(q)\times X(q) \to \{A = (a_{ij}) \in Mat_n(\mathbb{Z}_{\geq 0}) | \sum_{i,j} a_{ij} = r\}$ の各ファイバーはただひとつの $G(q)$-軌道からなる．

Corollary 9 の畳み込み積による表示をもとに，Beilinson-Lusztig-MacPherson は $\overline{\mathbb{Q}}_l[q,q^{-1}]$ を基礎環にもつ $S_q(n,r)$ の幾何的実現を与えた．ここで q は不定元である．

2. affine 化と退化

この節では，局所体上の代数群の表現論で重要な affine Hecke 代数と, Drinfeld により導入された退化 affine Hecke 代数について説明する．これらの代数ではモジュラー表現があまり研究されていないので，モジュラー表現の研究が進むことが望まれている．

2.1. A 型 Hecke 代数の affine 化.

Definition 11. A 型 Hecke 代数と Laurent 多項式環のテンソル積 $\mathcal{H}_n(q) = \mathcal{H}_n^A(q) \otimes k[X_1^{\pm},\ldots,X_n^{\pm}]$ に

$$T_i X^\lambda = X^{s_i\lambda} T_i + (q-1)\frac{X^\lambda - X^{s_i\lambda}}{1-\frac{X_i}{X_{i+1}}}$$

という交換関係を入れて得られる代数を A 型（拡大）affine Hecke 代数と呼ぶ.

生成元を $X_1^{\pm},\ldots,X_n^{\pm},T_1,\ldots,T_{n-1}$, 基本関係式を

$$(T_i - q)(T_i+1) = 0,\quad T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1},\quad T_iT_j = T_jT_i\ \ (j \neq i\pm 1).$$

$$X_iX_j = X_jX_i,\quad X_iX_i^{-1} = X_i^{-1}X_i = 1.$$

$$T_iX_iT_i = qX_{i+1},\quad T_iX_j = X_jT_i\ \ (j\neq i, i+1).$$

として定義してもよい．affine Hecke 代数の退化を得るには，$x_ix_j = x_jx_i$ を仮定した上で

$$T_i = s_i + (q-1)t_i + \frac{(q-1)^2}{2}u_i + \cdots,$$

$$X_i = q^{x_i} = 1 + (q-1)x_i + \frac{(q-1)^2}{2}x_i(x_i-1) + \cdots$$

として，基本関係式に代入し $(q-1)$ の２次以上の項を無視する．

Remark 12. 実際，２次の項まで一致させようとすると，まず $T_i^2 = (q-1)T_i + q$ に代入して

$$s_i^2 + (q-1)(2s_it_i) + (q-1)^2(t_i^2 + s_iu_i) + \cdots = 1 + (q-1)(s_i+1) + (q-1)^2t_i + \cdots$$

より $s_i^2 = 1$, $t_i = \frac{s_i+1}{2}$, $u_i = 0$ を得る．すると，

$$\begin{aligned} T_iT_{i+1}T_i = s_is_{i+1}s_i &+ \frac{(q-1)}{2}(3s_is_{i+1}s_i + s_is_{i+1} + s_{i+1}s_i + 1) \\ &+ \frac{(q-1)^2}{4}(3s_is_{i+1}s_i + 2s_is_{i+1} + 2s_{i+1}s_i + 2s_i + s_{i+1} + 2) + \cdots \end{aligned}$$

となるから，$T_iT_{i+1}T_i$ と $T_{i+1}T_iT_{i+1}$ を２次の項まで一致させようとすると $s_i = s_{i+1}$ となって関係式がつぶれすぎてしまう．

