MORITA DUALITY AND RING EXTENSIONS *

KAZUTOSHI KOIKE

ABSTRACT. Let A be a ring with Morita duality induced by a bimodule ${}_BQ_A$ and let R be a ring extension of A. Müller proved the fundamental result that if R_A and $\mathrm{Hom}_A(R,Q)_A$ are linearly compact, then R has a Morita duality induced by ${}_S\mathrm{Hom}_A(R,Q)_R$, where $S = \mathrm{End}_R(\mathrm{Hom}_A(R,Q))$. We improve this result by showing the existence of a category equivalence between certain categories of A-rings and B-rings whenever A and B are two Morita dual rings. We also generalize and unify a result of Fuller-Haack about Morita duality of semigroup rings and a result of Mano about self-duality of finite centralizing extensions.

1 研究の背景

環の Morita duality や self-duality が様々な拡大環にどのように遺伝するかについては、多くの研究者によって調べられてきた．基礎となるのは次の Müller の結果である．

定理 A ([1, Proposition 7.3] 参照)**.** A を両側加群 ${}_BQ_A$ によって定められる Morita duality をもつ環，R を A の拡大環とする．R_A と $\mathrm{Hom}_A(R,Q)_A$ が linearly compact であれば，R は両側加群 ${}_S\mathrm{Hom}_A(R,Q)_R$ によって定められる Morita duality をもつ．ただし $S = \mathrm{End}_R(\mathrm{Hom}_A(R,Q))$ である．

この定理の特別な場合として，Fuller-Haack は次の定理を示した．

定理 B ([1, Corollary 9.4] 参照)**.** G を有限半群とする．環 A が環 B に右 Morita dual であれば，半群環 AG は半群環 BG に右 Morita dual である．特に環 A が self-duality をもてば，半群環 AG も self-duality をもつ．

この半群環の self-duality を一般化する形で，真野は次の定理を証明した．

定理 C ([1, Theorem 9.2] 参照)**.** 環 A は両側加群 ${}_AQ_A$ によって定められる self-duality をもつとする．A の拡大環 R が条件

(1) R は $r_1, \ldots, r_n$ を基底とする自由右 A 加群である．

*The detailed version of this note will be submitted for publication elsewhere.

(2) 各 r_i は A のすべての元と可換である．

(3) $r_i r_j = \sum_{k=1}^{n} r_k a_{ijk} \quad (a_{ijk} \in A)$ と表すとき，各 a_{ijk} は Q のすべての元と可換である．

を満たすならば，R も self-duality をもつ．

今回の研究において，2 つの環 A と B が Morita dual のとき，ある種の A-環の圏と B-環の圏の間に圏同値が存在することを示すことによって，定理 A を改良した (定理 2)．またその応用として，自由であるような有限中心的拡大 (定理 C の条件 (1)，(2) を満たす拡大環) の Morita duality を決定し，定理 B と定理 C を統合・一般化することができた (定理 4)．

以下この報告集では，すべての環は単位元をもち, すべての加群は単位的であるとする.

2 Morita duality の定義と両側加群の圏

A と B を環とする．Mod-A，B-Mod によって，それぞれ右 A 加群全体，左 B 加群全体の圏を表す．**Morita duality** とは，次の条件を満たす Mod-A の充満部分圏 $\mathcal{A}$ と B-Mod の充満部分圏 $\mathcal{B}$ の間の duality (すなわち反変同値) $F : \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{B} : G$ である:

(1) $A_A \in \mathcal{A}$, ${}_B B \in \mathcal{B}$.

(2) $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ は部分加群と剰余加群で閉じている．

実際には，F, G は適当な両側加群 ${}_B Q_A$ を用いて $F \cong \mathrm{Hom}_A(-, Q)$, $G \cong \mathrm{Hom}_B(-, Q)$ として表現可能である．ここで，${}_B Q_A$ は忠実平衡的両側加群で，Q_A と ${}_B Q$ は移入的余生成加群となる．逆に，このような両側加群 ${}_B Q_A$ に対して，双対圏手 $\mathrm{Hom}_A(-, Q)$, $\mathrm{Hom}_B(-, Q)$ は Q-反射的な加群 (定義は後述) からなる充満部分圏の間の Morita duality となるため，両側加群 ${}_B Q_A$ は **Morita duality を定義する**という．このように，Morita duality は片側加群の圏に対して定義されるが，今回の研究ではある種の両側加群の圏に注目した．

