REMARKS ON TRANSITIVITY OF EXCEPTIONAL SEQUENCES [1]

Tokuji Araya

Abstract. Let k be an algebraically closed field of characteristic 0. We denote by $\mathcal{C}$ the abelian k-category which has enough projectives (or enough injectives), and by $\mathcal{D}^b(\mathcal{C})$ the bounded derived category of $\mathcal{C}$.

A complex $E^\bullet \in \mathcal{D}^b$ is called *exceptional* if $\mathrm{RHom}(E^\bullet, E^\bullet) \cong k$, and a sequence $\epsilon = (\cdots, E_i^\bullet, E_{i+1}^\bullet, \cdots)$ of exceptional complexes is called an *exceptional sequence* if $\mathrm{RHom}(E_i^\bullet, E_j^\bullet) = 0$ for all $i > j$.

Let $\mathcal{C}$ be a category $\mathrm{mod}A$ of finitely generated modules of a hereditary k-algebra A, or a category $\mathrm{coh}(\mathbf{X})$ of coherent sheaves of a weighted projective line $\mathbf{X}$ over k. In this case, for any exceptional sequence ϵ, the length of ϵ is smaller than or equal to the rank n of Grothendieck group of $\mathcal{C}$. An exceptional sequence ϵ is called *complete* if the length of ϵ is equal to n. It is shown by W. Crawley-Boevey (in the case of $\mathcal{C} = \mathrm{mod}A$) and by H. Meltzer (in the case of $\mathcal{C} = \mathrm{coh}(\mathbf{X})$) that the braid group B_n on n strings acts *transitively* on the set of complete exceptional sequences.

In this talk, we consider exceptional sequences on a translation quiver Γ.

1. Preliminaries

この講演を通じて $\Gamma = \mathbb{Z}\mathbf{A}_n$ を translation quiver とし、Γ_0 を Γ の頂点集合、τ を translation とする。

定義 1.1 $X, Y \in \Gamma_0$ とする。

1. X から Y へ arrow があるとき、$X \lessdot Y$ と表す。
2. X から Y へ path があるとき、$X < Y$ と表す。
3. X と Y の間に path がないとき、$X \nsim Y$ と表す。

定義 1.2 頂点集合 Γ_0 を以下のようにして、$\{\ (p, q) \mid 1 \le p - q \le n\}$ と同一視する。

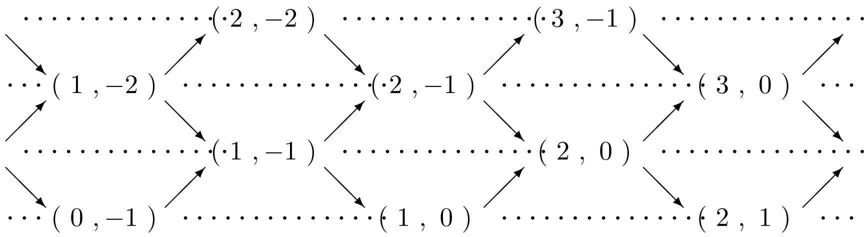
[1] The detailed version of this paper will be submitted for publication elsewhere.

1. 一番下の τ-orbit 上の頂点を、$\cdots,(p,p-1),(p+1,p),(p+2,p+1),\cdots$ とする。

2. $X\in\Gamma_0$ に対し、$X \lessdot (p,q)$, $X\neq(p-1,q)$ のとき、$X=(p,q-1)$ と定義する。

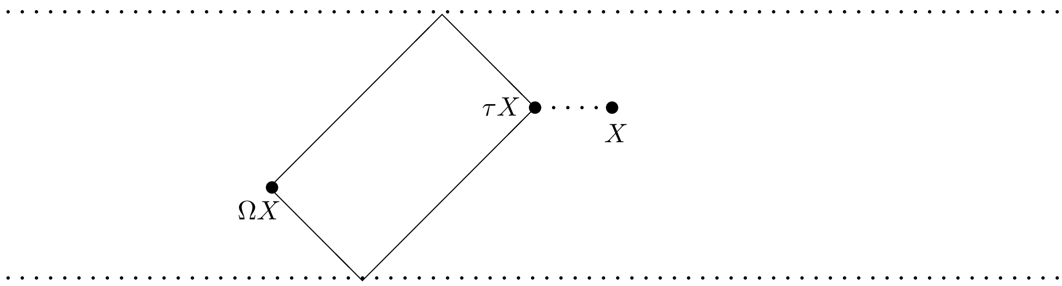
$X=(p,q),Y=(p',q')\in\Gamma_0$ に対し、X と Y が同じ τ-orbit にあるための必要十分条件は $p-q=p'-q'$ であることに注意する。