さて，$\frac{d}{dq}T_i|_{q=1} = \frac{s_i+1}{2}$, $\frac{d}{dq}X_i|_{q=1} = x_i$ であるから，$T_iX_iT_i = qX_{i+1}$ の両辺を q で微分して $q=1$ とおくと

$$\frac{s_i+1}{2}s_i + s_ix_is_i + s_i\frac{s_i+1}{2} = 1 + x_{i+1}$$

すなわち，$s_ix_i - x_{i+1}s_i = -1$ を得る．同様に $T_iX_j = X_jT_i$ $(j \neq i, i+1)$ から $s_ix_j = x_js_i$ $(j \neq i, i+1)$ を得る．

そこで，$k[r]$ を１変数多項式環として以下のように退化 affine Hecke 代数を定義する．

Definition 13. 退化 affine Hecke 代数 $\mathcal{H}_n$ とは，生成元が $s_1, \ldots, s_{n-1}, x_1, \ldots, x_n$，基本関係が

$$s_i^2 = 0, \quad s_is_{i+1}s_i = s_{i+1}s_is_{i+1}, \quad s_is_j = s_js_i \ \ (j \neq i \pm 1).$$

$$x_ix_j = x_jx_i,$$

$$s_ix_i - x_{i+1}s_i = -r, \quad s_ix_j = x_js_i \ \ (j \neq i, i+1).$$

で定義される $k[r]$-代数である．

対称群の群環と多項式環のテンソル積 $\mathcal{H}_n = kS_n \otimes k[r][x_1, \ldots, x_n]$ に $s_ix_i - x_{i+1}s_i = -r$, $s_ix_j = x_js_i$ $(j \neq i, i+1)$ という交換関係を与えて得られる代数といってもよい．

2.2. **Lusztig の結果.** X を $G = GL_n(\mathbb{C})$ の旗多様体，$\mathfrak{g} = gl_n(\mathbb{C})$,

$$\tilde{X} = \{(x, b) \in \mathfrak{g} \times X | b \text{ は } x\text{-stable}\}$$

とする．$\tilde{X}$ は $(g,t)(x,b) = (t^{-2}Ad(g)x, Ad(g)b)$ により $G \times \mathbb{C}^\times$-多様体である．同様に $\mathfrak{g}$ も $G \times \mathbb{C}^\times$-多様体になり，$p : \tilde{X} \to \mathfrak{g}$ を第１成分への射影とすると p は同変写像である．

$$K = Rp_!\mathbb{C} \in D^{G\times\mathbb{C}^\times}(\mathfrak{g})$$

とおく．次は Lusztig の定理である．

Theorem 14. $\mathrm{End}_{D^{G\times\mathbb{C}^\times}(\mathfrak{g})}(K)$ は $\mathbb{C}$ 上の退化 affine Hecke 代数 $\mathcal{H}_n$ と同型であり，この同型のもとで，$\mathrm{End}^0_{D^{G\times\mathbb{C}^\times}(\mathfrak{g})}(K)$ は $\mathbb{C}S_n$ と同一視される．

2.3. **荒川・鈴木関手.** $\mathfrak{g} = gl_n(\mathbb{C})$ とする．$\mathcal{O}$ を有限生成 $\mathfrak{g}$-加群であって，ウエイト分解をもち Borel 部分 Lie 環に関して局所有限であるもののなす圏とする．

$$\mathfrak{h} = \mathbb{C}y_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}y_n, \quad \mathfrak{h}^* = \mathbb{C}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}x_n$$

とし，$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ の定める中心指標を

$$\chi_\lambda : Z(\mathfrak{g}) \simeq \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_n]^{S_n} \to \mathbb{C}$$

とする．ここで対称群の $\mathfrak{h}^*$ への作用は dot 作用 $w \circ \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$ である．

$$\mathcal{O} = \oplus_\lambda \mathcal{O}^{[\lambda]}$$

と中心指標に合わせて圏 $\mathcal{O}$ も直和分解される．$M \in \mathcal{O}$ に対し，$M = \oplus_\lambda M^{[\lambda]}$ とかく．

$$\Omega = \sum_{i,j=1}^{n} E_{ij} \otimes E_{ji} \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$$