以下，この論文を通して，両側加群 ${}_B Q_A$ は Morita duality を定めるとし，双対圏手を $(-)^* = \mathrm{Hom}_A(-, Q)$，$(-)^\# = \mathrm{Hom}_B(-, Q)$ とおく．右 A 加群 X (左 B 加群 Y) は，標準的な評価写像 $X \to X^{*\#}$ ($Y \to Y^{\#*}$) が同型写像であるとき，**Q-反射的** (**Q-reflexive**)

であるという．両側加群の圏を次のように定める．

$$\mathcal{M}_{A-A} = \{{}_AL_A \mid L_A, {L^*}_A \text{は } Q\text{-反射的}\},$$
$$ {}_B\mathcal{M}_A = \{{}_BM_A \mid M_A, {}_BM \text{は } Q\text{-反射的}\},$$
$$ {}_{B-B}\mathcal{M} = \{{}_BN_B \mid {}_BN, {}_BN^{\#} \text{は } Q\text{-反射的}\}.$$

ただし射は両側準同型写像である．よく知られているように，${}_BQ_A$ が Morita duality を定めるとき，右 A 加群 X (左 B 加群 Y) が Q-反射的であることと linearly compact であることは同値である．したがって，定理 A の拡大環 R に対する仮定は ${}_AR_A \in \mathcal{M}_{A-A}$ であることを意味する．Morita duality を制限することによって，これらの両側加群の圏について，次の補題が成り立つ．

補題 1. (1) ${}_AA_A \in \mathcal{M}_{A-A}$, ${}_BQ_A \in {}_B\mathcal{M}_A$, ${}_BB_B \in {}_{B-B}\mathcal{M}$.

(2) $\mathcal{M}_{A-A}$, ${}_B\mathcal{M}_A$, ${}_{B-B}\mathcal{M}$ は，部分両側加群，剰余両側加群，両側加群の拡大で閉じている．

(3) 双対圏手の対 $(-)^* : \mathcal{M}_{A-A} \rightleftarrows {}_B\mathcal{M}_A : (-)^{\#}$ と $(-)^* : {}_B\mathcal{M}_A \rightleftarrows {}_{B-B}\mathcal{M} : (-)^{\#}$ は duality である．したがって，これらの合成 $(-)^{**} : \mathcal{M}_{A-A} \rightleftarrows {}_{B-B}\mathcal{M} : (-)^{\#\#}$ は圏同値である．

3 環の圏とその同値

環 R と環準同型写像 $A \xrightarrow{f} R$ の対 (R, f) を A-**環** (A-**ring**) という．A の拡大環や剰余環は A-環である．2 つの A-環 (R, f) と (R', f') の間の**射** $\phi : (R, f) \to (R', f')$ を $\phi \circ f = f'$ を満たす環準同型写像 $\phi : R \to R'$ として定める．以後 A-環 (R, f) を単に R で表す．A-環 R は (A, A) 両側加群と見なすことができ，A-環の射 $R \to R'$ は (A, A) 両側準同型写像となる．

A-環の圏と B-環の圏の充満部分圏を，それぞれ

$$\mathcal{R}_A = \{R \mid {}_AR_A \in \mathcal{M}_{A-A}\},\ {}_B\mathcal{R} = \{S \mid {}_BS_B \in {}_{B-B}\mathcal{M}\}$$

によって定めれば，定理 A の精密化の次の定理を述べることができる．

定理 2. (1) $(-)^{**} : \mathcal{R}_A \rightleftarrows {}_B\mathcal{R} : (-)^{\#\#}$ は圏同値を定める．

(2) 各 $R \in \mathcal{R}_A$ に対して，R^* は Morita duality を定める (R^{**}, R) 両側加群となる．

$R \in \mathcal{R}_A$ のとき，${}_A R_A \in \mathcal{M}_{A-A}$ であるから，$R^{**} \in {}_{B-B}\mathcal{M}$ であるが，実際には R^{**} は B-環の構造をもつ．さらに，$(-)^{**}$ は A-環の射を B-環の射に写すことを確かめて，定理 2 の (1) を得る．また，環として $R^{**} \cong \mathrm{End}_R(R^*)$ であるから，定理 2 の (2) は定理 A そのものである．この種の結果においては，通常 (定理 A，B，C でも) $\mathrm{End}_R(R^*)$ が用いられる．こちらの方が環構造は明らかであるが，圏手として見なす場合は R^{**} の方が扱いやすい．また，後述の定理 4 でも R^{**} の方が計算は容易である．

定理 2 より，環 A と B が Morita dual のとき，A と B のある種の拡大環との間には，Morita dual であるという関係の元で，同型の意味で 1 対 1 対応が存在する．次の系は，対応する A-環と B-環のそれぞれ A-，B-部分環全体は一種の annihilator によって 1 対 1 に対応することを示している．