例 1.3 $\Gamma=\mathbb{Z}\mathbf{A}_4$ のとき、次のようになる。



定義 1.4 syzygy functor $\Omega:\Gamma_0\to\Gamma_0$ を、$\Omega(p,q)=(q,p-n-1)$ と定義する。

例 1.5 各 $X\in\Gamma_0$ に対し、τX, ΩX は以下のような位置関係にあることに注意する。



k を標数 0 の代数的閉体とし、n を正の偶数とする。$R=k[x,y]/(y^2-x^{n+1})$ を 1-次元次数付き環とし、mod$R$ を有限生成次数付き R-加群のなす圏で射は次数を保つものとする。さらに CMR を極大 CM 加群全体のなす充満部分圏とする。このとき、CMR の Auslander-Reiten quiver の射影加群でない極大 CM 加群全体から得られる full subquiver を Γ とおくと、$\Gamma=\mathbb{Z}\mathbf{A}_n$ である (c.f. [1])。定義 1.4 で定義している Ω は、この状況での syzygy 加群に対応している。

定義 1.6 各頂点 $X\in\Gamma_0$ に対し、$\mathrm{S}^+(X)$, $\mathrm{S}^-(X)$, $\mathrm{S}'^+(X)$, $\mathrm{S}'^-(X)$, $\Delta(X)$, $\Delta^+(X)$, $\Delta^-(X)$ を以下のように定義する。

1. $\mathrm{S}^+(X)$ は slice であり、$Y\in\mathrm{S}^+(X)$ ならば $X\leq Y$ である。

2. $\mathrm{S}^-(X)$ は slice であり、$Y \in \mathrm{S}^-(X)$ ならば $Y \leq X$ である。

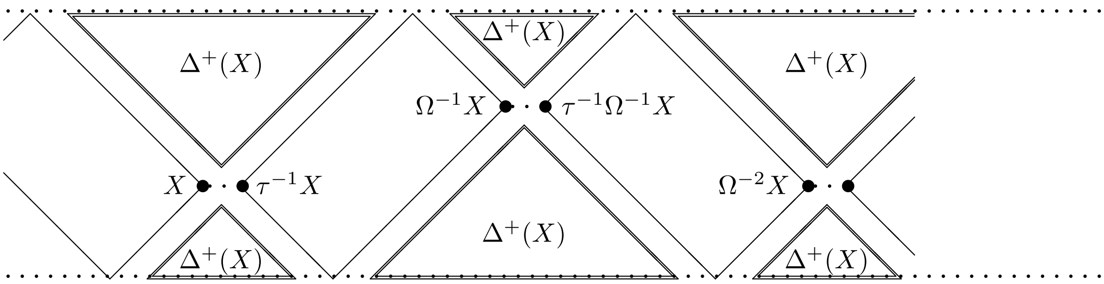
3. $\mathrm{S}'^*(X) = \mathrm{S}^* \setminus \{X\}$ とする。（ここで、$* = +, -$ である）

4. $\Delta(X) = \{\ Y \in \Gamma_0 \mid X \nsim Y\ \}$ とする。

5. $\Delta^+(X) = \bigcup_{\ell \geq 0}(\Delta(\Omega^{-\ell}X) \cup \mathrm{S}'^+(\Omega^{-\ell}X))$ とする。

6. $\Delta^-(X) = \bigcup_{\ell \leq 0}(\Delta(\Omega^{-\ell}X) \cup \mathrm{S}'^-(\Omega^{-\ell}X))$ とする。

