Valuations on coproducts of skew fields and free feilds

Katsuo Chiba

Abstract. We consider valuations on coproducts of skew fields and free fields. We also introduce Cohn's skew field extensions $K \subset L$ such that the right dimension of L over K is finite , the left dimension of L over K is infinite, and K and L are isomorphic as rings.

1.序文及び Cohn の例

可換体上の free algebra の universal field of fractions を free field という．P.M.Cohn [4,5,6]は free field を用いて次のような斜体拡大を構成した．k を可換体，Λ を無限集合，n を自然数とする．k の標数 p が正で n を割り切り，$n = mp^r$，$p \nmid m$ である場合 ω を 1 の原始 m 乗根とし，それ以外の場合は ω を 1 の原始 n 乗根とする．$k < X >$ を集合 $X = \{x_{\lambda ij} | \lambda \in \Lambda, i, j = 1,2,3,\cdots\}$ 上の free k-algegra，E を free k-algebra $k < X >$ の universal field of fractions とする．$x_{\lambda ij}^{\alpha} = \omega^i x_{\lambda ij+1}$ で定義された E 上の準同型 α と $x_{\lambda ij}^{\delta} = x_{\lambda i+1 j}$ で定義された E 上の α-derivation δ を考える．$L = E(t;\alpha,\delta)$ を歪多項式環 $E[t;\alpha,\delta]$ の商体とし，K を E と t^n で生成された L の部分体とする．このとき L の K 上の右次元が n で L の K 上の左次元が無限であるが，さらにつぎのことがわかる．

命題 1(Cohn).上の斜体拡大 $K \subset L$ において k の標数 p が正で $n = p^r$ の場合において，K と L は k-多元環として同型である．

証明は[3]を参照されたい．Xue の定理[7,Theorem12.6]及びこの命題 1 より次の命題が導かれる．

命題 2.森田 duality を持たない両側 artin かつ左 duo 環が存在する．

The detailed version of this paper will be submitted for publication elsewhere.

上のCohnの例の様にartin環の研究においては中心上無限次元の斜体の研究が必要であり free field は重要な研究対象である．中心上無限次元の斜体は位相的に考えるとわかりやすいことが多い. Cohn や Lichtman による free field の可換付値の研究があるが, ここでは値群の可換性を仮定しない順序群を値群とする斜体の coproduct 及び free feild の付値について考察する.

定義:G を全順序群とし，G の単位元を 0 とかく．全ての$a \in G$にたいして$\infty + a = a + \infty = \infty + \infty$及び$a < \infty$とする様に，$G$ に∞を加える．D を斜体とする. 写像$v : D \to G \cup \{\infty\}$が D の元 x,y にたいして，次の条件をみたすとき写像vを D の付値という.

(V_1) $v(xy) = v(x) + v(y)$,

(V_2) $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$,

(V_3) $v(1) = 0$ and $v(0) = \infty$.

D を斜体，X を集合とする．D と $k < X >$ の K 上の ring coproduct を $D_K < X >= D *_K K < X >$と書く. その universal field of fractions を$D_K(X)$と書く. kを可換体とする．free k-algebra $k < X >$の universal field of fractions を$k(X)$と書く.

2.結果及び証明

定理 1.D を付値 v をもつ斜体,K を D の部分斜体，D_i $(i \in I)$を K を含む D の部分斜体，v_i $(i \in I)$を v をD_iに制限したD_i $(i \in I)$の付値とする．次のことが成り立つ.

(i)K 上のD_i $(i \in I)$の ring coproduct $*_K D_i$はすべての付値v_iの拡大付値wをもつ.

(ii)$*_K D_i$から D の I 個の ring coproduct $*_K D$への自然な写像が honest であれば, K 上のD_i $(i \in I)$の field coproduct $\circ_K D_i$は全てのv_iを拡大する付値 w をもつ.

(iii)D と I が可算ならば(i),(ii)の w の付値群 は$Z \times G$とできる．ここで G は D の付値群 Z は整数からなる順序群である.

証明は以下の補題による．

補題 1([2, p.84, Theorem]).D を斜体 K を D の 2 重可換子環とし，X を集合とする．次のことが成り立つ．(i)任意の D の付値は $D_K(X)$ に拡大できる．(ii)D 上の付値が可換ならば $D_K(X)$ 上の拡大された付値もまた可換である．

補題 2．D を斜体，K を D の部分斜体，$\{x_i \mid i \in I\}$ を集合とすると $\{x_i^{-1} D x_i \mid i \in I\}$ は $D_K(X)$ の中で field coproduct $\circ_K D_i$ を生成する．

補題 3([5, p.114, Corollary]). $K \subseteq E \subseteq F$ を斜体，X を集合とすると，$E_K(X) \subseteq F_K(X)$ となる．

定理 2.k を可換体，$X = \{x_i \mid i \in I\}$ を集合，$k < X >$ を k-free algebra，$k(X)$ を free field($k < X >$ の universal field of fractions)とする．v_i を $k(x_i)$ の k-付値とすると，全ての v_i の拡大となっている $k(X)$ の k-付値が存在する．

最後に[2,Theorem 3]を拡張した次の定理を報告する．

定理 3. k を可換体，$X = \{x_i \mid i \in I\}$ を集合，$k(X)$ を free field，G を順序群，$\{g_i \mid i \in I\}$ をその生成元とすると，$k(X)$ の k-付値 v で任意の i にたいして $v(x_i) = g_i$ となるものが存在する．

証明は次の補題を用いる．

補題 4([1, Theorem 3.4]).順序群 G が自由群 F の剰余群 $G \cong F / R$ としてあらわされたとする．このとき F に適当な順序をいれて上の準同系が順序群としての準同系にできる．

References

1. B.H.Neumann, On ordered groups, Amer.J.Math.71(1949),1-18.
2. K.Chiba, Free fields in complete skew fields and their valuations, J.Algebra 263(2003),75-87.
3. K.Chiba and K.Koike, There exist artinian left duo rings which do not have a Morita duality,preprint.
4. P.M.Cohn, Skew Fields, Theory of General Division Rings,Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 57, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
5. P.M.Cohn, Skew Feild Constructions, London Math. Soc. Lecture Notes No.27,1977, Cambridge University Press,Cambridge, 1995.
6. P.M.Cohn, Progress in free associative algebras, Israel J. Math. 19(1974),109-151.
7. W. Xue, Rings with Morita duality, Lecture Note in Math.1523, Springer-Verlag,Berlin,1992.

Niihama National College of Technology
7-1 Yagumo-cho Niihama 792-8580 Japan
E-mail address: chiba@sci.niihama-nct.ac.jp