系 3. $R \in \mathcal{R}_A$ に対して，$U = R^*$，$S = U^* = R^{**}$ とおく．R の A-部分環 R' に対して，

$$U' = \{u \in U \mid u(R') = 0\},\ S' = \{s \in S \mid s(U') = 0\}$$

とおけば，U/U' は Morita duality を定める (S', R') 両側加群となる．また，対応 $R' \mapsto S'$ は R の A-部分環全体と S の B-部分環全体との間の 1 対 1 対応を与える．

この系より，両側加群 ${}_B Q_A$ が Morita duality を定めるとき，例えば n 次行列環 $R = M_n(A)$ の A-部分環も Morita duality をもつことや，Morita dual な環や Morita duality を定める両側加群が annihilator によって具体的に記述できることが分かる．

4　有限中心的拡大

R を A の拡大環とする．A の任意の元と可換な R の元 $r_1, \ldots, r_n$ で，$R = \sum_{i=1}^n r_i A$ となるようなものが存在するとき，R は A の**有限中心的拡大 (finite centralizing extension)** と言われる．両側加群 ${}_A M_A$ が $M = mA = Am$ と書けるとき，$M \in \mathcal{M}_{A-A}$ であることが分かる．A の有限中心的拡大環 R は，(A, A) 両側加群として，この ${}_A M_A$ のような両側加群の有限個の直和の剰余両側加群であるから，補題 1 より R は $\mathcal{R}_A$ に属する．したがって定理 2 より有限中心的拡大環に Morita duality は遺伝する．この事実はもちろんよく知られているが，次の定理において，有限中心的拡大 $R = \sum_{i=1}^n r_i A$ において，$r_1, \ldots, r_n$ が自由 A-基底になっているとき，R と Morita dual な環を完全に決定した．

なお，有限中心的拡大の一般化として，有限正規拡大と有限三角拡大がある ([1, Sections 8–9] 参照)．これらの拡大環に Morita duality が遺伝することもすでに示されているが，上の有限中心的拡大の場合と同じ論法で示すことができる．有限正規拡大や有限三角拡大については，たとえ生成元が自由基底になっていても，Morita dual な環を具体的に計算することは難しいものと思われる．

Morita duality を定める両側加群 ${}_BQ_A$ は忠実平衡であるから，A，B の中心は同型，すなわち，環同型写像 $\alpha : \mathrm{Cen}(A) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Cen}(B)$ が存在する．ここで α は，任意の $q \in Q$ に対して $qa = \alpha(a)q$，によって定められる．また次の定理 4 の条件 (3) における a_{ijk} が $\mathrm{Cen}(A)$ に属することが直ちに分かる．条件 (3) は，条件 $(3)^{**}$ と対比するために書いただけで，実際には何の制約も与えておらず，単に R は自由であるような A の有限中心的拡大であるという意味である．以上の注意の下，定理 4 を次のように記述できる．

定理 4. 両側加群 ${}_BQ_A$ は Morita duality を定めるとする．R は A の拡大環で，条件

(1) $r_1, \ldots, r_n$ は R の A-自由基底である．

(2) 各 r_i は A の任意の元と可換である．

(3) $r_i r_j = \sum_{k=1}^n r_k a_{ijk} \quad (a_{ijk} \in A)$.

を満たすとする．$U = R^*$，$S = U^*$ とおく．このとき，U は Morita duality を定める (S, R) 両側加群で，S は条件

$(1)^{**}$ $r_1^{**}, \ldots, r_n^{**}$ は S の B-自由基底である．

$(2)^{**}$ 各 r_i^{**} は B の任意の元と可換である．

$(3)^{**}$ $r_i^{**} r_j^{**} = \sum_{k=1}^n r_k^{**} \alpha(a_{ijk}) \quad (\alpha(a_{ijk}) \in B)$.

を満たす．ただし r_i^{**} は $r_i^{**}(u) = u(r_i)$ $(u \in U)$ によって定義される S の元である．

この定理は，R の積の構造定数 a_{ijk} と S の積の構造定数 $\alpha(a_{ijk})$ はほとんど「同じ」であることを示している．半群環の場合，構造定数には 0 か 1 しか現れないが，同型写像 α はそれらを保つから，特別な場合として Fuller-Haack の定理 B を得る．また $A = B$ で $\alpha(a_{ijk}) = a_{ijk}$ の場合として，真野の定理 C を得る．

参考文献

[1] W. Xue. *Rings with Morita duality.* Springer-Verlag, Berlin, 1992.

Okinawa National College of Technology
905 Henoko, Nago City, Okinawa 905-2192, JAPAN
E-mail address: koike@okinawa-ct.ac.jp