各 $X \in \Gamma_0$ に対し、$\Delta^+(X)$ は以下のような位置関係にあることに注意する。



先程も述べたが、Γ は、1 次元次数付き環 $R = k[x,y]/(y^2 - x^{n+1})$ 上の極大 CM 加群のなす圏 CMR の Auslander-Reiten quiver の full subquiver を意識している。R-上での exceptional sequence の定義は以下の通りである。

定義 1.7 $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ を次数付き環で、$R_0 = k$ を標数 0 の代数的閉体とする。このとき、

1. 有限生成 R-加群 E が exceptional であるとは、$\begin{cases} \mathrm{Hom}(E,E) \cong k \\ \mathrm{Ext}^\ell(E,E) = 0\ (\ell > 0) \end{cases}$ をみたすことである。

2. exceptional 加群の列 $\epsilon = (\cdots, E_i, E_{i+1}, \cdots)$ が exceptional sequence であるとは、$\mathrm{Ext}^\ell(E_i, E_j) = 0\ (i > j, \ell \geq 0)$ をみたすことである。

$R = k[x,y]/(y^2 - x^{n+1})$（$n$ は正の偶数）のときには次のことがわかっている (c.f.[1],[2])。

補題 1.8 $R = k[x,y]/(y^2 - x^{n+1})$（$n$ は正の偶数）とし、Γ を CMR の Auslander-Reiten quiver の射影加群でない極大 CM 加群全体から得られる full subquiver とする。このとき、

1. 任意の直既約極大 CM 加群は exceptional である。

2. （射影加群でない）直既約極大 CM 加群 X, Y に対し、$\mathrm{Hom}(X, Y) \neq 0$ であるための必要十分条件は $X \leq Y$ (in Γ) である。

3. （射影加群でない）直既約極大 CM 加群 X, Y と正の整数 ℓ に対し、次は同値である。

   (a) $\mathrm{Ext}^{\ell}(X, Y) \neq 0$

   (b) $\Omega^{\ell} X \leq Y \leq \tau\Omega^{\ell-1} X$ (in Γ)

   (c) $\tau^{-1}\Omega^{-\ell+1} Y \leq X \leq \Omega^{-\ell} Y$ (in Γ)

注意 1.9 R, Γ を補題 1.8 の通りとし、X, Y を射影加群でない直既約極大 CM 加群とする。このとき、次は同値である。

1. すべての整数 ℓ に対し、$\mathrm{Ext}^{\ell}(X, Y) = 0$ である。

2. $X \in \Delta^{+}(Y)$ である。

3. $Y \in \Delta^{-}(X)$ である。

これらのことから、一般の translation quiver $\Gamma = \mathbb{Z}\mathbf{A}_n$ に対し、exceptional sequence を以下のように定義する。

定義 1.10 頂点 $E_1, E_2, \cdots, E_r \in \Gamma_0$ に対し、列 $\epsilon = (E_1, E_2, \cdots, E_r)$ が exceptional sequence であるとは、次の条件をみたすことである。

$$E_i \in \bigcap_{j<i} \Delta^{+}(E_j) \ (1 < i \leq r)$$

この条件は次の条件と同値である。

$$E_i \in \bigcap_{j>i} \Delta^{-}(E_j) \ (1 \leq i < r)$$

2. Main results

主結果を述べるためにもう少し準備をする。

定義 2.1 $\epsilon = (E_1, E_2, \cdots, E_r)$ を exceptional sequence とする。E_i, E_j が次の二条件をみたすとき、$E_i \lessdot_{\epsilon} E_j$ と表す。

1. $E_i \in \mathrm{S}^{'-}(E_j)$ である。

2. もし $E_i \leq E_m \leq E_j$ ならば、 $m = i$ または $m = j$ である。

exceptional sequence の定義より次のことが成立していることが容易に確かめられる。

補題 2.2 $\epsilon = (E_1, E_2, \cdots, E_r)$ を exceptional sequence とする。このとき、次のどの列も exceptional sequence になる。