と定める．E を $\mathfrak{g}$ の定義表現とする．

Lemma 15. $M \in \mathcal{O}$ に対し，$M \otimes E^{\otimes r}$ は次の作用により退化 affine Hecke 代数 $\mathcal{H}_r$ の表現加群である．

$$\begin{cases} s_i \mapsto \Omega_{i,i+1} \quad (1 \le i < r) \\ x_j \mapsto n - 1 + \sum_{0 \le i < j} \Omega_{ij} \quad (1 \le j \le r) \end{cases}$$

ここで，Ω_{ij} は Ω を i 番めと j 番めのテンソル成分に作用させる作用素であり，M を 0 番めのテンソル成分と数えている．

Theorem 16. μ を支配的整ウエイト，$L(\mu)$ を μ を最高ウエイトにもつ有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群とすると，$L(\mu) \otimes E^{\otimes r}$ は $(U(\mathfrak{g}), \mathcal{H}_r)$-両側加群であって

(a) $\mathrm{End}_{U(\mathfrak{g})}(L(\mu) \otimes E^{\otimes r})$ は $\mathcal{H}_r$ の商代数である．
(b) $\mathrm{End}_{\mathcal{H}_r}(L(\mu) \otimes E^{\otimes r})$ は $U(\mathfrak{g})$ の商代数である．

これは skew 版の Schur-Weyl 相互律であるが，モジュラー版の域には達していないので，精密化が望まれる．

Definition 17. $F_\lambda : \mathcal{O} \to \mathcal{H}_r\text{-}mod$ を次で定め，荒川・鈴木関手と呼ぶ．

$$F_\lambda = \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(M(\lambda), -)$$

ただし，$M(\lambda)$ は Verma 加群である．

順序づけられた multisegment

$$[\mu_1 + n - 1, \lambda_1 + n - 2], \ [\mu_2 + n - 2, \lambda_2 + n - 3], \ldots, [\mu_n, \lambda_n - 1]$$

を考える．ここで λ は分割，$\lambda \supset \mu$ である．μ は行の長さが大きい順に並んでいるとは限らない．この順序づけられた multisegment は $\mathcal{H}_r$ の放物型部分代数 $\mathcal{H}_{\lambda-\mu}$ の 1 次元加群 $\mathbb{C}_{\lambda-\mu}$ を定める．次は Arakawa-Suzuki による．

Theorem 18. $M(\lambda, \mu) = \mathcal{H}_r \otimes_{\mathcal{H}_{\lambda-\mu}} \mathbb{C}_{\lambda-\mu}$ とおくと，$F_\lambda(M(\mu)) \simeq M(\lambda, \mu)$ であり，$F_\lambda(L(\mu))$ は既約か零である．

かれらの結果はいつ $F_\lambda(L(\mu)) \neq 0$ かも教えてくれる．またこのとき $L(\lambda,\mu) = F_\lambda(L(\mu))$ とおけば $L(\lambda,\mu) = \mathrm{Top}(M(\lambda,\mu))$ である．F_λ は skew Schur 関手とよぶべきものであり，やはりモジュラー版の開発が望まれる．

Remark 19. $\mathcal{H}_r$-*mod* $\to Y(gl_n)$-*mod* という関手もあり，Drinfeld 関手と呼ばれる．

Remark 20. $\mathbb{C}[t,t^{-1}]^{\otimes r}$ の $\mathbb{C}[t]$-部分加群の列 $\{L_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ であって

(1) $L_i \otimes_{\mathbb{C}[t]} \mathbb{C}[t,t^{-1}] = \mathbb{C}[t,t^{-1}]^{\otimes r}$,

(2) $\cdots \subset L_i \subset L_{i+1} \subset \cdots$,

(3) $tL_i = L_{i-n}$.