1. $E_{i-1} \nsim E_i$ のとき、 $(E_1, E_2, \cdots, E_{i-2}, E_i, E_{i-1}, E_{i+1}, \cdots, E_r)$

2. $E_j \notin \mathrm{S}^{'-}(E_i)$ $(\forall j)$ のとき、$(E_1, E_2, \cdots, E_{i-1}, \Omega E_i, E_{i+1}, \cdots, E_r)$

3. $E_j \notin \mathrm{S}^{'+}(E_i)$ $(\forall j)$ のとき、$(E_1, E_2, \cdots, E_{i-1}, \Omega^{-1} E_i, E_{i+1}, \cdots, E_r)$

4. $E_i = (p, q)$, $E_j \lessdot_\epsilon E_i$ ならば $j = i - 1$ のとき、

$$(E_1, E_2, \cdots, E_{i-2}, E_i', E_{i-1}, E_{i+1}, \cdots, E_r)$$

$$\text{但し、} E_i' = \begin{cases} (q, q') & (E_{i-1} = (p, q') \text{ のとき}) \\ (p', p - n - 1) & (E_{i-1} = (p', q) \text{ のとき}) \end{cases}$$

5. $E_i = (p, q)$, $E_i \lessdot_\epsilon E_j$ ならば $j = i + 1$ のとき、

$$(E_1, E_2, \cdots, E_{i-2}, E_i', E_{i-1}, E_{i+1}, \cdots, E_r)$$

$$\text{但し、} E_i' = \begin{cases} (q + n + 1, q') & (E_{i+1} = (p, q') \text{ のとき}) \\ (p', p) & (E_{i+1} = (p', q) \text{ のとき}) \end{cases}$$

6. $E_{i-2} = (p, q')$, $E_{i-1} = (p', q)$, $E_i = (p, q)$ のとき、

$$(E_1, E_2, \cdots, E_{i-3}, E_i', E_{i-2}, E_{i-1}, E_{i+1}, \cdots, E_r)$$

$$\text{但し、} E_i' = (p', q')$$

7. $E_i = (p, q)$, $E_{i+1} = (p', q)$, $E_{i+2} = (p, q')$ のとき、

$$(E_1, E_2, \cdots, E_{i-1}, E_{i+1}, E_{i+2}, E_i', E_{i+3}, \cdots, E_r)$$

$$\text{但し、} E_i' = (p', q')$$

定義 2.3 ϵ, ϵ' を exceptional sequence とする。ϵ に補題 2.2 の変形を有限回行って ϵ' になるとき、$\epsilon \sim \epsilon'$ と表す。

定理 2.4 ϵ を exceptional sequence とする。このとき、exceptional sequence ϵ' と slice S で、$\epsilon \sim \epsilon'$, ϵ' は S に埋め込めるものが存在する。

証明 二段階に分けて証明する。

Step 1. $\epsilon = (E_1, E_2, \cdots, E_r)$ とおくとき、$\epsilon' = (E'_1, E'_2, \cdots, E'_r)$ で、$\epsilon \sim \epsilon'$, $E'_1 = E_1$, $E'_i \in \mathrm{S}^-(E'_1) \cup \Delta(E'_1) \cup \mathrm{S}^+(E'_1)$ $(\forall i)$ をみたすものが存在する。

各 i に対し、ℓ_i を $E_i \in \Delta(\Omega^{-\ell_i} E_1) \cup \mathrm{S}^+(\Omega^{-\ell_i} E_1)$ をみたす数として定義する。

exceptional sequence の定義より、$\ell_i \geq 0$ であるので、$\ell = \sum_{i=1}^r \ell_i$ に関する帰納法で示す。$\ell = 0$ ならば $\epsilon' = \epsilon$ ととればいい。$\ell > 0$ のとき、$i = \min\{\, j \mid \ell_j > 0 \,\}$ とおく。