をみたすものを考えれば q-Schur 代数の代わりに affine q-Schur 代数を得る．

3. BC 型への拡張

3.1. **Schur 代数.** $G = GSp_{2n}$ とする．定義加群 E は $e_{1'} = e_{2n}, \ldots, e_{n'} = e_{n+1}$ として

$$E = (\oplus_{i=1}^n ke_i) \oplus (\oplus_{i=1}^n ke_{i'})$$

であり，$(e_i,e_j) = 0 = (e_{i'},e_{j'})$, $(e_i,e_{j'}) = \delta_{ij}$ により交代形式が定義される．G の関数環は $k[G] = k[X_{ij}]_{1\le i,j\le 2n}[\frac{1}{detX}]/I$ であり，$k[G]$-*mod* を $G(k)$-*mod* とかく．ただし，I は次の元で生成される両側イデアルである．

$$\sum_{k=1}^n (X_{ik}X_{jk'} - X_{ik'}X_{jk}),\ \ \sum_{k=1}^n (X_{ki}X_{k'j} - X_{k'i}X_{kj}),\ \ (1 \le i \neq j' \le 2n)$$

$$\sum_{k=1}^n (X_{ik}X_{i'k'} - X_{ik'}X_{i'k}) - \sum_{k=1}^n (X_{kj}X_{k'j'} - X_{k'j}X_{kj'}),\ \ (1 \le i,j \le n)$$

多項式部分 $A(n) = k[X_{ij}]_{1\le i,j\le 2n} + I/I$ は次数環であるから，r 次部分を $A(n,r)$ とかく．ϵ, Δ を A 型のときと同じ式で定義すると $A(n,r)$ は余代数になる．Donkin は次の代数を導入した．

Definition 21. $S(n,r) = \mathrm{Hom}_k(A(n,r),k)$ を symplectic Schur 代数と呼ぶ．

3.2. **Brauer 代数.** symplectic Schur 代数の場合，Schur-Weyl 相互律のパートナーは Brauer 代数である．

Definition 22. $\omega \in k$ とする．Brauer 代数 $B_r(\omega)$ とは生成元 $s_1,\ldots,s_{r-1},e_1,\ldots,e_{r-1}$ と基本関係

$$s_i^2 = 1, \quad s_is_{i+1}s_i = s_{i+1}s_is_{i+1}, \quad s_is_j = s_js_i \ \ (j \neq i \pm 1)$$

$$e_i^2 = \omega e_i, \quad e_ie_{i+1}e_i = e_i, \quad e_{i+1}e_ie_{i+1} = e_{i+1}, \quad e_ie_j = e_je_i \ \ (j \neq i \pm 1)$$

$$e_is_i = e_i = s_ie_i$$

$$s_ie_{i+1}e_i = s_{i+1}e_i, \quad e_{i+1}e_is_{i+1} = e_{i+1}s_i, \quad s_ie_j = e_js_i \ \ (j \neq i \pm 1)$$

で定義される k-代数である．

次の定理は Dipper-Doty-Hu による．

Theorem 23. k を無限体とすると次が成立．

(1) $S(n,r) \simeq \mathrm{End}_{B_r(-2n)}(E^{\otimes r})$.
(2) $r \leq n$ ならば $B_r(-2n) \simeq \mathrm{End}_{S(n,r)}(E^{\otimes r})$.

3.3. **q-analogue.** $k[G]$ を $k_q[G]$ にすると，$B_r(2n)$ は Birman-Murakami-Wenzl 代数に置き換わる.

Definition 24. $q, \lambda \in k^{\times}$ とする．BMW 代数とは生成元 $T_1, \ldots, T_{r-1}$ と基本関係

$$(T_i - \lambda)(T_i - q)(T_i + q^{-1}) = 0$$

$$T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}, \quad T_i T_j = T_j T_i \ \ (j \neq i \pm 1)$$

$$E_i T_i^{\pm 1} = T_i^{\pm 1} E_i = \lambda^{\pm 1} E_i$$

$$E_i T_{i\pm 1} E_i = \lambda^{-1} E_i, \quad E_i T_{i\pm 1}^{-1} E_i = \lambda E_i$$

で定義される k-代数である．ただし

$$E_i = 1 - \frac{T_i - T_i^{-1}}{q - q^{-1}}.$$

今考えている C 型の Schur-Weyl 相互律の場合 $\lambda = -q^{-2n-1}$ になる.

3.4. **affine BMW 代数.** BMW 代数の affine 化は Ram により定義された.

Definition 25. $q, \lambda, Q_1, Q_2, \dots \in k^{\times}$ とする．affine BMW 代数とは生成元が $T_1, \ldots, T_{r-1}, X_1$ で，基本関係が BMW 代数の基本関係に加えて

$$E_1 X_1^r E_1 = Q_r E_1, \quad E_1 X_1 T_1 X_1 = \lambda E_1$$

で定義される k-代数である.

3.5. **退化 BMW 代数.** 退化 affine BMW 代数は，affine BMW 代数が導入される以前にすでに Nazarov により導入されていた.

Definition 26. $\omega, \omega_1, \omega_2, \dots \in k$ とする．affine Wenzl 代数とは，生成元が

$$s_1, \ldots, s_{r-1}, e_1, \ldots, e_{r-1}, x_1, \ldots, x_r$$

で，基本関係が Brauer 代数 $B_r(\omega)$ の基本関係に加えて

$$s_i x_j = x_j s_i \ \ (j \neq i, i+1), \quad e_i x_j = x_j e_i \ \ (j \neq i, i+1)$$

$$s_i x_i - x_{i+1} s_i = e_i - 1 = x_i s_i - s_i x_{i+1}$$

$$e_1 x_1^r e_1 = \omega_r e_1$$

$$e_i (x_i + x_{i+1}) = 0 = (x_i + x_{i+1}) e_i$$

で定義される k-代数である.

Remark 27. $X_{i+1} = T_i X_i T_i$ とおくと，$X_1, \ldots, X_r$ は可換である．そこで，$E_i = 1 - \frac{T_i - T_i^{-1}}{q - q^{-1}}$ より $\frac{d}{dq} T_i|_{q=1} = 1 - e_i$ であることに注目し，$X_i = q^{2x_i}$ とおいて $X_{i+1} = T_i X_i T_i$ を q で微分すれば $s_i x_i - x_{i+1} s_i = e_i - 1$ が得られる.

Remark 28. $\mathfrak{g} = sp_{2n}$ とすると，$L(\mu) \otimes E^{\otimes r}$ には affine Wenzl 代数が作用し，$\mathfrak{g}$ の作用と可換である．つまりここにも Schur-Weyl 相互律がある.

3.6. **affine Sergeev 代数.**

Definition 29. Clifford 超代数 C_n とは次数が奇の生成元 $c_1, \dots, c_n$ と基本関係

$$c_i^2 = 1, \quad c_i c_j = -c_j c_i \ \ (i \neq j)$$

で定義された k-超代数である.

対称群の捩れ群環 T_n を生成元が $t_1, \dots, t_{n-1}$ で基本関係が

$$t_i^2 = 1, \quad t_i t_{i+1} t_i = t_{i+1} t_i t_{i+1}, \quad t_i t_j = -t_j t_i \ \ (j \neq i, i \pm 1)$$

で定義される k-代数として定義する.

Remark 30. $H^2(S_n, \mathbb{C}^\times) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $(n \geq 5)$ である.

Definition 31. Sergeev 超代数とは，超テンソル積 $T_n \otimes C_n$ に交換関係

$$t_i c_j = -c_j t_i$$

を与えて得られる超代数である.

Lemma 32. Sergeev 超代数は kS_n と C_n の半直積に同型である.

Definition 33. affine Sergeev 超代数とは，偶生成元 $s_1, \dots, s_{r-1}, x_1, \dots, x_r$ と奇生成元 $c_1, \dots, c_r$ で生成され，基本関係が以下のように与えられるものをいう.