$E_j \notin \mathrm{S}'^-(E_i)$ $(\forall j)$ のとき、$\epsilon'' = (E_1, E_2, \cdots, E_{i-1}, \Omega E_i, E_{i+1}, \cdots, E_r)$ とおく。このとき、補題 2.2.2 より、$\epsilon \sim \epsilon''$ であり、$\Omega E_i \in \Delta(\Omega^{-(\ell_i - 1)} E_1) \cup \mathrm{S}^+(\Omega^{-(\ell_i - 1)} E_1)$ なので、帰納法の仮定より条件をみたす ϵ' をとることができる。

$E_j \in \mathrm{S}'^-(E_i)$ なる j が存在するとき、$E_j \lessdot_\epsilon E_i$ とする。このとき、E_j の取り方より、(必要ならば補題 2.2.1 を使うことで) $j = i-1$ としてよい。$E_j \lessdot_\epsilon E_i$ をみたす j が $i-1$ のときのみの場合には、ϵ'' を補題 2.2.4 のようにとる。$j \neq i-1$ なる j で $E_j \lessdot_\epsilon E_i$ をみたすものが存在するとき、(必要ならば補題 2.2.1 を使うことで) $j = i-2$ とできる。そして、ϵ'' を補題 2.2.6 のようにとる。いずれの場合でも $\epsilon \sim \epsilon''$ である。ここで、i の取り方から　$\ell_{i-1} = 0$ であり、$E'_i < E_{i-1}$ より $E'_i \in \Delta(E_1) \cup \mathrm{S}^+(E_1)$ である。よってこの場合も帰納法の仮定より条件をみたす ϵ' をとることができる。

Step 2. ϵ' を step 1. のようにとると、ϵ' はある slice S に埋め込むことができる。

$\epsilon' = (E'_1, E'_2, \cdots, E'_r)$ とおく。exceptional sequence の定義より、任意の $i \neq j$ に対し $E'_i \in \mathrm{S}'^-(E'_j) \cup \Delta(E'_j) \cup \mathrm{S}'^+(E'_j)$ をみたすことに注意する。さらに、$i \neq j$ ならば、E'_i と E'_j は異なる τ-orbit にあることに注意する。$E'_i = (p_i, q_i)$ とおき、$p_i - q_i = t_i$ とおく。このとき、S を次のようにとる。すべての E'_i は S に属しているとする。$1 \leq t \leq r, t \notin \{\, t_1, t_2, \cdots t_r \,\}$ に対し、$t_i = \max\{\, t_i \mid t_i < t \,\}, t_j = \min\{\, t_j \mid t_j > t \,\}$ をとる。さらに、$Y \in \mathrm{S}'^+(E'_i) \cap \mathrm{S}'^+(E'_j)$ をとる。そして、$X = (p, q)$ を $p - q = t$, $X \in \mathrm{S}^-(Y) \cap (\mathrm{S}'^+(E'_i) \cup \mathrm{S}'^+(E'_j))$ ととり、この X が S に属するとすると、S は slice である。□

系 2.5 $\epsilon = (E_1, E_2, \cdots, E_r)$ を exceptional sequance とすると、$r \leq n$ である。

系 2.6 長さ n の任意の exceptional sequance ϵ, ϵ' に対し、$\epsilon \sim \epsilon'$ である。

参考文献

[1] T. Araya, *Exceptional sequences over graded Cohen-Macaulay rings*, Math. J. Okayama Univ. vol.41, 81-102 (1999).

[2] T. Araya, *A characterization of one dimensional* $\mathbf{N}$*-graded Gorenstein rings of finite Cohen-Macaulay representation type*, Math. J. Okayama Univ. vol.42, pp 61-66 (2000).

[3] W. Crawley-Boevey *Exceptional sequences of representations of quivers*, Representation of algebras, Sixth International Conference, Ottawa 1992, CMS Conf. Proc. 14 (1993), 117-124

[4] H. Meltzer *Exceptional vector bundles, tilting sheaves and tilting complexes on weighted projective lines*, preprint

[5] Y. Yoshino, *Cohen-Macaulay Modules over Cohen-Macaulay Rings*, London Math. Soc., Lecture Note Series vol.146, Cambridge U.P.(1990)

Graduate school of Natural Science and Technology
Okayama university, Okayama 700-8530 JAPAN
E-mail address : araya@math.okayama-u.ac.jp