(1) $s_1, \dots, s_{r-1}$ は対称群の基本関係式をみたす.
(2) $x_1, \dots, x_r$ は可換.
(3) $c_1, \dots, c_r$ は Clifford 関係式をみたす.
(4) $s_i c_j = c_j s_i$ $(j \neq i, i+1)$, $s_i c_i = c_{i+1} s_i$, $s_i c_{i+1} = c_i s_i$.
(5) $s_i x_j = x_j s_i$ $(j \neq i, i+1)$.
(6) $s_i x_i - x_{i+1} s_i = -c_i c_{i+1} - 1$.

定義式をみれば affine Wenzl 代数との類似性は明らかであろう．前節までに紹介してきた A 型 affine Hecke 代数，A 型退化 affine Hecke 代数，affine Wenzl 代数は，すべて有限次元モジュラー既約表現の分類が $A^{(1)}$ 型の柏原クリスタルで記述されることがわかっているが，Brundan-Kleshchev の結果によれば，affine Sergeev 代数のモジュラー既約表現の分類は $A^{(2)}$ 型の柏原クリスタルで記述される.

3.7. **q-analogue.** Sergeev 超代数の q-analogue も存在する.

Definition 34. Hecke-Clifford 代数とは，生成元が $T_1, \dots, T_{r-1}, C_1, \dots, C_r$ で基本関係が以下のように与えられるものをいう.

(1) $T_1, \dots, T_{r-1}$ は $\mathcal{H}_r^A(q)$ の基本関係式をみたす.
(2) $C_1, \dots, C_r$ は Clifford 関係式をみたす.
(3) $T_i C_j = C_j T_i$ $(j \neq i, i+1)$.
(4) $T_i C_{i+1} = C_i T_i - (q - q^{-1})(C_i - C_{i+1})$.

さらに，affine Sergeev 超代数の q-analogue も存在して affine Sergeev 超代数はその退化になっているのであるが，ここでは定義は省略する.

Remark 35. Nazarov によれば，affine Sergeev 超代数の超加群のなす圏から Queer Lie 超代数の Yangian の超加群のなす圏への Drinfeld 関手が存在する.

4. 結び

以上紹介してきたことからわかるように，不思議な代数がたくさん存在していて，柏原クリスタルと関係したり，幾何のにおいがしたりして，もう少し理解するといいことがありそうに思われます．affine Hecke 代数については巡回商という考え方で有限次元代数の理論に帰着させていろいろ結果を得ました．最近では，affine Wenzl 代数に同じ手法を使って，すべての有限次元既約表現を構成することに成功しましたので最後にこの結果だけ報告して終わりとします．これは Mathas と Rui との共同研究です．詳しくは論文をご覧下さい．

References

1. T. Arakawa and T. Suzuki, *Duality between* $sl_n(C)$ *and the degenerate affine Hecke algebra*, J. Algebra **209** (1998), 288–304.
2. S. Ariki, A. Mathas and H. Rui, Cyclotomic Nazarov-Wenzl algebras, to appear in Nagoya Math. J. **math.QA/0506467**.
3. A. A. Beilinson, G. Lusztig and R. MacPherson, *A geometric setting for the quantum deformation of* GL_n, Duke Math. J. **61** (1990), 655–677.
4. J. Brundan and A. Kleshchev, *Hecke-Clifford superalgebras, crystals of type* $A_{2l}^{(2)}$ *and modular branching rules for* $\hat{S}_n$, Represent. Theory **5** (2001), 317–403.
5. R. Dipper and G. James, *The q-Schur algebra*, Proc. London Math. Soc. (3) **59** (1989), 23–50.

Research Institute for Mathematical Sciences
Kyoto University
Kyoto 606-8502, JAPAN
E-mail address: ariki@kurims.kyoto-u.ac.jp